UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2016-2017**

U.F.R. Économie & Gestion
Licence d'Économie Finance et Gestion

MATH 101 : Pratique des Fonctions numériques

Notes de cours : Chapitre III : Limites - Continuité

1 Une introduction

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. On s'intéresse dans un premier temps aux valeurs prises par f lorsque x est de plus en plus grand. On obtient alors par exemple ce tableau de valeurs (arrondies) à l'aide de la calculatrice :

x	10	20	100	500	1000	10^5
$f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$	$2,56$	$2,26$	$2,05$	$2,01$	$2,005$	$2,0001$

On constate que plus x est grand, plus $f(x)$ est proche de 2. On dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à 2. On notera $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x-1} = 2$

Reprenons cette fonction f et observons ce qu'il se passe lorsque x prend des valeurs négatives :

x	-10	-20	-100	-500	-1000	-10^5
$f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$	$1,55$	$1,76$	$1,95$	$1,99$	$1,995$	≈ 2

De même, on dira que la limite de f en $-\infty$ est égale à 2, et on notera : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+3}{x-1} = 2$

Toujours avec la fonction f, on s'intéresse à présent aux valeurs prises par f lorsque x se rapproche de la valeur interdite $x_0 = 1$:

x	0	$0,5$	$0,9$	$0,999$	$0,9999$	1	$1,0001$	$1,001$	$1,1$	$1,5$	2
$f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$	-3	-8	$,48$	$-4\,998$	$-49\,998$		$50\,002$	$5\,002$	52	12	7

On constate que selon le côté dont on s'approche de la valeur interdite, les valeurs de $f(x)$ ne sont pas du tout les mêmes : si x se rapproche de 1 « par la gauche, ou par valeurs inférieures/négatives », les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus grandes en valeur absolue mais négatives : elles se rapprochent donc de $-\infty$; si x se rapproche de 1 « par la droite, ou par valeurs supérieures/positives », les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus grandes en valeur absolue et positives : elles se rapprochent donc de $+\infty$. On dit alors que la fonction f n'admet pas de limite en 1.

Mais, on pourra dire que la limite « de f à gauche de 1 est $-\infty$ » et que « la limite de f à droite de 1 est $+\infty$ » ;

On note : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{2x+3}{x-1} = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x+3}{x-1} = -\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{2x+3}{x-1} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x+3}{x-1} = +\infty$

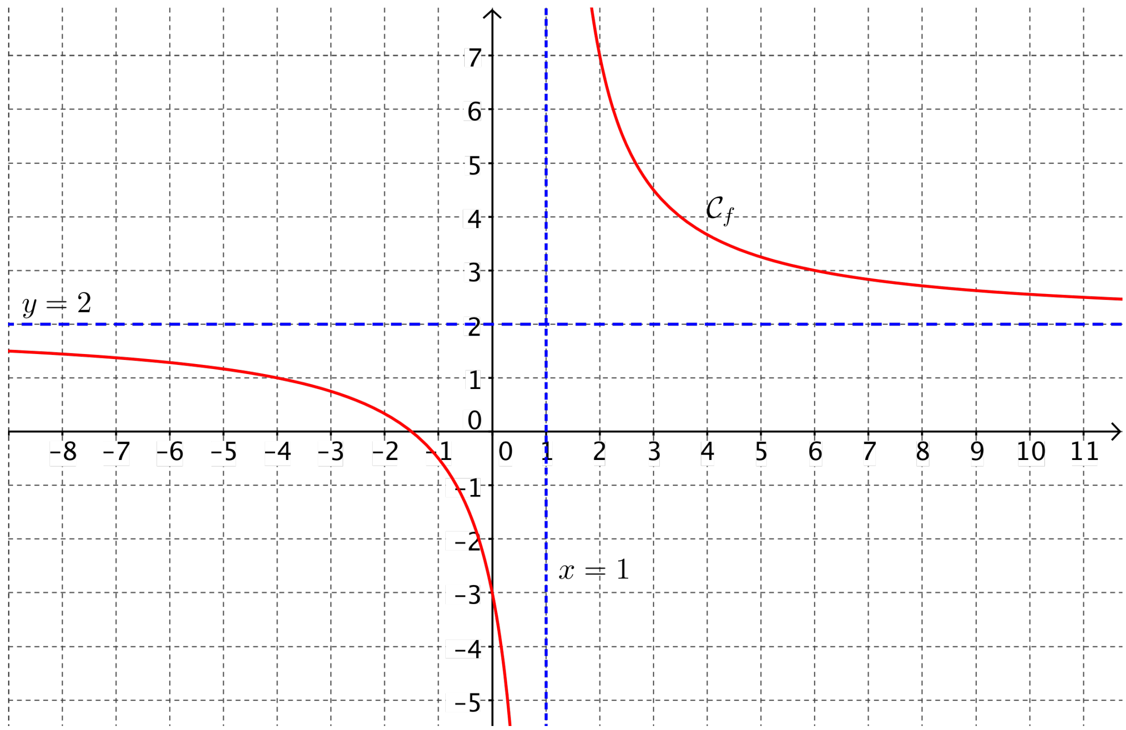


FIGURE 1 – courbe de la fonction f : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

Exemples 1. De la même manière, à l'aide d'un tableau de valeurs (calculatrice ou tableur) donner :

1. la limite de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{5x-7}{3x+1}$ en $+\infty$ puis en $-\infty$
2. la limite de la fonction $f : x \mapsto e^{-2x+1}$ en $+\infty$ puis en $-\infty$

2 Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

2.1 Limite infinie en l'infini

Définition 1. *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (ou que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$) si :*

1. *l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.*
2. *tout intervalle du type $[A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.*
   On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

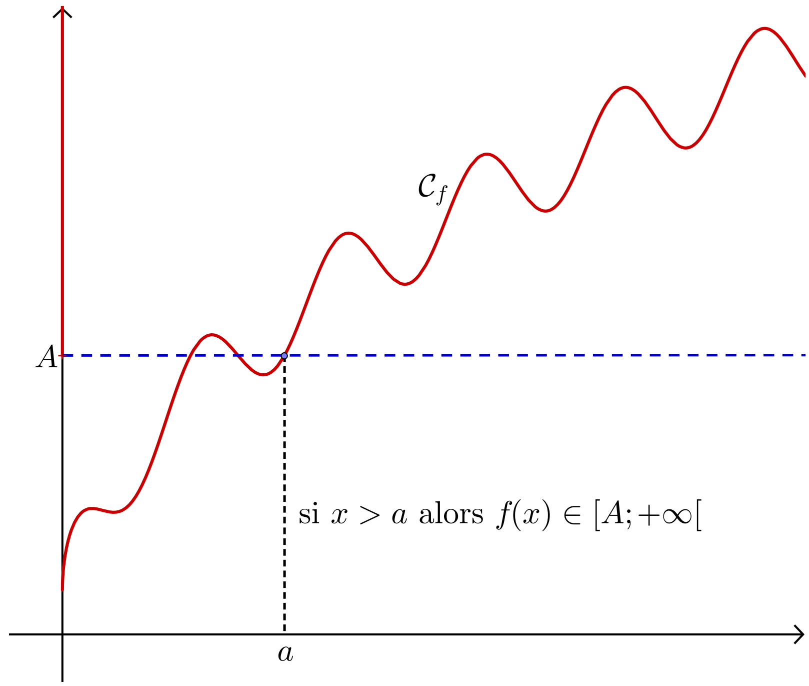


FIGURE 2 – courbe d'une fonction de limite $+\infty$ en $+\infty$

Exemples 2. de référence :

Chacune des fonctions suivantes a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$:
$x \mapsto \sqrt{x}\,;\quad x \mapsto mx+p$ si $m>0\,;\quad x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}^*\,;\quad x \mapsto \ln x\,;\quad x \mapsto e^x$
$x \mapsto a^x$ si $a>1\,;\quad x \mapsto x^\alpha$ si $\alpha > 0$.

