UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2016-2017**

LICENCE d'ÉCONOMIE et GESTION

Première année - Semestre 1

MATH 101 - Pratique des Fonctions Numériques

Livret d'exercices II

Chapitre 3 - Limites - Continuité

Exercice I (*)

Déterminer les limites suivantes : dans cet exercice, il n'y a aucune forme indéterminée

I) Limites de fonctions de références :

$a)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x}$ $\quad b)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2}{5}$ $\quad c)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^3$ $\quad d)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{3x^3}$

$e)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x}$ $\quad f)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2}{5}$ $\quad g)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^3$ $\quad h)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2}{3x^3}$

$i)$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2}$ $\quad j)$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{-2}{x}$ $\quad k)$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln x$ $\quad l)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} -7e^x$

$m)$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} -\sqrt{x}$ $\quad n)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/4}$ $\quad o)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-1/4}$ $\quad p)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} 0,7^x$

II) Limites de sommes :

$q)$ $\lim\limits_{x\to5} x^2-3x+4$ $\quad r)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 5-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}$ $\quad s)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} 5-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}$

$t)$ $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} x^2(x-3)$ $\quad u)$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x}-4+3x^2$ $\quad v)$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x^2-3x+2$

$w)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1+\ln x$ $\quad x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-3x^2+e^x$ $\quad y)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x+x^3$

III) Limites de produits :

$z)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sqrt{x}$ $\quad a')$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(x-3)$ $\quad b')$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\dfrac{-2}{x}+7\right)$

$c')$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+4)e^x$ $\quad d')$ $\lim\limits_{x\to2} (x^2+4)e^x$ $\quad e')$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^x\ln x$

IV) Limites de quotients :

$f')\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{x^2}$ $\qquad g')\quad \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{x^2+2x+3}{x^2}$ $\qquad h')\quad \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+2x+3}{x+2}$

$i')\quad \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{1}{2x-6}$ $\qquad j')\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x-6}$ $\qquad k')\quad \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$

V) Cas particuliers des fonctions polynômes et rationnelles :

$l')\quad \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2-2x+10$ $\qquad m')\quad \lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3+5x-2$ $\qquad n')\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-5}{x^2+x+1}$

$o')\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x^3+7x-1}{4x+5}$ $\qquad p')\quad \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{7x-5}{x-2}$ $\qquad q')\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+5x-3}{-x^2+4x+1}$

Réponses : • a) 0 ; b) $-\infty$; c) $-\infty$; d) 0 ; e) 0 ; f) $-\infty$; g) $+\infty$; h) 0 ; i) $+\infty$; j) $-\infty$; k) $-\infty$; l) 0 ; m) 0 ; n) $+\infty$; o) 0 ; p) $+\infty$.

- q) 14 ; r) 5 ; s) 5 ; t) 0^+ ; u) $-\infty$; v) 0^+ ; w) $+\infty$; x) $-\infty$; y) $+\infty$.
- z) $+\infty$; a') $-\infty$; b') $-\infty$; c') $+\infty$; d') $8e^2$; e') $-\infty$.
- f') 1 ; g') $+\infty$; h') 2 ; i') $+\infty$; j') 0 ; k') $+\infty$.
- l') $+\infty$; m') $+\infty$; n') 3 ; o') $+\infty$; p') $+\infty$; q') -3.

Exercice II

Déterminer les limites suivantes :

$a)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} 5x-7$ $\qquad b)\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^3+3x-1$ $\qquad c)\quad \lim\limits_{x\to-\infty} -5x^3-1$

$d)\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^2+3x$ $\qquad e)\quad \lim\limits_{x\to-2} x^2-x+1$ $\qquad f)\quad \lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^2}{-x^3+4x+1}$

$g)\quad \lim\limits_{x\to0} \sqrt{5x^2+x+3}$ $\qquad h)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^3}$ $\qquad i)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{-x^3+4x+1}$

$j)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x^2-2x+6}{-4x+1}$ $\qquad k)\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(5-4x)}{3x^2+1}$ $\qquad l)\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^2+5x-7}{3x^3+1}$

$m)\quad \lim\limits_{x\to0} x-\dfrac{2}{x^2}$ $\qquad n)\quad \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$ $\qquad o)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1)\times\sqrt{x}$

$p)\quad \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{1-5x}{x-3}$ $\qquad q)\quad \lim\limits_{\substack{x\to-5\\x<-5}} \dfrac{1+5x}{x(x+5)}$ $\qquad r)\quad \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{2x+1}{x^2-4x+3}$

$s)\quad \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{x+1}{x-1}$ $\qquad t)\quad \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+\ln x$ $\qquad u)\quad \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{\ln x}{x}$

Exercice III

Soit f la fonction rationnelle définie par $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-x-2}$

1. Factoriser $D(x) = x^2 - x - 2$. En déduire l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer la limite de f en -1^+ et en -1^-. puis en 2^+ et en 2^-.

