Année 2016-2017

UNIVERSITÉ DE CERGY

U.F.R. Économie & Gestion

LICENCE d'ÉCONOMIE FINANCE et GESTION

Première année - Semestre 1

MATHÉMATIQUES - MATH 101
Pratique des Fonctions Numériques

Enseignant responsable : J. Stéphan

CM/TD de C. Boyer, R. Bricet, Y. Duval, Ch. Grzanka, Th. Homshaw, B. Lecunff G. Lazzarini, C. Lecavelier, L. Loubière, H. Moutima-Backenga, J.-P. Passy et J. Stéphan

Livret d'exercices I - Outils mathématiques

Les exercices signalés par un (*),
pour lesquels des éléments de réponse sont donnés, ne seront pas corrigés en T.D.

Sauf indication contraire, tous ces exercices doivent être préparés sans calculatrice

Première partie : Calcul numérique et littéral

Exercice I (*)

1. Décomposer en produit de facteurs premiers : $A = 54$, $B = 48$. En déduire la valeur de $\dfrac{7}{54} - \dfrac{5}{48}$
2. Décomposer en produit de facteurs premiers : $A = 216$, $B = 300$. En déduire une expression simplifiée de : $\dfrac{A}{B}$, $\dfrac{A^2}{B^3}$, $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ et $\sqrt{A^3B^2}$.

Exercice II

1)(*) Donner ces nombres sous la forme d'une fraction :

$A = \dfrac{-3}{8} \times (-2)$ $\qquad B = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{6}$ $\qquad C = \dfrac{4}{7} - \dfrac{2}{3}$

$D = \dfrac{4}{7} + \dfrac{4}{3}$ $\qquad E = \dfrac{4}{7} \div \dfrac{4}{3}$ $\qquad F = \dfrac{20}{3} \div \dfrac{15}{4}$

$G = \dfrac{30000 + 100}{100}$ $\qquad H = \dfrac{7}{3} - \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}$ $\qquad I = \dfrac{7}{3} - \left(\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}\right)$

$J = 3 - \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{6}$ $\qquad K = -\dfrac{2}{3} - 5 \times \dfrac{4}{7}$ $\qquad L = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - 4$

$M = \dfrac{11 - \dfrac{49}{9}}{11}$ $\qquad N = \dfrac{3 - \dfrac{6}{5}}{2 + \dfrac{7}{10}}$ $\qquad O = \dfrac{1 + \dfrac{1}{3}}{2 - \dfrac{4}{3}}$

$P = -5 \times \left(\dfrac{-2}{3}\right)^2 + 4 \times \left(\dfrac{-2}{3}\right) + 1$ $\qquad Q = \left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{6}\right) \times 4\left(3 - \dfrac{3}{5}\right)$ $\qquad R = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}}{\dfrac{5}{6} + \dfrac{5}{8}}$

2) Ecrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule fraction, la plus simple possible.

$S = \dfrac{a}{a+1} - \dfrac{a}{a-1}$ $\qquad T = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1+a}{a^2}$ $\qquad U = \dfrac{n(n+1)}{n-1} \div \dfrac{(n-1)n}{n-2}$

3) Donner : l'inverse de $V = \dfrac{5}{12}$, et le carré de $W = \dfrac{-9}{16}$.

4) Si l'on ajoute le même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\dfrac{111}{11}$, on obtient la fraction $\dfrac{12}{7}$. Quel est ce nombre ?

Exercice III

1) (*) Simplifier les nombres suivant :

$A = \sqrt{10^2 - 6^2}$ $\quad B = \sqrt{9+4}$ $\quad C = \left(-\sqrt{7}\right)^2$ $\quad D = \sqrt{(-3)^2}$ $\quad E = \sqrt{2} + \sqrt{8}$

2) Écrire ces nombres sous la forme $a\sqrt{b}$ (avec b le plus petit possible).

$F = \sqrt{175}$ $\quad G = 3\sqrt{27} \times \sqrt{6}$ $\quad H = 3\sqrt{24} \times 2\sqrt{98}$

$I = \sqrt{15} \times 3\sqrt{6} \times (\sqrt{2})^3$ $\quad J = -2\sqrt{99} + 4\sqrt{275} + 2\sqrt{11}$ $\quad K = \dfrac{3\sqrt{80} \times \sqrt{14}}{\sqrt{90}}$

3) Ecrire les nombres suivants sous la forme la plus simple possible (développer, simplifier, réduire)

$L = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 3\sqrt{6})$ $\quad M = (3 + \sqrt{2})(5 - 4\sqrt{2})$ $\quad N = (5\sqrt{3} - 2)^2$

$O = (2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})$ $\quad P = 5(\sqrt{7})^3 + 2(\sqrt{7})^2 - \sqrt{7} - 1$ $\quad Q = \dfrac{6 + 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

4) Vrai ou faux ?

1. 16 possède deux racines carrées 4 et -4.
2. Il existe deux nombres dont le carré vaut 4.
3. La racine carrée d'une somme est égale à la somme des racines carrées.