Exemples 3. Donner par analogie la définition : (Illustrer chacun des cas !)
- d'une fonction qui a pour limite $-\infty$ en $+\infty$
- d'une fonction qui a pour limite $-\infty$ en $-\infty$
- d'une fonction qui a pour limite $+\infty$ en $-\infty$

2.2 Limite finie en l'infini

Définition 2. *On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ (ou que f a pour limite ℓ en $+\infty$) si :*

1. *l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche de ℓ que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.*
2. *quand tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.*

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Exemples 4. de référence :

Chacune des fonctions suivantes a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$:
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,;\quad x \mapsto \dfrac{1}{x}\,;\quad x \mapsto \dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*\,;\quad x \mapsto x^\alpha$ si $\alpha < 0\,;\quad x \mapsto a^x$ si $0 < a < 1$.

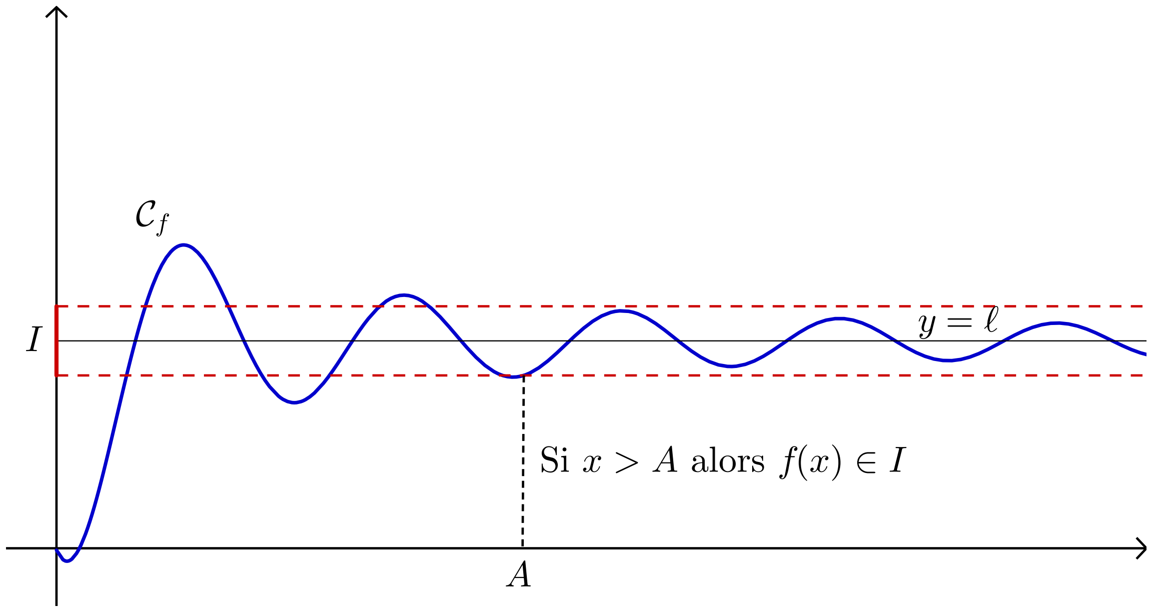


FIGURE 3 – courbe d'une fonction de limite ℓ en $+\infty$

3 Limite d'une fonction en un réel x_0

Soit x_0 un réel et f une fonction définie sur un intervalle ouvert I_{x_0} contenant x_0 ou sur un intervalle de borne x_0 du type $]x_0;\gamma[$ ou $]\gamma;x_0[$.

3.1 Limite infinie en x_0

Définition 3. *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0 (ou que f a pour limite $+\infty$ en x_0)*

1. *si l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de x_0.*
2. *quand tout intervalle du type $[A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de x_0.*

On note : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Exemple 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$. (ici $x_0 = 0$)

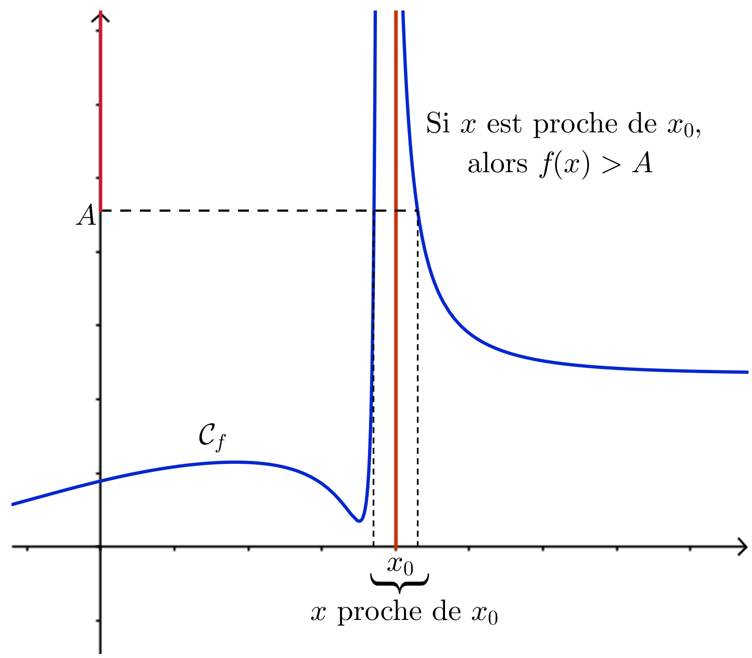


FIGURE 4 – courbe d'une fonction de limite $+\infty$ en $x = x_0$

3.2 Limite finie en x_0

Définition 4. *Soit ℓ un réel : on dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 (ou que f a pour limite l en x_0) si*

1. *si l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche de ℓ que l'on veut pourvu que $x \in I_{x_0}$ soit suffisamment proche de x_0.*
2. *quand tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x \in I_{x_0}$ suffisamment proche de x_0.*

Remarque : Une fonction peut posséder une limite en x_0, même si elle n'est pas définie en x_0. Cependant, si f admet une limite en x_0 ET si f est définie en x_0, alors, on a nécessairement : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (voir paragraphe « continuité »).