Exercice IV

Déterminez les limites suivantes : limites de fonctions composées et croissances comparées

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x-1}{x+3}}$ *b)* $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-3\\x<-3}} \sqrt{\frac{2x-1}{x+3}}$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}$ *e)* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln(1-x)$ *f)* $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \ln(1-x)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^2+3x+2}{-x^2+x+2}$ *h)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x - (x+1)$ *i)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x+x}$

j) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{2\sqrt{x}+1}{x}$ *k)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}+1}{x}$ *l)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3x)}{x}$

Exercice V (*)

Vrai ou Faux (Justifiez !)

1. Soit f une fonction vérifiant : pour tout $x > 0$, $5 < f(x) \leq 5 + \dfrac{3}{x+1}$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$.
2. Soit g une fonction vérifiant : pour tout $x > 1$, $g(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
3. Soit l une fonction vérifiant : pour tout $x > 10000$, $-10^{-2} < l(x) < 10^{-2}$.
   Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} l(x) = 0$.

Réponse : Deux propositions sont fausses et une seule est vraie !

Exercice VI

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2}x - 2 & \text{si} \quad 0 < x < 4 \\ x^2 - 5x + 4 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x^2+3} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Exercice VII

Pour quelle valeur de $m \in \mathbb{R}$ la fonction f suivante est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ mx - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Exercice VIII
D'après le partiel de janvier 2015

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x - 3x^2}{x^2 - 3x + 2} & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 3 + (x-1)\ln(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

1. Justifier que f est continue sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
2. Montrer que f admet une limite réelle en $x_0 = 1$.
3. Définir la fonction $\tilde{f}$, prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice IX

Pour chacun des tableaux suivants, déterminer le nombre de solutions des équations :

$$(E) : f(x) = 0 \text{ et } (E') : f(x) = 2$$

Pour chacune des solutions vous donnerez le meilleur encadrement possible.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$		$-$		0	$+$	
f_2	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2016-2017**

LICENCE d'ÉCONOMIE et GESTION

Première année - Semestre 1

MATH 101 - Pratique des Fonctions Numériques

Chapitre 4 - Étude globale d'une fonction

Exercice I

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, puis son ensemble de dérivabilité. Déterminer alors la dérivée de chacune d'elles :

Il est fortement conseillé de revoir les exercices de calculs de dérivées du chapitre I

$f_1(x) = x^2 - \dfrac{3}{x}$ $\quad f_2(x) = 5x^{\frac{5}{3}}$ $\quad f_3(x) = \dfrac{3x^2+4}{2x+1}$

$f_4(x) = x\ln x$ $\quad f_5(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad f_6(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

$f_7(x) = xe^x$ $\quad f_8(x) = \dfrac{e^x}{x}$ $\quad f_9(x) = (x^2+2x)e^x$

$f_{10}(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ $\quad f_{11}(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $\quad f_{12}(x) = x^{1/3}(2-3x)^{2/3}$

$f_{13}(x) = 3^x$ $\quad f_{14}(x) = \ln(2x+3)$ $\quad f_{15}(x) = \ln(3+e^{-x})$

$f_{16}(x) = \ln(x^2)$ $\quad f_{17}(x) = \ln(\ln x)$ $\quad f_{18}(x) = (\ln x)^3$

$f_{19}(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$ $\quad f_{20}(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ $\quad f_{21}(x) = \left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^4$

Exercice II

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}+$ par $f(x) = \dfrac{2e^x+1}{3}$ et $g(x) = \dfrac{8}{2e^x-1}$.

Première partie

1. Déterminer les limites de f et g en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. En déduire le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. En déduire le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}^+$.

Seconde partie
Les fonctions f et g sont les fonctions d'offre et de demande (en euros) de la vente d'un produit sur le marché. Plus précisément, $f(x)$ est le prix de vente unitaire proposé pour une quantité x de ce produit, et $g(x)$ est le prix unitaire accepté par les consommateurs pour une quantité x de ce produit.
Sur le marché en concurrence parfaite, le prix d'équilibre correspond à l'égalité entre l'offre et la demande. Déterminer le volume correspondant à ce prix d'équilibre, puis le prix d'équilibre.