Exercice IV

1) (*) Écrire ces nombres sous la forme la plus simple possible :

$A = 2^{-2}$ $\quad B = -2^2$ $\quad C = \dfrac{-3^2}{5}$ $\quad D = 2 \times (10^3)^2$ $\quad E = (2 \times 10^{-3})^{-2}$

2) (*) Ecrire les nombres suivants sous la forme d'une seule puissance :

$F = 5^{-3} \times (5^3)^2$ $\quad G = \dfrac{0,0001 \times 0,001}{10000}$ $\quad H = \dfrac{(7^5)^4}{7^{12}}$ $\quad I = \dfrac{4^3 \times 2^{-3}}{8^3}$

3) Ecrire les nombres suivants sous la forme $2^n 3^m$ (n et m entiers relatifs)

$J = \dfrac{1}{2^3} \times (3^2)^3 \times (2 \times 3^2)^{-1}$ $\quad K = \dfrac{8}{27} \times (3^4) \times 2^{-5}$ $\quad L = \dfrac{12^2 \times 48^3}{54^4}$

4) Ecrire les nombres suivants sous la forme d'une puissance ou d'un produit de deux puissances :

$M = (a^7)^2 a^{-3}$ $\quad N = \left(9x^6\right)^4 \left(3x^5\right)^{-5}$ $\quad O = \left(\dfrac{K^5}{2}\right)^2 \left(-2K^{-3}\right)^3 (2K^2)$

$P = \dfrac{a^3 b^2 a^4 b^{-4}}{a^5 b}$ $\quad Q = \dfrac{(x^2 y)^{-2}}{(x^3 y^2)^3} \times x^{-1}$ $\quad R = \left(-2K^3 L^2\right)^5 \left(\dfrac{K^7}{8L^3}\right)^{-2}$

5) Ecrire les nombres suivants sous la forme $2^r 3^s$ (r et s rationnels)

$S = 4^3 \times 2^{3/5} \times 8$ $\qquad T = 36^{1/3} \times 8^2 \times 27^{1/2}$ $\qquad U = \dfrac{4^3 \times 2^{3/5}}{8^2}$

$V = \dfrac{27^{1/4} \times 3^{1/2}}{81}$ $\qquad W = \dfrac{12^{1/3} 48^{2/3}}{6}$ $\qquad X = \dfrac{\sqrt{2^{1/3} 27^{1/4}}}{24}$

Seconde partie : Montrer une égalité

Exercice V

Montrez les égalités suivantes :

1. $\dfrac{(8 \times 1\,000)^2}{200\,000} = 320$
2. $(2 - \sqrt{3})^2 - 1 = \sqrt{3}(2\sqrt{3} - 4)$
3. $(x-1)(x-5) = (x-3)^2 - 4$

Troisième partie : Fonctions affines - Équations de droites

Exercice VI

Complétez le tableau suivant en donnant l'expression des fonctions affines définies par les images de deux réels :

x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$	$f(x) =$
0	2	3	8	
1	10	2	8	
2	1	-3	16	
7	3	-8	-3	
$0,01$	$5\,000$	$-0,02$	$2\,000$	
2000	$3\,000$	2016	$2\,200$	
2010	$0,1$	2016	$0,04$	
10	$0,5$	-5	$-0,55$	
1	$0,12$	5	$0,242$	

Exercice VII

Déterminez l'expression des fonctions affines f_i suivantes :

1. f_1 vérifie $f_1(5) = -1$ et le coefficient directeur de $\mathcal{D}_{f_1}$ est 6.
2. f_2 a pour représentation graphique la droite d'équation cartésienne :

$$\frac{1}{6}x - \frac{2}{3}y + 0,5 = 0$$

Exercice VIII

Dans un repère orthonormé (unité graphique 1 cm ou 1 grand carreau), représenter les droites suivantes : *Consigne :* Vous donnerez des points à coordonnées entières de ces droites.

$D_1 : y = \frac{3}{4}x - 1$ $\qquad$ $D_2 : y = \frac{-2}{3}x + \frac{2}{3}$ $\qquad$ $D_3 : y = \frac{-1}{5}x + \frac{3}{5}$

Exercice IX
Extrait du Test 1 - Octobre 2014

Un imprimeur propose le tarif suivant pour les étudiants qui désirent photocopier leurs travaux.
• Les 500 premières photocopies sont au tarif de $0,05$ € par photocopie.
• Les 500 photocopies suivantes sont au tarif de $0,04$ € par photocopie.
• Enfin chaque photocopie supplémentaire à partir de la $1001^{\text{ième}}$ coûte $0,025$ € .

Soient x le nombre de photocopies à réaliser, et $f(x)$ le prix à payer pour x photocopies.

1. Calculer $f(x)$ pour $x = 200$, $x = 800$ et $x = 2000$.
2. Exprimer $f(x)$ en fonction de x, $x \geq 0$.
3. Tracer la courbe représentative de f. Vous donnerez des points dont les abscisses sont des multiples de 100, afin de représenter $\mathcal{C}_f$.

Exercice X (*)

Déterminer l'intersection des droites suivantes :

$$(D) : y = 3x - 2 \text{ et } (D') : y = -x + 2 \ .$$

$$(\Delta) : y = 2x - 3 \text{ et } (\Delta') : y = -3x + 5.$$

Exercice XI
D'après le partiel de juin 2016

On considère le triangle ABC où $A(3; 7)$, $B(-4; 1)$ et $C(4; -2)$.