Théorème 1. *(Admis) Si f admet une limite en x_0 (réel ou infini), alors cette limite est unique.*

Théorème 2. *Soir f une fonction qui est la somme, le produit, le quotient ou la composée (voir plus loin) des fonctions de référence suivantes :*

- *des fonctions polynômes.*
- *de la fonction « valeur absolue ».*
- *de la fonction « racine carrée ».*
- *de la fonction « logarithme népérien ».*
- *des fonctions exponentielles de base $a > 0$.*
- *des fonctions puissances.*

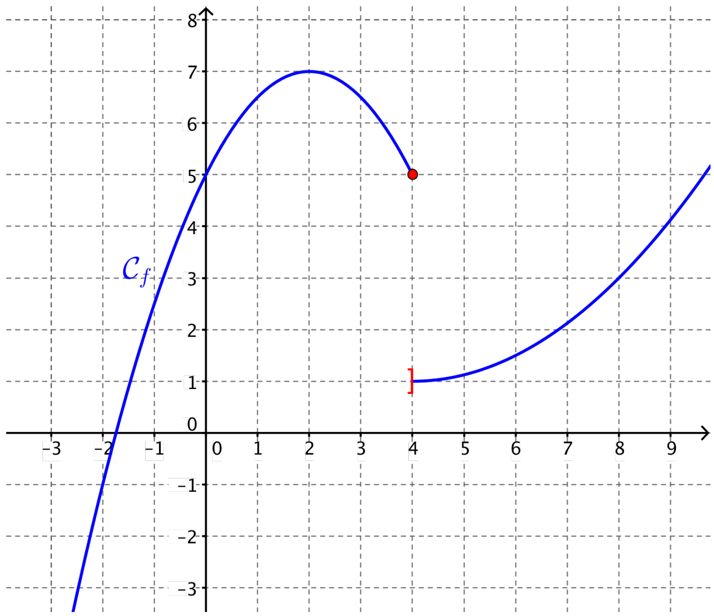
Si f est définie en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, alors f admet une limite en x_0 et cette limite est $f(x_0)$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemples 6. 1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 1}{\sqrt{2x^2 - 4x - 2}} = 1$ 2. $\lim\limits_{x \to 4} \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2-7}}\right) = 0$

3.3 Limite à droite / à gauche

Exemple 7. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{2} + 2x + 5 & \text{si } x \leq 4 \\ \dfrac{x^2}{8} - x + 3 & \text{sinon} \end{cases}$

La courbe représentative de f est représentée ci-dessous : observons ce qu'il se passe en $x_0 = 4$



Lorsque x tend vers 4, f n'a pas le même comportement si x tend vers 4 par valeurs inférieures (ou par la gauche), ou si x tend vers 4 par valeurs supérieures (ou par la droite) : on notera alors :

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} f(x) = 5 \text{ et } \lim_{\substack{x \to 4 \\ x>4}} f(x) = 1$$

Etude de la limite en $x_0 = 4$:

Peut-on avoir $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 5$? Non car si $x > 4$, $f(x)$ ne peut être aussi proche que l'on veut de 5.
Peut-on avoir $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 1$? non car si $x < 4$, $f(x)$ ne peut être aussi proche que l'on veut de 1.
Enfin aucune autre valeur réelle ne peut être la limite de la fonction f en $x_0 = 4$.
f n'a donc pas de limite en $x_0 = 4$.

Ainsi, pour certaines fonctions définies par « intervalles », on devra distinguer l'étude de la limite à droite de l'étude de la limite à gauche aux points où f change d'expression.

Définition 5. ***ATTENTION !*** *ici, l'étude des limites se fait sur des intervalles ouverts dont une borne est x_0 :*

1. *Soit f une fonction définie à gauche de x_0 (i.e. sur un intervalle du type $]x_0 - \gamma; x_0[\subset \mathcal{D}_f$ avec $\gamma > 0$). On dit que f a pour limite ℓ à gauche de x_0 lorsque la restriction de f à $]x_0 - \gamma; x_0[$ admet ℓ pour limite, c'est-à-dire quand tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de x_0* ***et*** *$x < x_0$.*

   On note : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \ell$.

2. *Soit f une fonction définie à droite de x_0 (i.e. sur un intervalle du type $]x_0; x_0+\gamma[\subset \mathcal{D}_f$ avec $\gamma > 0$). On dit que f a pour limite ℓ à droite de x_0 lorsque la restriction de f à $]x_0; x_0+\gamma[$ admet ℓ pour limite, c'est-à-dire quand tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de x_0* ***et*** *$x > x_0$.*

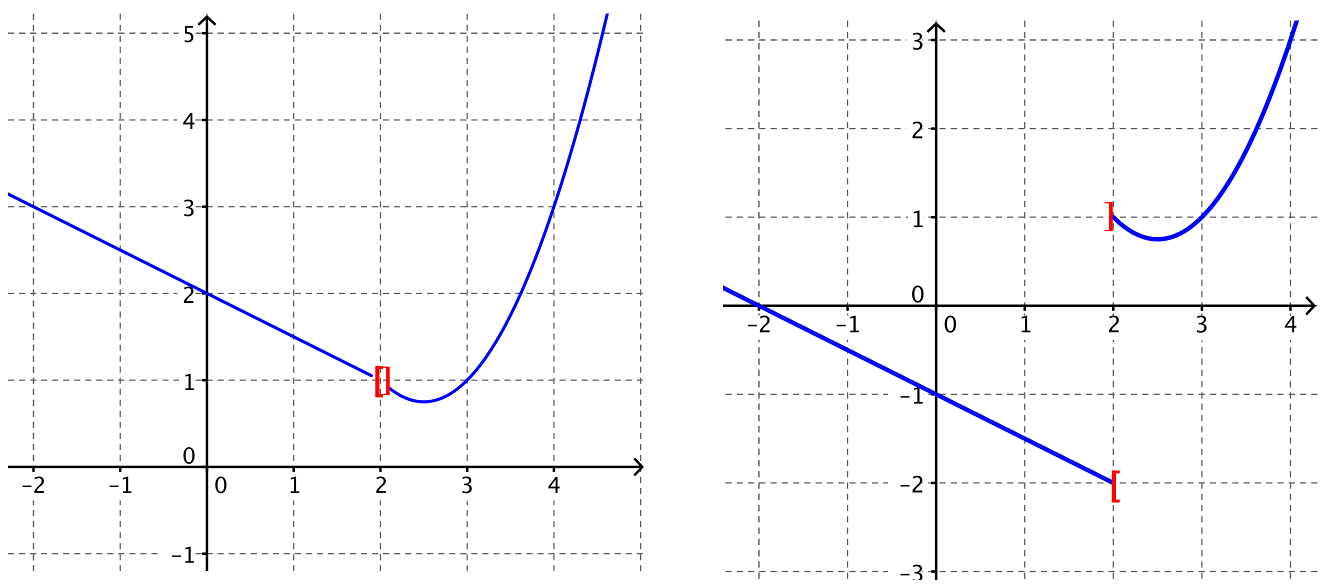
   On note : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \ell$.

Théorème 3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert* ***épointé*** *de x_0, noté $I_{x_0}^*$ (i.e. f n'est pas définie en x_0). On a l'équivalence*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \ell = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$$

Exemple 8. $\lim\limits_{x\to 0} -1/x^2 = -\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{-1}{x^2} = -\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{-1}{x^2} = -\infty$;

Conséquence : Si une fonction possède en x_0 une limite à droite et une limite à gauche **différentes**, alors f n'a pas de limite en x_0.