Exercice III (*)

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = x \ln x - x$. Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{-3}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x^2 \ln x$.

Calculer $f'(x)$, puis en déduire le tableau des variations de f (limites en 0^+ et $+\infty$ demandées).

Éléments de réponse :

1. On résout sur $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation $g(x) > 0 \iff x \ln x - x > 0 \iff x(\ln x - 1) > 0$ $\iff \ln x - 1 > 0 \iff \ln x > 1 \iff x > e$ (car $x > 0$)
2. $\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{-3}{4} \times 2x + \dfrac{1}{2}\left(2x \ln x + x^2 \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-3}{2}x + x \ln x + \dfrac{1}{2}x = g(x)$

• Limite en 0^+ : utilisez la $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$ (croissances comparées)

• Limite en $+\infty$: utilisez $\forall x > 0,\ f(x) = x^2 \left(\dfrac{-3}{4} + \dfrac{1}{2} \ln x\right)$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ 0	$\searrow$	$-e^2/4$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice IV

1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 - 2x \ln x$.
   (a) Calculer la dérivée de f. En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.
   (b) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
   (c) Déterminer le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$
2. Soit g la fonction définie sur $\mathcal{D}_g =]0; 2[\cup]2; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln x}{(x-2)^2}$.
   (a) Calculer la dérivée de g, et montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x(x-2)^3}$.
   (b) En déduire les variations de g sur $\mathcal{D}_g$.
   (c) Déterminer les limites de g aux bornes de $\mathcal{D}_g$. Que peut-on en déduire pour la courbe de g ?
   (d) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.

Exercice V

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer sa dérivée.
3. Déterminer les limites de f aux bords de son ensemble de définition.
4. Donner le tableau des variations de f sur son ensemble de définition.

Exercice VI
Extrait du partiel de Juin 2014

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = xe^x - 1$
   (a) Calculer la fonction dérivée de g.
   (b) En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) Calculer $g(0)$ et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   (d) En déduire qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Justifier que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.
   (e) En utilisant le tableau de valeurs ci dessous, donner un encadrement de α

x	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$	1
xe^x	$0,11$	$0,24$	$0,40$	$0,60$	$0,82$	$1,10$	$1,41$	$1,78$	$2,21$	$2,72$

   (f) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = e^x - \ln x$.
   (a) Calculer la fonction dérivée de f, et montrer que : $\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$
   (b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (d) Déterminer une valeur approchée du minium de f sur $\mathbb{R}_+^*$ (on prendra comme valeurs approchées : $\alpha \approx 0,5$ et $\ln 2 \approx 0,7$, et on utilisera la question 1-d)).

Exercice VII
Extrait du partiel de Juin 2015

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x + \frac{1}{e^x + 1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Justifier que f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Montrer que la dérivée de f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \dfrac{e^{2x} + e^x + 1}{(e^x+1)^2}$. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que $\mathcal{C}_f$ possède au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique Δ_1, dont on donnera une équation.
5. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = x + 1 - \dfrac{e^x}{e^x + 1}$. En déduire que la droite Δ_2 d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

Exercice VIII
Extrait du partiel de Janvier 2016

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x - 1}$

1. Préciser l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$.
2. Effectuer la division euclidienne de $N(x) = x^2 - x + 3$ par $D(x) = x - 1$. En déduire qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$.
3. Déterminer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$ et en 1. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
4. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.
5. Déterminer les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et D.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2}$. En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}_f$. On précisera les valeurs exactes (et simplifiées) des extrema locaux.

Exercice IX (*)

On considère la fonction f définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x + 1}$. On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Effectuer la division euclidienne de $N(x) = x^2 + 3x + 6$ par $D(x) = x + 1$. En déduire qu'il existe trois réels a, b et c tels que, $\forall x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 1}$.
   En déduire que $\mathcal{C}$ possède une asymptote oblique que l'on précisera.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote.
3. Calculer la dérivée de f sur $\mathcal{D}$, puis donner le tableau des variations de f.