1. Donner l'équation réduite de la médiane passant par A.
2. Donner une équation cartésienne de la médiane passant par B.
3. En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

Exercice XII

Calculer le déterminant, puis résoudre chacun des systèmes suivant :

1. $\begin{cases} 2x+y &= 4 \\ x+3y &= 7 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \frac{1}{5}K-L &= -2 \\ K+\frac{1}{3}L &= 7 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \sqrt{2}a+b &= 1 \\ 2a+\sqrt{2}b &= 2 \end{cases}$

Exercice XIII (*)

Factoriser les expressions suivantes, puis déterminer leur signe à l'aide d'un tableau de signes si nécessaire :

$A(x) = (x+1)(2x-3)+5(x+1)$ $B(x) = (x+1)(2x-3)-(x-5)(x+1)$

$C(x) = (2x+1)^2+(2x+1)$ $D(x) = (2x+1)(2x-3)-4x+6$

$E(x) = x^2-6x+9-(x-3)$ $F(x) = x^2-2x+1-(2x-5)^2$

Exercice XIV (*)

Résoudre les inéquations suivantes, en utilisant si besoin un tableau de signes :

(I_1) : $5 \leq -2x+6 < 8$ (I_2) : $\frac{5}{3}x-\frac{3}{5} \leq 2$ (I_3) : $\frac{x-5}{3} > \frac{x+2}{2}$

(I_4) : $\frac{2x}{3-5x} \leq 0$ (I_5) : $x^2 \leq x$ (I_6) : $\frac{1}{x} > x$

(I_7) : $(x-3)(1-2x) < (x-3)^2$ (I_8) : $\frac{3-x}{x+5} \geq 1$ (I_9) : $\frac{2x+3}{x} \leq \frac{-9}{x-6}$

Quatrième partie : Dérivation - Variations d'une fonction

Exercice XV

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur I :

f_1 : $f_1(x) = \frac{x}{3}+\frac{3}{7}$ sur $D=\mathbb{R}$ f_2 : $f_2(x) = \frac{3}{x}+\frac{7}{3}$ sur $D=]0;+\infty[$

f_3 : $f_3(x) = -3x^3+4x^2-7$ sur $D=\mathbb{R}$ f_4 : $f_4(x) = x^3(2x^2+x)$ sur $D=\mathbb{R}$

f_5 : $f_5(x) = \frac{-3}{2x+7}$ sur $D=\left]\frac{-7}{2};+\infty\right[$ f_6 : $f_6(x) = \frac{x+1}{6-5x}$ sur $D=D=\left]\frac{6}{5};+\infty\right[$

f_7 : $f_7(x) = \frac{1}{x^2+1}$ sur $D=\mathbb{R}_+^*$ f_8 : $f_8(x) = \frac{x^2+x-1}{3x^2+1}$ sur $D=\mathbb{R}$

f_9 : $f_9(x) = \frac{2x^2-x}{(x+1)^2}$ sur $D=]-1;+\infty[$ f_{10} : $f_{10}(x) = (-3x+7)^2$ sur $D=\mathbb{R}$

f_{11} : $f_{11}(x) = (1+\sqrt{x})^2$ sur $D=\mathbb{R}_+^*$ f_{12} : $f_{12}(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ sur $D=D=]1;+\infty[$

Exercice XVI

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur I :

$f_1\ :\ f_1(a) = \dfrac{a}{5} + \dfrac{3}{a}$ sur $I =]0; +\infty[$

$f_2\ :\ f_2(y) = -5x^2 + 3y - 7$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_3\ :\ f_3(x) = -5x^2 + 3y - 7$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_4\ :\ f_4(x) = k^2x^k$ sur $I = \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$

$f_5\ :\ f_5(k) = \dfrac{k^2}{x}$ sur $I = \mathbb{R}$ $(x > 0)$

$f_6\ :\ f_6(x) = \dfrac{x + k^2}{1 - x^2}$ sur $I =]-1; 1[$

$f_7\ :\ f_7(b) = \dfrac{a + 3b}{b^2}$ sur $I =]0; +\infty[$

$f_8\ :\ f_8(a) = \dfrac{a + 3b}{b^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ $(b > 0)$

$f_9\ :\ f_9(x) = 5x^3y^2$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_{10}\ :\ f_{10}(y) = 5x^3y^2$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_{11}\ :\ f_{11}(x) = x^2e^{3y-1}$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_{12}\ :\ f_{12}(y) = x^2e^{3y-1}$ sur $I = \mathbb{R}$

Exercice XVII

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a

$f_1\ :\ f_1(x) = \dfrac{-3}{2}x^2 + 2x - 3,$ en $a = 1$

$f_2\ :\ f_2(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4,$ en $a = 0$

$f_3\ :\ f_5(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2,$ en $a = 2$

$f_4\ :\ f_4(x) = 2x + \sqrt{x},$ en $a = 4$

Exercice XVIII

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2x + 2$

1. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1
3. Donner une approximation affine de f au voisinage de $x_0 = 1$
4. Donner une valeur approchée de $f(1,01)$
5. Quelle est l'erreur commise en utilisant l'approximation affine pour calculer $f(1+h)$?

Exercice XIX

Donner l'approximation affine des fonctions suivantes au voisinage de x_0 :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x_0 = 10$
2. $f_2(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 4$
3. $f_3(x) = x^3$ en $x_0 = 2$

On utilisera l'approximation affine sous la forme $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$
On pourra étudier un ou deux exemples avec de « petites » valeurs de h.

Exercice XX

Étudier les variations des fonctions suivantes :

$f_1\ :\ f_1(x) = -3x^2 + 2x - 1$ sur $D = \mathbb{R}$

$f_2\ :\ f_2(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ sur $D = \mathbb{R}$

$f_3\ :\ f_3(x) = \dfrac{3x - 5}{x - 3}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$f_4\ :\ f_4(x) = \ln(x) - \sqrt{x}$ sur $D = \mathbb{R}_+^*$

Exercice XXI (*)

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur I :

$f_1(x) = -4x^3 + 7x^2 - 2x + 8$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_2(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x + 1$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_3(x) = \dfrac{3x^2}{5} + \dfrac{2x}{7} - \dfrac{1}{3}$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_4(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

$f_5(x) = x^2(3x^3 - 7x)$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_6(x) = (2x+3)(5x-7)$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_7(x) = (3x-1)\sqrt{x}$ sur $I =]0; +\infty[$