FIGURES 6 & 7 - Cas N°1 et N°2 :

Dans le cas N°1 : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = 1 = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$. f a pour limite $\ell = 1$ en $x_0 = 2$

Dans le cas N°2 : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = 1$. f n'a pas de limite en $x_0 = 2$

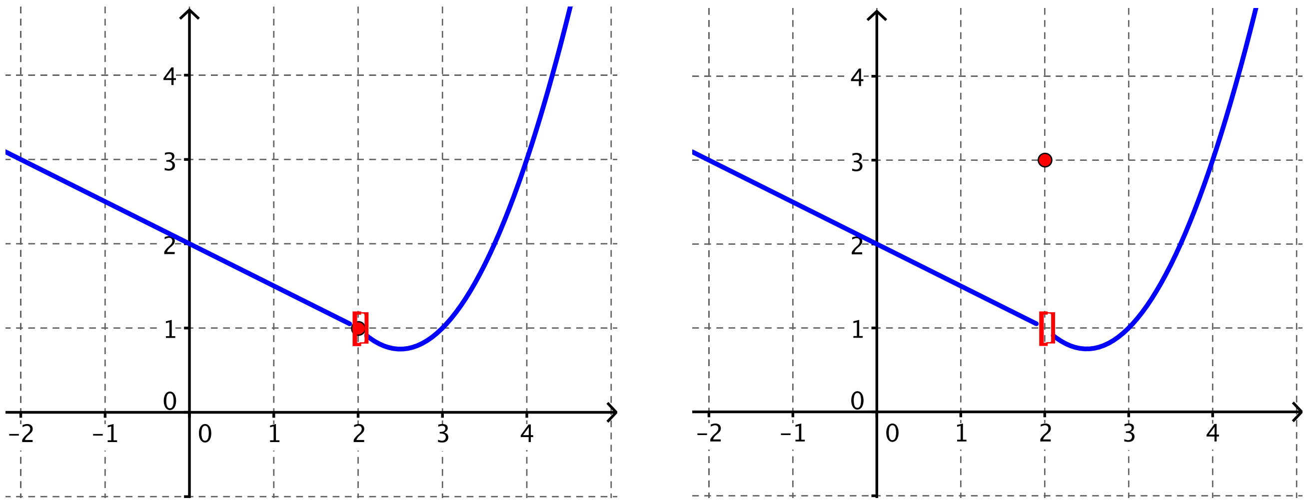
Remarque : Soit ℓ un nombre réel. Supposons que f soit définie sur un intervalle ouvert I_{x_0} contenant x_0. On a l'équivalence :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0) = \ell$$

Exemple 9. Justifier que la fonction f suivante admet une limite en $x_0 = 2$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & x^2-1 & \text{si } x \in]-\infty; 2[\\ f(2) & = & 3 & \\ f(x) & = & \sqrt{4x+1} & \text{si } x \in]2; +\infty[\end{array}\right.$$

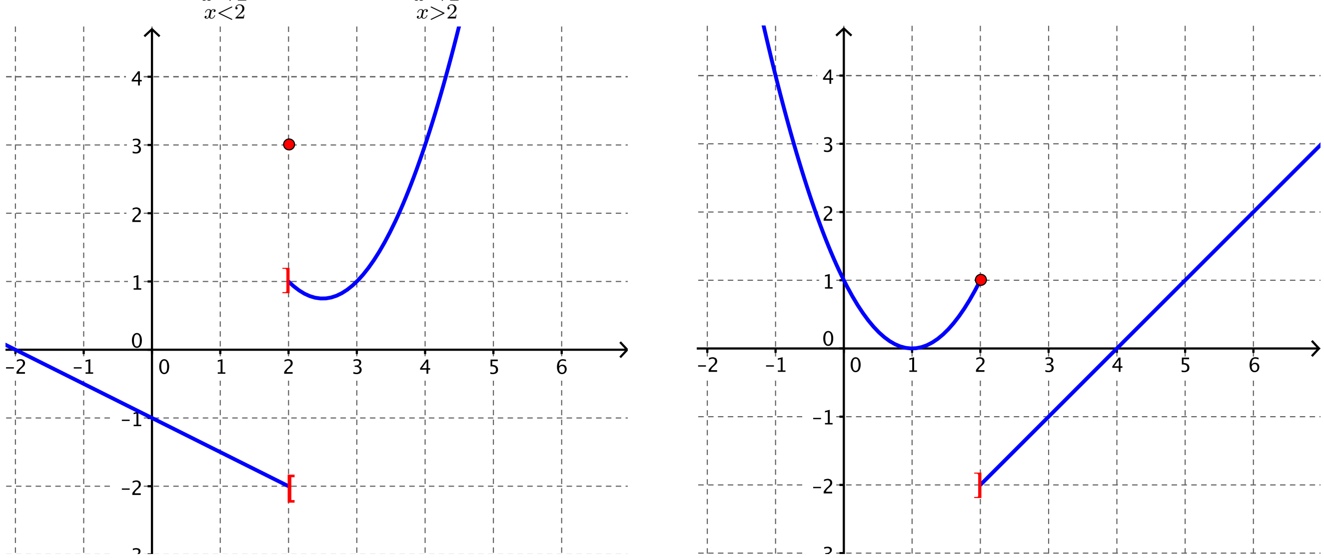
A contrario, si f ne vérifie pas la double égalité $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$, alors f ne possède pas de limite en x_0



FIGURES 8 & 9 - Cas N°3 et N°4 :

Dans le cas N°3 : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = 1 = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = f(2)$. f a pour limite $\ell = 1$ en $x_0 = 2$

Dans le cas N°4 : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = 1 = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x)$ et $f(2) = 3$. f n'a pas de limite en $x_0 = 2$



FIGURES 10 & 11 - Cas N°5 et N°6 :

Dans le cas N°5 : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = 1$ et $f(2) = 3$. f n'a pas de limite en $x_0 = 2$

Dans le cas N°6 : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = 1 = f(2)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = -2$. f n'a pas de limite en $x_0 = 2$

4 Opérations sur les limites

Limite de la somme de deux fonctions

$\lim\limits_{x_0} f+g$		$\lim\limits_{x_0} f$		
		$+\infty$	$-\infty$	ℓ
$\lim\limits_{x_0} g$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$
	$-\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$
	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\ell+\ell'$

Limite du produit de deux fonctions

$\lim\limits_{x_0} f \times g$		$\lim\limits_{x_0} f$				
		0	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x_0} g$	0	0	0	0	F.I.	F.I.
	$\ell' > 0$	0	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
	$\ell' < 0$	0	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$
	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limite du quotient de deux fonctions

$\lim\limits_{x_0} \dfrac{f}{g}$		$\lim\limits_{x_0} f$				
		0	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x_0} g$	0	F.I.	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
	$\ell' > 0$	0	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$
	$\ell' < 0$	0	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$
	$+\infty$	0	0	0	F.I.	F.I.
	$-\infty$	0	0	0	F.I.	F.I.

Le symbole « F.I. » signifie « forme indéterminée », c'est-à-dire que l'on ne peut pas connaître *a priori* la limite.

Le symbole $\pm\infty$ signifie que l'on doit connaître le signe de $g(x)$ au voisinage de zéro pour pouvoir conclure.

Exemple 10.

1. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x+1}{x^2-2x-3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x+1}{x^2-2x-3} = -\infty$ (à rédiger)

Théorème 4. *1. La limite en l'infini d'une fonction polynôme est celle de son monôme de plus haut degré.*

2. La limite en l'infini d'une fonction rationnelle (i.e. quotient de deux polynômes) est celle du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples 11. 1. $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^4+3x^2-5x+7 = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^4 = -\infty$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{-4x^4+x^3-x^2+x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{-4x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{-2x} = 0.$

Théorème 5. ***Limite par encadrement - Théorème des gendarmes***

Dans cet énoncé x_0 et ℓ désignent un réel ou $+$ ou $-\infty$.

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage I_{x_0} de x_0 et vérifiant en outre :

$\forall x \in I_{x_0}, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell$ *Alors* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

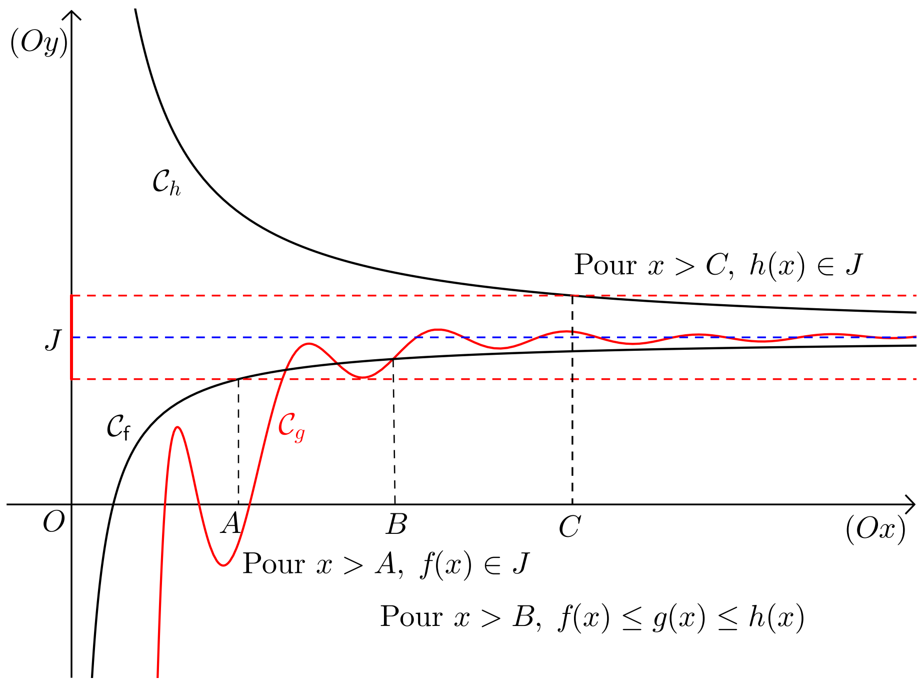


Figure 12 – Illustration du théorème des gendarmes

Exemple 12. Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$.

1. Pour tout $x \geq 1$, on a
   - D'une part : $\sqrt{x} \geq 0$ et $x^2+1 > 0$, donc $f(x) \geq 0$
   - D'autre part : $\sqrt{x} \leq x$, en effet $\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) \leq 0$ si $x \geq 1$ (car $\sqrt{x} \geq 1$)

   Conclusion : $\forall x \geq 1,\ 0 \leq f(x) \leq \dfrac{x}{x^2+1}$.
2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Théorème 6. *Composition de limites*

Dans cet énoncé, x_0, ℓ et L désignent des réels ou $\pm\infty$. Soient f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to \ell} g(x) = L$. Alors la fonction composée $h = g \circ f$ admet une limite en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$

Schéma :

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ x & \longmapsto & f(x) = y & \longmapsto & g(y) = (g\circ f)(x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_0 & & \ell & & L \end{array}$$

Exemples 13.

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x+1} = ?$

   $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc par composition, $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = ?$

   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$, donc par composition, $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+x-7}{x^2-2x+3}\right) = ?$

   $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x-7}{x^2-2x+3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$, donc par composition

   $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+x-7}{x^2-2x+3}\right) = \ln 1 = 0$

Théorème 7. ***Limites de taux d'accroissements***

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2} \qquad \forall \alpha \neq 0,\ \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

La démonstration de ce théorème sera faite dans le chapitre suivant.

Théorème 8. ***Limites par « croissances comparées »***

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0^- \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} xe^x = 0$$

Admis ■

Ces résultats se généralisent pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0^+ \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^\beta} = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} |x|^\beta e^x = 0$$

Exemple 14. Étudier la limite $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x - (\ln x)^2$.

5 Conséquences graphiques : Asymptote à une courbe

Définition 6. *Soit f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$. $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = \ell$ pour asymptote horizontale si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.*

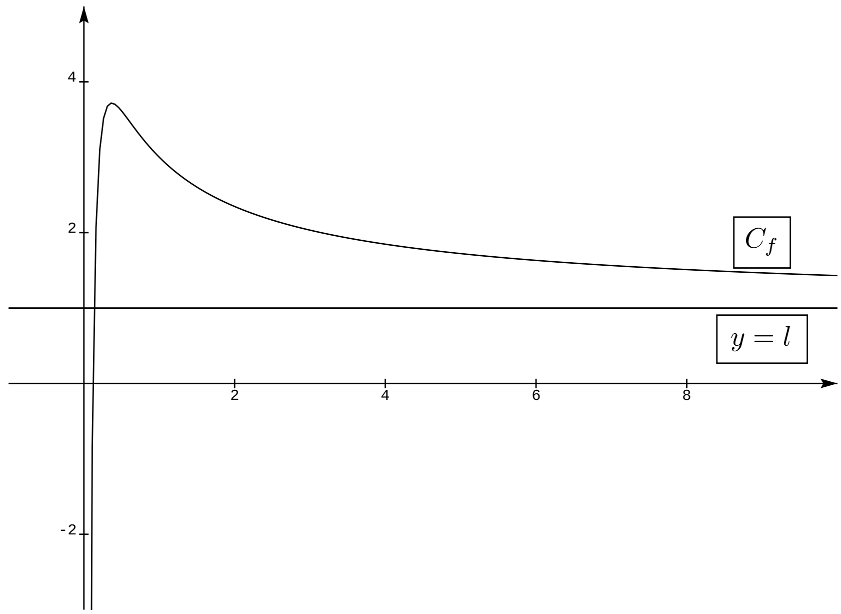


FIGURE 13 – Asymptote horizontale

Exemples 15.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. La droite d'équation $y = 0$ est A.H. à $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$. La droite d'équation $y = 1$ est A.H. à $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

Exemple 16. La population d'une ville moyenne a été modélisée par la formule suivante : $f(x) = 50 + 5(1 - e^{-0,2x})$ où x représente le rang de l'année à partir de $x = 0$ pour l'année 1990, et $f(x)$ représente la population de cette ville en milliers d'habitants. (Ainsi, en 1990, cette ville comportait 50000 habitants).

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$

   Pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = -5 \times (-0,2)e^{-0,2x} = e^{-0,2x} > 0$: f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

2. Justifier que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f possède une asymptote en $+\infty$. Donner une interprétation de votre résultat.

   La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 55$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$: en effet, pour tout $x \geq 0$, $f(x) - 55 = -5e^{-0,2x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0,2x} = 0$

   Cela signifie que la population de cette ville s'accroît et tend vers 55000 habitants.