Éléments de réponses :

$\forall x \in D_f$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x + 1}$, et $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} = \dfrac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 1)^2}$.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

UNIVERSITÉ DE CERGY — **Licence d'Économie Finance et Gestion**

U.F.R. Economie et Gestion — **L1 - S1**

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

Partiel Première session - Janvier 2016 - 2h00

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction, en particulier de l'orthographe !
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 5 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

• **1)** Résoudre $(E_1)\ :\ (1+t)^3 = 0,008$

• **2)** Résoudre $(E_2)\ :\ 2e^{5x} = 25$ (on donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée de la solution de (E_2) en prenant $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 5 \approx 1,6$)

• **3)** On considère l'équation $(E_3)\ :\ 5\ln x - \ln y - 3 = 0$

1. Exprimer y en fonction de x.
2. Donner la valeur exacte de y lorsque x est égal à 2, puis une valeur approchée en prenant $e^3 \approx 20$.

• **4)** Résoudre l'inéquation $(I)\ :\ \ln(x-1) \geq \ln(5-x)$

Exercice 2 - 7 points

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x-1}$

1. Préciser l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$.
2. Effectuer la division euclidienne de $N(x) = x^2 - x + 3$ par $D(x) = x - 1$. En déduire qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
3. Déterminer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$ et en 1. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
4. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.
5. Déterminer les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et D.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}$. En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
   On précisera les valeurs exactes (et simplifiées) des extrema locaux.

Exercice 3 - 8 points

Partie A On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = x + 1 + \ln x$$

1. Déterminer les limites de g aux bords de son domaine de définition.
2. Calculer la dérivée de g sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire les variations de g sur son domaine (faire un tableau, limites incluses).
3. Démontrer que l'équation $(E)\ :\ g(x) = 0$, admet une unique solution α.
   On donne le tableau de valeurs suivant de la fonction « logarithme népérien ». Préciser un intervalle d'amplitude $0,1$ contenant α.

x	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$	1
$\ln x$	$-2,3$	$-1,6$	$-1,2$	$-0,9$	$-0,7$	$-0,5$	$-0,4$	$-0,2$	$-0,1$	0

4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(0) = 0 \ \text{ et } \ f(x) = \frac{x\ln x}{x+1} \ \text{ si } x > 0$$

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer la dérivée de f sur $]0;+\infty[$ et justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. En déduire les variations de f sur son domaine.
4. Démontrer que $f(\alpha) = -\alpha$, puis en déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $0,1$.

UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Economie et Gestion

Licence d'Économie Finance et Gestion
L1 - S1

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

Partiel Seconde session - Juin 2016 - 2h00

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction, en particulier de l'orthographe !
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - (1,5 + 2,5 + 4 + 3 =) 11 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

• **1)** Résoudre l'équation $(E_1)\ :\ 6^t = 9 \times 10^t$. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée en prenant : $\ln 3 \approx 1,1$ et $\ln 5 \approx 1,6$.

• **2)** Résoudre l'équation $(E_2)\ :\ \ln(2x-1) + \ln(x+1) = \ln(3-x)$ (Préciser le domaine de définition)

• **3)** Déterminer les fonctions dérivées des fonction suivantes :

$f_1\ :\ f_1(x) = \dfrac{3-5x}{x^2+1}$ sur $D = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_2\ :\ f_2(x) = \ln(x^2) - (\ln x)^2$ sur $D = \mathbb{R}_+^*$

$f_3\ :\ f_3(x) = x^2 e^{2x+1}$ sur $D = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_4\ :\ f_4(x) = x^{1/4}(1-4x)^{3/4}$ sur $D = \left]0; \dfrac{1}{4}\right[$

• **4)** On considère le triangle ABC où $A(3;7)$, $B(-4;1)$ et $C(4;-2)$.

1. Donner l'équation réduite de la médiane passant par A.
2. Donner une équation cartésienne de la médiane passant par B.
3. En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.
4. Retrouver ce résultat en considérant G comme isobarycentre des points A, B et C.

Exercice 2 - 4 points

On considère le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 - 3X - 1$

1. Déterminer une racine de $P(X)$ dans l'ensemble $\{\ -2;-1;0;1;2\}$. En déduire que $P(X)$ se factorise par un polynôme $Q(X)$ que vous préciserez.
2. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$.
3. Terminer la factorisation de $P(X)$ en un produit de polynômes de degré 1.

Exercice 3 - 5 points

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

et on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Démontrer que :
$$\forall x > 0,\ e^{-x} < e^x$$
puis que
$$\forall x < 0,\ e^{-x} > e^x$$
En déduire le signe de $e^{-x} - e^x$ sur $\mathbb{R}$ (à donner dans un tableau).
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
4. Calculer la dérivée de f, puis étudier le signe de f' sur $\mathcal{D}_f$.
5. En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.