$f_8(x) = (2x-1) \times \sqrt{x+1}$ sur $I =]-1; +\infty[$

$f_9(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$ sur $I =]-1; +\infty[$

$f_{10}(x) = \dfrac{3x+5}{7-2x}$ sur $I = \left]\dfrac{7}{2}; +\infty\right[$

$f_{11}(x) = \dfrac{5}{3x^2+7}$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_{12}(x) = \dfrac{3x^2-1}{2x-7}$ sur $I = \left]\dfrac{7}{2}; +\infty\right[$

$f_{13}(x) = \dfrac{2x+5}{3} + \dfrac{5}{2x+5}$ sur $I = \left]\dfrac{-5}{2}; +\infty\right[$

$f_{14}(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_{15}(x) = (5x-6)^2$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_{16}(x) = (-x^2+5x+4)^2$ sur $I = \mathbb{R}$

Solutions de l'exercice XXI

$f'_1(x) = -12x^2 + 14x - 2$

$f'_2(x) = 12x^3 - 3x^2 + 4x - 7$

$f'_3(x) = \dfrac{6x}{5} + \dfrac{2}{7}$

$f'_4(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{x^2}$

$f'_5(x) = 2x(3x^3 - 7x) + x^2(9x^2 - 7) = 15x^4 - 21x^2$

$f'_6(x) = 2(5x-7) + 5(2x+3) = 20x + 1$

$f'_7(x) = 3\sqrt{x} + \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$

$f'_8(x) = 2\sqrt{x+1} + \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{6x+3}{2\sqrt{x+1}}$

$f'_9(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$

$f'_{10}(x) = \dfrac{31}{(7-2x)^2}$

$f'_{11}(x) = \dfrac{-30x}{(3x^2+7)^2}$

$f'_{12}(x) = \dfrac{6x^2 - 42x + 2}{(2x-7)^2}$

$f'_{13}(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{-10}{(2x+5)^2}$

$f'_{14}(x) = \dfrac{-3x^2+1}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$

$f'_{15}(x) = 10(5x-6)$

$f'_{16}(x) = 2(-2x+5)(-x^2+5x+4)$

Année 2015-2016

UNIVERSITÉ DE CERGY

LICENCE d'ÉCONOMIE, FINANCE et GESTION

Première année - Semestre 1

MATH 101 : PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

LIVRET D'EXERCICES 1 - Quelques outils mathématiques

Corrigé de quelques exercices

Exercice I

1. Décomposer en produit de facteurs premiers : $A = 54 = 2 \cdot 3^3$, $B = 48 = 2^4 \cdot 3$. $PPMC(54, 48) = 2^4 \cdot 3^3 = 432$ d'où $\dfrac{7}{54} - \dfrac{5}{48} = \dfrac{56}{432} - \dfrac{45}{432} = \dfrac{11}{432}$

2. Décomposer en produit de facteurs premiers : $A = 216 = 2^3 \cdot 3^3$, $B = 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. $\dfrac{A}{B} = \dfrac{2 \cdot 3^2}{5^2}$, $\dfrac{A^2}{B^3} = \dfrac{3^3}{5^6}$, $\sqrt{A} = 6\sqrt{6}$, $\sqrt{B} = 10\sqrt{3}$ et $\sqrt{A^3B^2} = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot \sqrt{6}$.

Exercice II

1) Donner ces nombres sous la forme d'une fraction :

$A = \dfrac{-3}{8} \times (-2) = \dfrac{3}{4}$ $\qquad B = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{7}{3}$ $\qquad C = \dfrac{4}{7} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{-2}{21}$

$D = \dfrac{4}{7} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{40}{21}$ $\qquad E = \dfrac{4}{7} \div \dfrac{4}{3} = \dfrac{3}{7}$ $\qquad F = \dfrac{20}{3} \div \dfrac{15}{4} = \dfrac{16}{9}$

$G = \dfrac{30000 + 100}{100} = 301$ $\qquad H = \dfrac{7}{3} - \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$ $\qquad I = \dfrac{7}{3} - \left(\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$

$J = 3 - \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{2}$ $\qquad K = -\dfrac{2}{3} - 5 \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{-74}{21}$ $\qquad L = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - 4 = \dfrac{-19}{6}$

$M = \dfrac{11 - \dfrac{49}{9}}{11} = \dfrac{50}{99}$ $\qquad N = \dfrac{3 - \dfrac{6}{5}}{2 + \dfrac{7}{10}} = \dfrac{2}{3}$ $\qquad O = \dfrac{1 + \dfrac{1}{3}}{2 - \dfrac{4}{3}} = 2$

$P = -5 \times \left(\dfrac{-2}{3}\right)^2 + 4 \times \left(\dfrac{-2}{3}\right) + 1 = \dfrac{-35}{9}$ $\qquad Q = \left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{6}\right) \times 4\left(3 - \dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{52}{5}$

$R = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}}{\dfrac{5}{6} + \dfrac{5}{8}} = \dfrac{-6}{35}$

Exercice III

1) Simplifier les nombres suivant :

$A = 8$ $\quad B = \sqrt{13}$ $\quad C = 7$ $\quad D = 3$ $\quad E = 3\sqrt{2}$

Exercice IV

1) $A = \dfrac{1}{4}$ $\quad B = -4$ $\quad C = \dfrac{-9}{5}$ $\quad D = 2 \cdot 10^6$ $\quad E = 250\,000$