Définition 7. *Soit f une fonction définie sur un voisinage de a. $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = a$ pour asymptote verticale si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.*

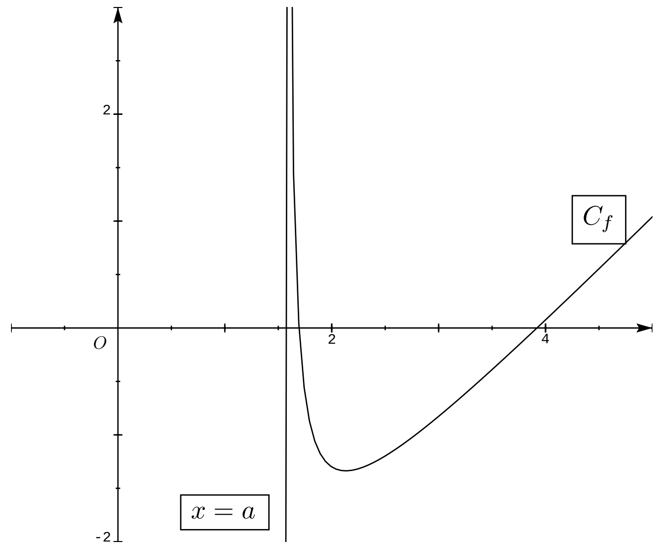


Figure 14 – Asymptote verticale

Exemples 17.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-2}$: la droite d'équation $x = 2$ est A.V. à $\mathcal{C}_f$
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{16-x^2}$: les droites d'équations $x = 4$ et $x = -4$ sont A.V. à $\mathcal{C}_f$

Définition 8. *Soit f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$. $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote oblique si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.*

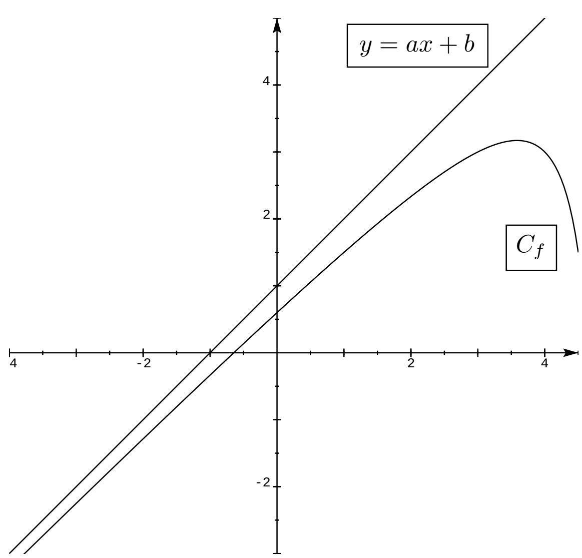


Figure 15 – Asymptote oblique

Exemples 18.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x+1}$. La droite d'équation $y = x - 1$ est A.O. à $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x}$. La droite d'équation $y = x$ est A.O. à $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

6 Continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel appartenant à I.

Théorème 9. *Si x_0 est un réel de I et si f admet une limite réelle en x_0, alors cette limite est nécessairement $f(x_0)$.*

Admis ■

Définition 9. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel appartenant à I. f est dite **continue en** x_0 si elle admet une limite réelle en x_0.*

Ce qui signifie que si x est proche de x_0 alors $f(x)$ reste proche de $f(x_0)$.

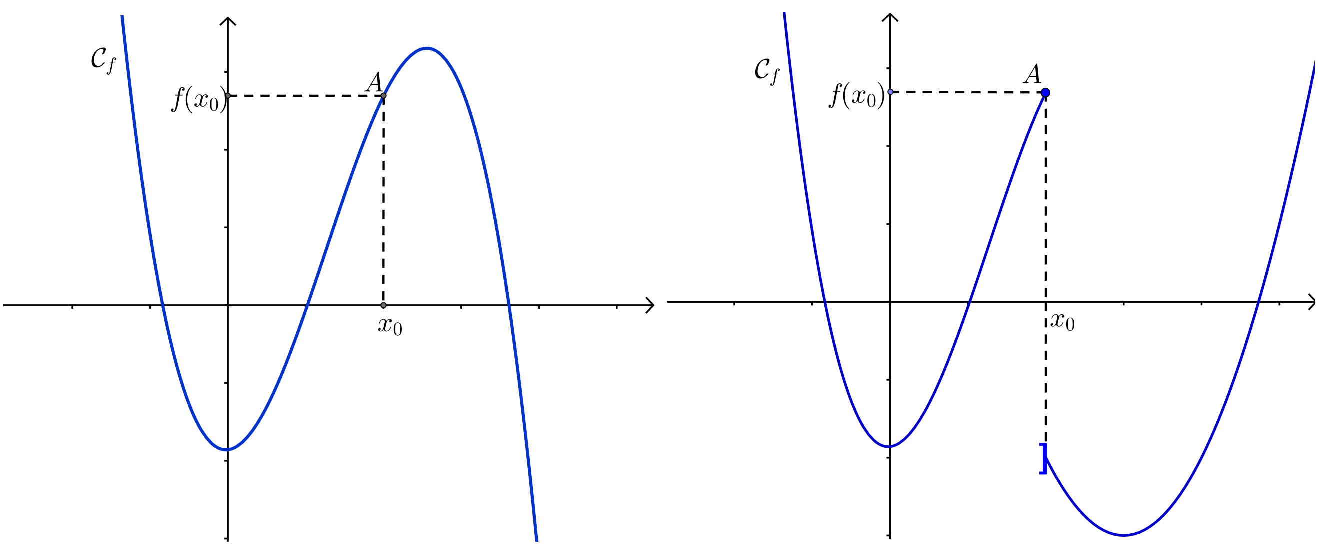


Figure 16 – Fonction continue / discontinue en x_0

Exemple 19. La fonction δ définie sur $\mathbb{R}$ par $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $\delta(0) = 1$ n'est pas continue en $x_0 = 0$.

Définition 10. *Si I est un intervalle **ouvert**, on dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel de I.*

En utilisant les limites à gauche et à droite de f on a le :

Théorème 10. *f est continue en x_0 si et seulement si :*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Remarque : Il est conseillé de revoir les figures 3.8 à 3.11 du paragraphe 3.

Exemples 20. Les fonctions suivantes sont-elles continues en x_0 ?

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1$ si $x < 0$ et $f(x) = x^2$ si $x \geq 0$. ($x_0 = 0$)
2. g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + x + 3$ si $x \leq 1$ et $g(x) = 5e^{x-1}$ si $x > 1$. ($x_0 = 1$).

Théorème 11. *On admet que les fonctions suivantes sont continues :*

1. *Les fonctions polynômes sont continues sur* $\mathbb{R}$.
2. *La fonction « valeur absolue » est continue sur* $\mathbb{R}$.
3. *La fonction « racine carrée » est continue sur* $\mathbb{R}^+$.
4. *Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.*
5. *La fonction « logarithme népérien » est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.
6. *Les fonctions exponentielles de base* $a > 0$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$.
7. *Les fonctions puissances sont continues sur* $\mathbb{R}_+^*$.

7 Prolongement par continuité

Définition 11. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I_{x_0}^*$, non définie en x_0 et admettant une limite réelle ℓ en x_0. On définit alors la fonction $\tilde{f}$ sur I_{x_0} par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$ et $\tilde{f}(x_0) = \ell$. $\tilde{f}$ est alors définie et continue sur I_{x_0} . On dit que $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en x_0.*

Exemples 21.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.
   On a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$, donc par composition, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. On peut prolonger f par continuité en 0 en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Soit g la fonction définie sur $]-1;0[\,\cup]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$.
   - Par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = +\infty$: on ne pourra pas prolonger g par continuité en -1.
   - On a admis au paragraphe 4. que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$,
   On peut prolonger g par continuité en 0 en posant

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in]-1;+\infty[\setminus\{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

8 Opérations sur les fonctions continues

Les théorèmes suivants sont admis :

Théorème 12. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et λ un réel.*
Si f et g sont continues en $x_0 \in I$, alors $f+g$, λf et $f.g$ sont continues en x_0.
Si f et g sont continues sur I, alors $f+g$, λf et $f.g$ sont continues sur I

Théorème 13. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.*
Si f est continue en x_0 et $f(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en x_0.
Si f est continue sur I et pour tout $x \in I$, $f(x) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f}$ est continue sur I.

Théorème 14. *Si f est continue en $x_0 \in I$ et strictement positive en x_0, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f^α est continue en x_0*
Si f est continue sur I et strictement positive sur I, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f^α est continue sur I

Théorème 15. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tels que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$ $(f(I) \subset J)$.*
Si f est continue en $x_0 \in I$ et g est continue en $y_0 = f(x_0)$ alors, la fonction composée $g \circ f$ est continue en x_0.
Si f est continue sur I et g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exemple 22.
La fonction $h : h(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}$ est continue sur $[-1;3]$.
En effet $h = g \circ f$ est la composée de la fonction polynôme $f \ : \ x \mapsto -x^2+2x+3$ suivie de la fonction $g \ : \ x \mapsto \sqrt{x}$.
Le discriminant de $f(x)$ est $\Delta = 16$; g possède deux racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$. Le signe de $f(x)$ est donc le suivant :

x	$-\infty$			-1		3			$+\infty$
$-x^2+x+3$			$-$	0	$+$	0	$-$		

La fonction f est continue et positive sur $[-1;3]$, et la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc la composée $h = g \circ f$ est continue sur $[-1;3]$

UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2016-2017**

U.F.R. Économie & Gestion
Licence d'Économie Finance et Gestion

MATH 101 : Pratique des Fonctions numériques

Notes de cours : Chapitre IV : Compléments

1 Schéma général d'étude d'une fonction

Lorsqu'on étudie une fonction, les différentes étapes sont généralement les suivantes (dans cet ordre la plupart du temps)

1. Détermination de l'ensemble de définition de f (noté $\mathcal{D}_f$), s'il n'est pas donné par l'énoncé.
2. Détermination des limites aux bords du domaine de définition : bien entendu il y a presque toujours $+\infty$ et $-\infty$, mais également à gauche et à droite des valeurs interdites : par exemple si f est définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 4x + 3}$, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1; 3\}$, et il y a 6 limites à étudier.
3. Éventuellement asymptotes à la courbe de f.

   Se rappeler que toute limite infinie en un réel x_0 (qui est généralement une valeur interdite) implique une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

   Lorsque l'on a déterminé une asymptote oblique Δ (d'équation $y = ax + b$) à $\mathcal{C}_f$ on cherche les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et Δ en étudiant le signe de la différence $f(x) - (ax + b)$.
4. Calcul de la fonction dérivée de f, signe de cette dérivée (factorisation souvent nécessaire) afin de donner le tableau des variations de f : c'est l'occasion de vérifier que les limites déterminées précédemment sont cohérentes avec les variations de f.
5. Tracé de la courbe. On commence toujours par tracer les asymptotes.

Exemple 23. Extrait du partiel de Janvier 2015

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$.
2. Effectuer la division euclidienne de $N(x) = x^2 + 3$ par $D(x) = x - 1$. En déduire qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$.
3. Déterminer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$ et en 1. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?

4. Démontrer que la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.
5. Déterminer les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et D.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$. En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
7. Tracer avec soin $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

2 Complément sur la continuité - Théorème des valeurs intermédiaires

On admet le théorème dit « des valeurs intermédiaires »

Théorème 16. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$. Soit β un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Il existe au moins un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \beta$.*

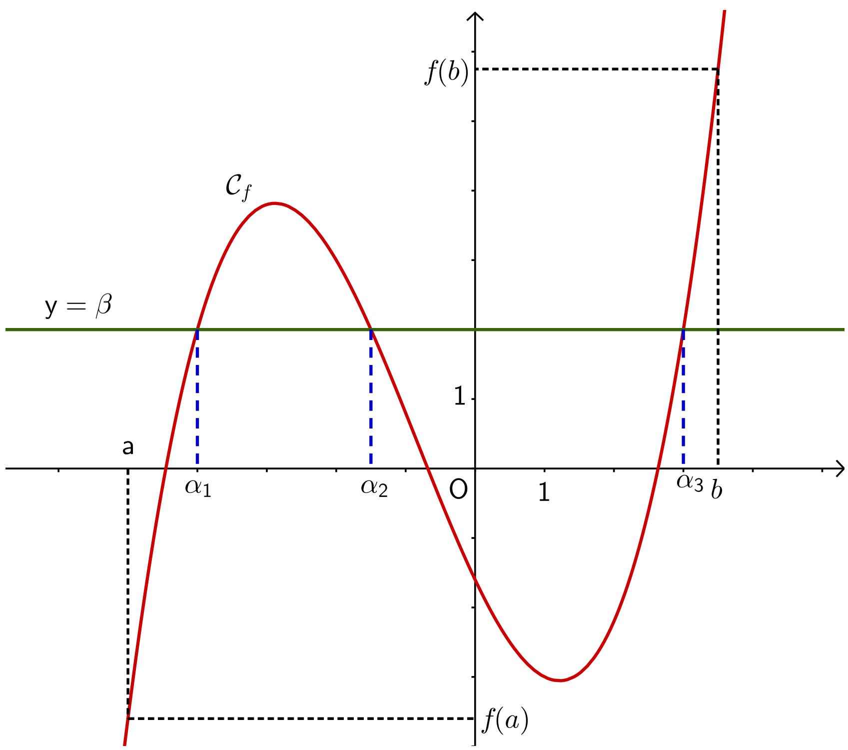


Figure 17 – Théorème des valeurs intermédiaires

Une autre formulation du théorème précédent est :

Théorème 17. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle*

Cas particulier : $\beta = 0$

Théorème 18. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$ telle que $f(a).f(b) < 0$, alors il existe au moins un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

Cas Particulier : Cas d'une fonction strictement monotone

Théorème 19. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$ et strictement monotone sur $[a, b]$. Soit β un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Il existe exactement un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \beta$.*

Exemple 24. D'après le partiel de Janvier 2016

Partie A On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = x + 1 + \ln x$$

1. Déterminer les limites de g aux bords de son domaine de définition.
2. Calculer la dérivée de g sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire les variations de g sur son domaine (faire un tableau, limites incluses).
3. Démontrer que l'équation $(E)\ :\ g(x) = 0$, admet une unique solution α.