2) $F = 5^3$ $\quad G = 10^{-11}$ $\quad H = 7^8$ $\quad I = 2^{-6}$

Exercice X

$(D) : y = 3x - 2$ et $(D') : y = -x + 2$ se coupent en $I\,(1;1)$

$(\Delta) : y = 2x - 3$ et $(\Delta') : y = -3x + 5$ se coupent en $J\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{1}{5}\right)$

Exercice XIII

Factoriser les expressions suivantes, puis déterminer leur signe à l'aide d'un tableau de signes si nécessaire :

$A(x) = (x+1)(2x-3) + 5(x+1) = (x+1)(2x+2) = 2(x+1)^2 \geq 0$

$B(x) = (x+1)(2x-3) - (x-5)(x+1) = (x+1)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$B(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$C(x) = (2x+1)^2 + (2x+1) = (2x+1)(2x+2)$

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		$+\infty$
$C(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D(x) = (2x+1)(2x-3) - 4x + 6 = (2x-3)(2x-1)$

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$E(x) = x^2 - 6x + 9 - (x-3) = (x-3)(x-4)$

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$E(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$F(x) = x^2 - 2x + 1 - (2x-5)^2 = (x-1)^2 - (2x-5)^2 = (x-1-2x+5)(x-1+2x-5) = (-x+4)(3x-6)$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$F(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice XIV

$S_1 = \left]-1 : \dfrac{1}{2}\right]$, $\quad S_2 = \left]-\infty; \dfrac{39}{25}\right]$; $\quad S_3 =]-\infty; -16[$;

$S_4 =]-\infty; 0] \cup \left]\dfrac{3}{5}; +\infty\right[$; $\quad S_5 = [0;1]$; $S_6 =]-\infty; -1[\cup]0;1[$; $S_7 = \left]-\infty; \dfrac{4}{3}\right[\cup]3;+\infty[$;

$S_8 =]-5;-1]$; $S_9 = [-3;0[\cup]3;6]$.

UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2016-2017**

LICENCE d'ÉCONOMIE et GESTION

Première année - Semestre 1

MATH 101 - Pratique des Fonctions Numériques

Chapitre 2 - Fonctions usuelles

Exercice I

Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1 \ : \ f_1(x) = \dfrac{2x+3}{x-1} - \dfrac{x+1}{x+3}$
2. $f_2 \ : \ f_2(x) = \dfrac{x}{(3+x)(x^2-6)}$
3. $f_3 \ : \ f_3(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$
4. $f_4 \ : \ f_4(x) = \sqrt{\dfrac{-2x+3}{x+1}}$

Exercice II

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x} + 1$. Déterminer l'expression de $h(x) = (f \circ g)(x)$ et $l(x) = (g \circ f)(x)$. Vous préciserez les ensembles de définition de ces fonctions.

Exercice III

Résoudre les équations et inéquations suivantes (dans $\mathbb{R}$)

$(E_1) \ : \ -3x^2 + 5x + 2 = 0$ $\qquad (E_2) \ : \ -x^2 - x + 2 > 0$ $\qquad (E_3) \ : \ x^2 + x = -1$

$(E_4) \ : \ 2x^3 + 5x^2 - 12x = 0$ $\qquad (I_1) \ : \ x^4 - 3x^2 - 4 > 0$ $\qquad (I_2) \ : \ \dfrac{-x^2+x-1}{5-x^2} \leq 0$

Exercice IV
Extrait du Test 1 - Octobre 2012

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - x + 6$.

1. Tracez la parabole $\mathcal{P}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 1 cm : vous préciserez sur votre copie les coordonnées du sommet, l'équation de l'axe de symétrie, les points d'intersection de $\mathcal{P}_f$ avec les axes du repère.
2. Tracer la courbe $\mathcal{P}_g$ de la fonction g définie par $g(x) = x^2$
3. Résoudre **graphiquement** l'équation $(E) \ : \ f(x) = g(x)$
   puis l'inéquation $(I) \ : \ f(x) < g(x)$ (rédiger vos réponses !)
4. Résoudre **algébriquement** l'équation (E) puis l'inéquation (I).

Exercice V

Effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans les cas suivants :

1. $A(x) = 3x^2 - 5x + 9$ et $B(x) = 3x - 1$
2. $A(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 4$ et $B(x) = 2x^2 + x - 3$
3. $A(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ et $B(x) = x^2 + 2x - 3$. En déduire la factorisation de $A(x)$. Résoudre $A(x) > 0$.
4. **Extrait du Test 2 - Nov. 2013** Justifier que 2 est une racine de $P(X) = 2X^4 - 7X^3 - 2X^2 + 13X + 6$ et déterminer une autre racine de $P(X)$ dans l'ensemble $\{-2; -1; 0; 1\}$. En déduire que $P(X)$ est divisible par un polynôme $Q(X)$ de degré 2 que vous préciserez. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$, puis terminer la factorisation de $P(X)$ en un produit de facteurs de degrés 1.

Exercice VI

1. Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

   (e_1) $\ln 15 = \ln 3 + \ln 5$ $\quad$ (e_2) $3\ln 2 = \ln 6$ $\quad$ (e_3) $(\ln 3)^2 = \ln 9$

2. Écrire à l'aide d'un seul logarithme :

   $A = 2\ln 3 - \ln 5 + \ln 2$ $\quad$ $B = \frac{1}{2}\ln 4 - 3\ln 2 + \ln 8$ $\quad$ $C = 3\ln 10 + \ln 0,02 + 3\ln 2$

3. Écrire chacun des ces nombres sous la forme $a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, $(a, b, c$ réels).

   $D = \ln 10 - \ln 12 + \ln 15$ $\quad$ $E = \ln 60 - \ln 75$ $\quad$ $F = \ln 18 + \ln 0,1$

Exercice VII

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \dfrac{(e^2)^3}{e^{-1}}$ $\quad$ $B = \dfrac{a^{1,5} \times a^{-2}}{a^{2,6}}$, $(a > 0)$ $\quad$ $C = (x^3y^5)^4 \times \dfrac{x^2}{y^5}$, $(x > 0, y > 0)$

$D = \dfrac{2^{n+1} \times 8^n}{4^{n-1}}$ $\quad$ $E = \dfrac{2^{n+1} \times 4^n}{2^{2n-2}}$ $\quad$ $F = \dfrac{(2 \times 3^2)^{2n}}{6^{n-1}}$ $\quad$ $G = \dfrac{10^{1,8}}{25^{2,6}} \times 4$

Exercice VIII

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur I :

f_1 : $f_1(x) = xe^x$ sur $D = \mathbb{R}$ $\quad$ f_2 : $f_2(x) = e^{-2x^2}$ sur $D = \mathbb{R}$

f_3 : $f_3(x) = \ln(5 - 3x)$ sur $D = \left]-\infty; \frac{5}{3}\right[$ $\quad$ f_4 : $f_4(x) = x\ln x - x$ sur $D =]0; +\infty[$

f_5 : $f_5(x) = \dfrac{x - \ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $\quad$ f_6 : $f_6(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ sur $]1; +\infty[$

f_7 : $f_7(x) = (x + 1)e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad$ f_8 : $f_8(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$

f_9 : $f_9(x) = (2x + 5)^{1/4}$ sur $\left]\frac{-5}{2}; +\infty\right[$ $\quad$ f_{10} : $f_{10}(x) = x^{1/3}(10 - 5x)^{2/3}$ sur $]0; 2[$

Exercice IX

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$(E_1)\ :\ \ln x = 5$ | $(E_2)\ :\ \ln(1-x) = 1$

$(E_3)\ :\ \ln\left(\dfrac{e}{x}\right) = -1$ | $(E_4)\ :\ (e^x - 7)(2e^x + 1) = 0$

$(E_5)\ :\ \dfrac{e^x + 1}{2e^x - 1} = 2$ | $(E_6)\ :\ (1+t)^3 = 0,008$

$(I_1)\ :\ 4 - e^x \geq 0$ | $(I_2)\ :\ \dfrac{e^x + 3}{2e^x - 1} > 0$

$(I_3)\ :\ e^{2x} + 4e^x - 5 \geq 0$ | $(I_4)\ :\ 4 - e^{1-2x} \leq 0$

$(E_7)\ :\ 6^t = 9 \times 10^t$ | $(E_8)\ :\ 2e^{5x} = 25$

Pour (E_7) et (E_8) vous donnerez une valeur approchées de la solution en utilisant les approximations suivantes : $\ln 2 \approx 0,7$, $\ln 3 \approx 1,1$ et $\ln 5 \approx 1,6$

Exercice X

Résoudre les équations suivantes (ne pas oublier de déterminer leur ensemble de validité) :

$(E_1)\ :\ \ln(x^2+1) = \ln 2 + \ln(8-x)$ | $(E_2)\ :\ \ln(x^2-1) + 2\ln 2 = \ln(4x-1)$

$(E_3)\ :\ \ln(x+3) + \ln(5-x) = \ln 15$ | $(E_4)\ :\ (\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

Exercice XI
D'après le Test 2 - Novembre 2013

1. Résoudre l'équation (E) ; $2x^2 - x - 6 = 0$
2. En déduire la résolution de $(E_1)\ :\ 2e^{2x} - e^x - 6 = 0$
   puis $(E_2)\ :\ \ln(x-1) + \ln 2x = \ln(6-x)$
3. Résoudre l'inéquation $(I)\ :\ 2e^{2x} - e^x - 6 > 0$

Les corrigés des tests & partiels sont téléchargeables ici :

https ://sites.google.com/site/jeromestephanucp/annales

UNIVERSITÉ DE CERGY — **Licence d'Économie finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion — **L1 - S1**

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

TEST 1 BLANC - Octobre 2015 - 1h 30 min

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1- 3 points

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, sur leur domaine de dérivabilité. Vous pouvez utiliser le tableau des dérivées page suivante.

1. $f_1 : f_1(x) = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{3}{2x}$ sur $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}_+^*$.
2. $f_2 : f_2(x) = -5x^3 + 4x^2 - x$ sur $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}$.
3. $f_3 : f_3(x) = \dfrac{3-5x}{2x-1}$ sur $\mathcal{D}_3 = \left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
4. $f_4 : f_4(x) = (x^2+4)^3$ sur $\mathcal{D}_4 = \mathbb{R}$.
5. $f_5 : f_5(x) = (x-6)\sqrt{x}$ sur $\mathcal{D}_5 = \mathbb{R}_+^*$.
6. $f_6 : f_6(x) = (2-3x)^{2/3}$ sur $\mathcal{D}_6 = \left]-\infty; \dfrac{3}{2}\right[$.

Exercice 2 - 7 points

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$$

La courbe représentative de f est donnée sur l'annexe page suivante.

1. Calculer la dérivée de f sur $\mathcal{D}_f$, et justifier que pour tout $x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$
2. Donner le tableau des variations de f (extrema demandés, limites NON demandées).
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point $\Omega(-2; -5)$. Tracer T sur l'annexe.
4. Déterminer l'approximation affine de f au voisinage de $x_0 = -2$.
5. Tracer sur l'annexe la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$. Vous donnerez des points à coordonnées entières de $\mathcal{D}$
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $(I) : f(x) \leq \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$
7. Vérifier votre résultat par un calcul.