   On donne le tableau de valeurs suivant de la fonction « logarithme népérien ». Préciser un intervalle d'amplitude $0,1$ contenant α.

x	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$	1
$\ln x$	$-2,3$	$-1,6$	$-1,2$	$-0,9$	$-0,7$	$-0,5$	$-0,4$	$-0,2$	$-0,1$	0

4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de g.

Partie B On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(0) = 0 \ \text{ et } f(x) = \frac{x \ln x}{x + 1} \ \text{ si } x > 0$$

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer la dérivée de f sur $]0; +\infty[$ et justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. En déduire les variations de f sur son domaine.
4. Démontrer que $f(\alpha) = -\alpha$, puis en déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $0,1$.

3 Complément sur la dérivabilité d'une fonction

Définition 12. ***Rappel :*** *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel appartenant à I. f est dite* ***dérivable en*** *x_0 si $\Delta f_{(x,x_0)} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite réelle (= finie) ℓ lorsque x tend vers x_0.*
Dans ce cas, cette limite est notée $f'(x_0)$ et est appelée ***nombre dérivé*** *de f en x_0*

• **Application à la détermination de limites :** On rappelle les limites admises au chapitre III

Théorème 5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ $\qquad\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2} \qquad \forall \alpha \neq 0,\ \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Preuve :

1. Notons f : $f(x) = \ln(x+1)$. f est dérivable sur $]-1; +\infty[$, et pour tout $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, donc en particulier en $x_0 = 0$, on a $f'(0) = 1$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$.

On peut aussi écrire cette limite : $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$

2. Même démarche avec la fonction g : $g(x) = e^x$.

4. Même démarche avec la fonction h : $h(x) = (1+x)^\alpha$ (où $\alpha \neq 0$).

3. est le cas particulier $\alpha = \dfrac{1}{2}$ de 4. ■

Définition 13. *Soit f une fonction définie sur I_{x_0}. Si le taux d'accroissement de f a une limite finie à droite (respectivement à gauche) en x_0, f est dite dérivable à droite (respect. à gauche) de x_0.*

On note $f'_d(x_0) = \displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et $f'_g(x_0) = \displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

⚠ Une fonction peut très bien être dérivable à droite **et** à gauche en x_0 mais ne pas être dérivable en x_0. (Voir la figure ci-dessous : $f'_d(2) = 0$ et $f'_g(2) = -4$).

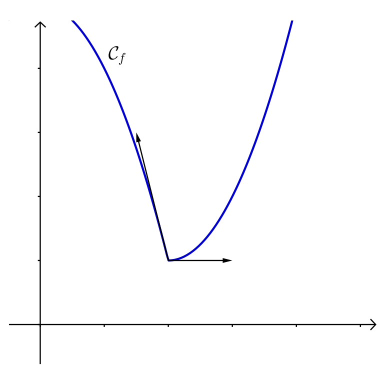
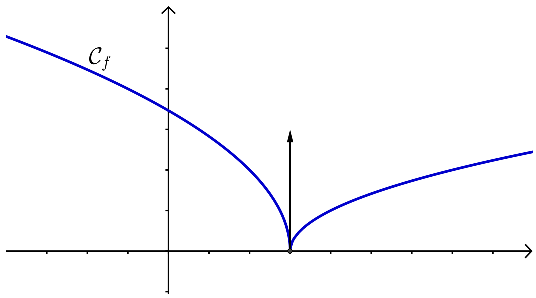


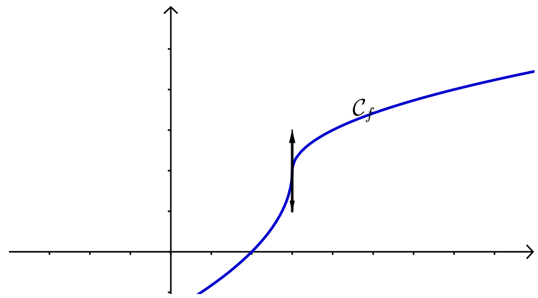
Figure 18 – Point anguleux

Théorème 21. *Une fonction f définie sur I_{x_0} est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite de x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.*

Autres exemples de fonctions non dérivables en x_0



Point de rebroussement



Tangente verticale

Théorème 22. *Soit f une fonction définie sur I_{x_0}. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

⚠ la réciproque est fausse : penser à la fonction « valeur absolue » qui est continue, mais non dérivable en zéro.

4 Variations - extrema d'une fonction dérivable

Théorème 23. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.*

1. *Si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I.*
2. *Si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.*
3. *Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.*

On a un énoncé un peu plus précis :

Définition 14. *Les réels $\{x_i,\ i \in J\}$ sont dits isolés s'il existe une famille d'intervalles $\{\ I_i,\ i \in J\}$ deux à deux disjoints tels que pour tout indice i de J, x_i appartient à I_i.*

Théorème 24. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

1. Si $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$ (respectivement $f'(x) < 0$) alors f est strictement croissante sur I (respect. décroissante sur I)

2. Si $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$ (respectivement $f'(x) \leq 0$) et f' ne s'annule qu'en des réels isolés, alors f est strictement croissante sur I (respect. strictement décroissante sur I)

Exemple 25. La fonction « cube » $f\ :\ x \mapsto x^3$. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en $x = 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4.1 Extrema d'une fonction

Définition 15. *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.*

1. *On dit que f admet un maximum local en x_0, s'il existe un voisinage I_{x_0} tel que $\forall x_0 \in I_{x_0}$, $f(x) \leq f(x_0)$.*
2. *On dit que f admet un minimum local en x_0, s'il existe un voisinage I_{x_0} tel que $\forall x_0 \in I_{x_0}$, $f(x) \geq f(x_0)$.*
3. *On dit que f admet un extremum en x_0 si f admet un minimum ou un maximum en x_0.*

Les théorèmes suivants sont des conséquences du théorème des valeurs intermédiaires, et seront admis :

Théorème 25. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Théorème 26. *L'image d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ par une fonction continue f est un intervalle fermé borné $[m, M]$, où m (respectivement M) est le minimum (respect. maximum) de f sur $[a, b]$*

Théorème 27. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I_{x_0}, si f admet un extremum en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Conséquence graphique : Sous les conditions du théorème, la tangente à $\mathcal{C}_f$ est horizontale.

Remarque : La réciproque du théorème précédent est fausse : par exemple soit f définie par $f(x) = x^3$, alors $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum en $x = 0$.

Théorème 28. *Soit f une fonction définie et dérivable sur I_{x_0}, si $f'(x_0) = 0$ et si $f'(x)$ change de signe en x_0, alors f admet un extremum en x_0.*

Théorème 29. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur I_{x_0}.*

1. *Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors f admet un minimum en x_0.*
2. *Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$, alors f admet un maximum en x_0.*

Exercice : Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = (\ln x)^3 - 3 \ln x$. Calculer $f'(x)$ puis déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Indications :

- $\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{3(\ln x)^2}{x} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{3\left((\ln x)^2 - 1\right)}{x}$
  Donc $f'(x)$ est du signe de $(\ln x)^2 - 1 = (\ln x - 1)(\ln x + 1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
-

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$