Exercice 3 - Q.C.M - 10 points

Ce Q.C.M. comporte 10 questions. Pour chacune d'entre elles, une seule proposition est juste : cocher **sur la grille de réponses de la couleur de votre énoncé** la case correspondante à l'aide d'un feutre **noir**. A chaque question, correspondent deux lignes de réponses : lorsque vous pensez que votre première réponse est fausse, vous pouvez utiliser la seconde ligne pour corriger votre première réponse.

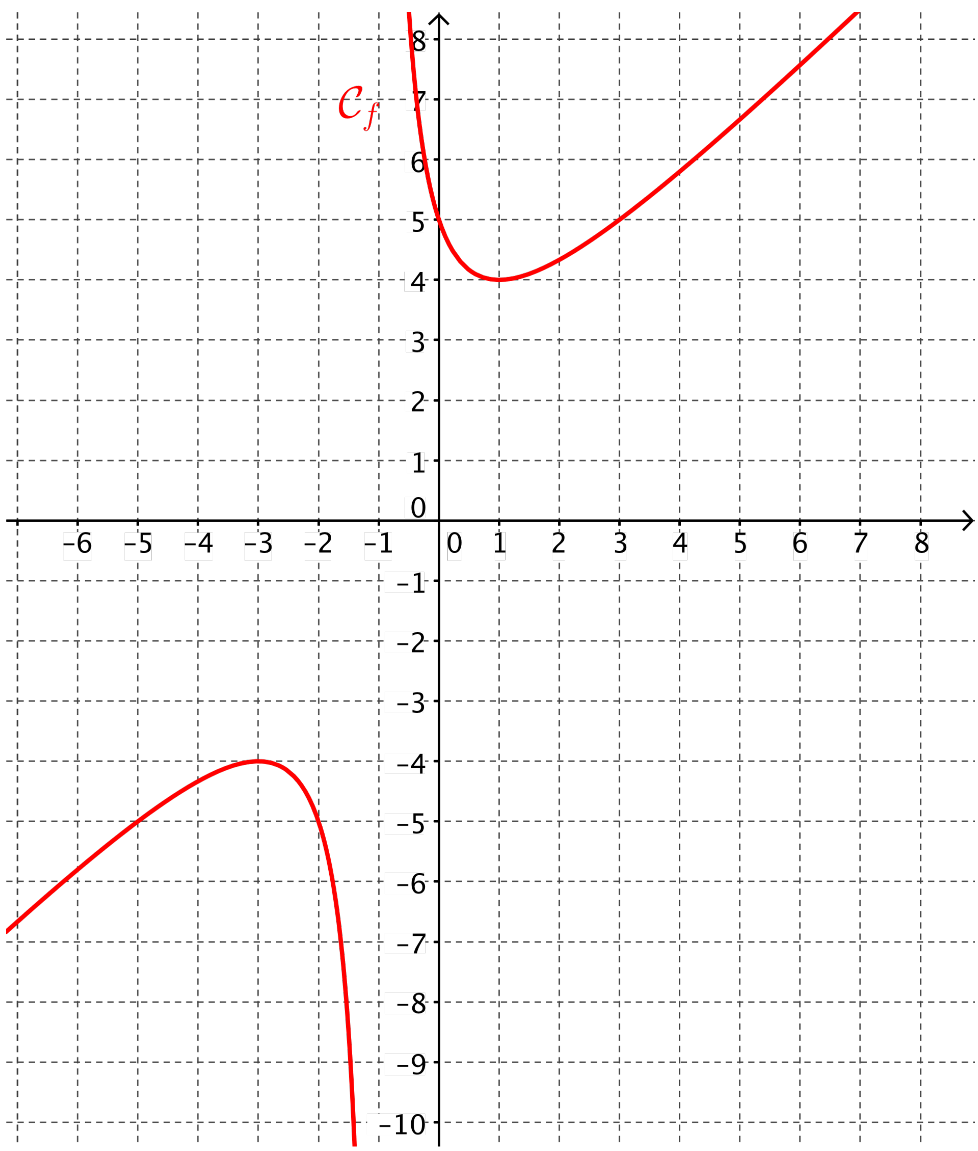
Attention au barème : 1 point par réponse juste, mais $-0,5$ par réponse fausse. L'absence de réponse, ou lorsque toutes les cases d'une question sont cochées est notée 0. En cas de total négatif, la note finale est ramenée à 0/10.

$f\ :\ f(x) = \dots$	$f'(x) = \dots$	Ensemble de validité
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \in \mathbb{Z}^*)$	nx^{n-1}	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0;+\infty[$

Fonction	Dérivée	Condition
$f+g$	$f'+g'$	
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$	
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$\forall x \in I, g(x) \neq 0$
$f^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha f' \times f^{\alpha-1}$	$\forall x \in I, f(x) > 0$

NOM - Numéro d'étudiant - groupe de TD :

ANNEXE à L'EXERCICE 2 : à rendre avec votre copie



SUJET BLANC

Question 1

Soit $A = \frac{5}{18} - \frac{7}{24}$. Après simplification, A est égal à :

A. $A = \frac{-1}{18}$

B. $A = \frac{-1}{36}$

C. $A = \frac{-1}{72}$

D. $A = \frac{-3}{144}$

Question 2

Soit $A = \frac{5.10^5}{0,4.10^3}$. Après simplification, A est égal à :

A. $A = 12\,500$

B. $A = 1\,250$

C. $A = 125$

D. $A = 12,5$

Question 3

Soit $X = \frac{a^{-1} \times (a^{-2}b^3)^{-2}}{(a^{-3}b)^2}$. Après simplification, X est égal à :

A. $X = a^{-3}b^{-8}$

B. $X = a^{-3}b^{-4}$

C. $X = a^9b^{-8}$

D. $X = a^9b^{-4}$

Question 4

Soit $X = \frac{\sqrt{54}}{12^{2/3}}$. Après simplification, X est égal à :

A. $X = 2^{-5/6}3^{-1/6}$

B. $X = 2^{-5/6}3^{5/6}$

C. $X = 2^{11/6}3^{-1/6}$

D. $X = 2^{11/6}3^{5/6}$

Question 5

Soit $X = \sqrt{12} - \sqrt{75} + 3\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) + \sqrt{3}$. Après simplification, X est égal à :

A. $X = 9 - 3\sqrt{3}$

B. $X = -2\sqrt{3}$

C. $X = 3 - 3\sqrt{3}$

D. $X = 9 - 5\sqrt{3}$

Question 6

On considère la fonction affine f définie par : $f(x) = \frac{2x-5}{3}$. La droite représentative de f passe par le point M de coordonnées :

A. $M(2; -5)$

B. $M(0; -5)$

C. $M(3; 1)$

D. $M(-2; -3)$

Question 7

On considère la fonction affine f définie par : $f(x) = \frac{x}{3} - 5$. Un vecteur directeur de la droite représentative de f est $\vec{u}$:

A. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

B. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -5 \end{pmatrix}$

C. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

D. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Question 8

Soient f la fonction affine vérifiant $f(2010) = -10$ et $f(2013) = 20$, alors l'expression de $f(x)$ est :

A. $f(x) = -10x + 20\,090$

B. $f(x) = 10x - 20\,110$

C. $f(x) = 0,1x - 211$

D. $f(x) = -0,1x + 191$

Question 9

Le système $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

A. a une unique solution $(2; -1)$

B. a une unique solution $(1; -3)$

C. a une unique solution $(3; 1)$

D. a une infinité de solutions

Question 10

L'ensemble solution de l'inéquation (I) : $\frac{1}{x} \geq x$ est :

A. $\mathcal{S} = [-1; 1]$

B. $\mathcal{S} = [-1; 0[\cup[1; +\infty[$

C. $\mathcal{S} =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

D. $\mathcal{S} =]-\infty, -1]\cup]0; 1]$

UNIVERSITÉ DE CERGY | **Licence d'Économie Finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion | **L1 - S1**

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

TEST 2 - Novembre 2015 - 1h 30 min

CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 4 points

1. Donner les éléments caractéristiques (nature, axe de symétrie, sommet, intersections avec les axes) de la courbe $\mathcal{P}$ d'équation $y = -x^2 + 2x + 3$.
   Tracer soigneusement $\mathcal{P}$ sur le repère joint en annexe 1.
2. Tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3x + 3$.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $(I)\ :\ -x^2 + 2x + 3 \geq 3x + 3$ (Rédigez !).
4. Retrouver votre résultat par un calcul.

Exercice 2 - 4 points

On considère le polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 - 2X + 4$

1. Déterminer une racine de $P(X)$ dans l'ensemble $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$. En déduire que $P(X)$ est divisible par un polynôme de degré 1 que vous préciserez.
2. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par le polynôme $D(X) = X - 1$.
3. En déduire la factorisation de $P(X)$ en un produit de facteurs de degré 1.
4. Résoudre l'inéquation $P(X) < 0$.

Exercice 3 - 7 points

1. • **2 points** Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies et dérivables sur D (voir tableaux des dérivées page suivante) :

   • $f_1\ :\ f_1(x) = \dfrac{5-2x}{3} - \dfrac{3}{5-2x}$ sur $D = \left]\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$ • $f_2\ :\ f_2(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x}$ sur $D = \mathbb{R}_+^*$

2. • **3 points** Soient f et g définie par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$
   (a) Préciser le domaine de définition de f, puis celui de g.
   (b) Donner l'expression de $h(x)$ et $\ell(x)$ où $h = g \circ f$ et $\ell = f \circ g$. Vous préciserez les domaines de définition respectifs de h et ℓ.
   (c) Déterminer les fonctions dérivées de h et ℓ.

3. • **2 points** Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x \ln x$. Déterminer la fonction dérivée de f, puis les variations de f sur son domaine. (valeur exacte de l'extremum demandée, limites NON demandées)

Exercice 4 - 5 points

1. Résoudre l'équation $(E_0)\ :\ x^2 - x - 6 = 0$, et l'inéquation $(I_0)\ :\ x^2 - x - 6 > 0$
   En déduire la résolution de $(I_1)\ :\ e^{2x} - e^x - 6 > 0$ puis $(I_2)\ :\ 2\ln x > \ln(x+6)$.

2. On donnera une valeur approchée de la solution de (E_1) en prenant comme valeurs : $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$:
$$(E_1)\ :\ 8^t = 12 \times 3^t$$

$f \ : \ f(x) = ...$	$f'(x) = ...$	Ensemble de validité
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{Z}^*)$	nx^{n-1}	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0;+\infty[$
$a^x \ (a \in \mathbb{R}_+^*)$	$(\ln a)a^x$	$]0;+\infty[$

Fonction	Dérivée	Condition
$f+g$	$f'+g'$	
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$	
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$\forall x \in I, g(x) \neq 0$
$f^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$nf' \times f^{n-1}$	
$\ln f$	$\dfrac{f'}{f}$	$\forall x \in I, f(x) > 0$
$\exp(f)$	$f' \times \exp(f)$	

NOM - Numéro d'étudiant - groupe de TD :

ANNEXE à L'EXERCICE 1 : à rendre avec votre copie