Année 2016-2017

UNIVERSITÉ DE CERGY

U.F.R. Économie & Gestion

LICENCE d'ÉCONOMIE FINANCE et GESTION

Première année - Semestre 1

MATH 101 : Pratique des Fonctions Numériques

Enseignant responsable : J. Stéphan

Notes de cours

Chapitre 1 : Quelques outils mathématiques

1 Symboles et logique

Définition 1. *On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels : tous les exemples et exercices de ce cours se feront dans cet ensemble de nombres ou un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

On dit qu'un sous ensemble I de $\mathbb{R}$ est ***un intervalle*** *de $\mathbb{R}$, si pour tous réels a et b appartenant à I et pour tout réel x tel que $a \leq x \leq b$, alors x appartient à I.*

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit que l'intervalle I des réels x est :

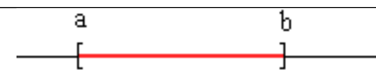
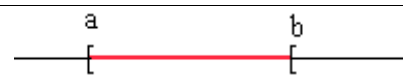
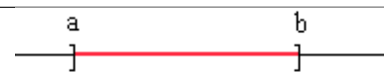
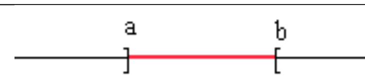
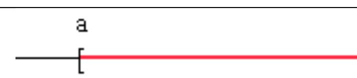
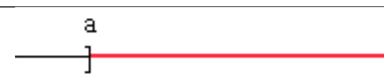
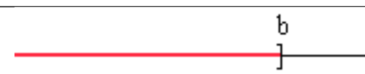
1. *un intervalle fermé $[a; b]$ (ou un segment) si, pour tout x appartenant à I, $a \leq x \leq b$.*
2. *un intervalle ouvert $]a; b[$ si, pour tout x appartenant à I, $a < x < b$.*
3. *un intervalle semi-ouvert à droite $[a; b[$ (respectivement à gauche $]a; b]$) si, pour tout x appartenant à I, $a \leq x < b$ (respect. $a < x \leq b$).*

   Dans ces trois cas, I est un intervalle dit ***borné*** *de $\mathbb{R}$.*

   De la même façon, on définit les intervalles ***non bornés*** *de $\mathbb{R}$:*

Exemples 1. $x \in [-3; 4] \iff -3 \leq x < 4\,;\ \ x \in]-\infty; 9] \iff x \leq 9$

Quelques intervalles :

Notation de l'intervalle	C'est l'ensemble des réels x tels que	Représentation sur la droite réelle
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a; b[$	$a \leq x < b$	
$]a; b]$	$a < x \leq b$	
$]a; b[$	$a < x < b$	
$[a; +\infty[$	$x \geq a$	
$]a; +\infty[$	$x > a$	
$]-\infty; b]$	$x \leq b$	
$]-\infty; b[$	$x < b$	

Définition 2. *Lorsqu'un élément a appartient à un ensemble E, on note $a \in E$, dans le cas contraire, on note $a \notin E$.*
Lorsqu'un sous-ensemble F est inclus dans un ensemble E, on note $F \subset E$, et $F \not\subset E$ dans le cas contraire. Notez que F est inclus dans E si et seulement si tous les éléments de F appartiennent à E, mais qu'il suffit qu'un élément de F n'appartienne pas à E pour que F ne soit pas inclus dans E.

Définition 3. $\exists$ *est le quantificateur existentiel : il signifie « il existe au moins un(e) » .* $\exists!$ *signifie « il existe un(e) unique » .*

$\forall$ *est le quantificateur universel : il signifie « Pour tout (s) » ou « Quel(le)s que soient » .*

Ces quantificateurs sont des symboles mathématiques et ne doivent être utilisés que dans des assertions mathématiques et surtout pas comme des abréviations dans une copie !

Exemples 2.

1. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$; $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x^2+x}$
2. $\exists x \in \mathbb{R}$; $x^2 - 3x = 4$. (Par exemple $x = -1$ (ou $x = 4$).)

2 Calcul numérique et littéral

2.1 Nombres premiers

Définition 4. *Un nombre entier supérieur ou égal à* 2 *est dit* ***premier*** *s'il est divisible uniquement par* 1 *et par lui même.*

Exemple 3. Les dix premiers nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

Application : La décomposition en nombres premiers permet des simplifications dans les calculs :

Exemples 4. $108 = 2^2 \times 3^3$, et $240 = 2^4 \times 3 \times 5$, donc $\dfrac{108}{240} = \dfrac{2^2 \times 3^3}{2^4 \times 3 \times 5} = 2^{-2} \times 3^2 \times 5^{-1}$.

$\dfrac{5}{18} - \dfrac{7}{24} = \dfrac{20-21}{72} = \dfrac{-1}{72}$ (72 est le PPMC de 18 et 24)

2.2 Fractions

Définition 5. *La fraction* $\dfrac{a}{b}$*,* $b \neq 0$*, est le résultat de la division du nombre* a *(numérateur) par le nombre non nul* b *(dénominateur).*

1. **Propriété :** Pour tout réel $k \neq 0$, $\dfrac{k \times a}{k \times b} = \dfrac{a}{b}$.

   Exemples 5. $\dfrac{60}{216} = \dfrac{5}{18}$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{-2+2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$; $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}} = \dfrac{3+\sqrt{2}}{7}$; $\dfrac{3a-a^2}{2a} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{a}{2}$.

2. **Addition de deux fractions :** • Pour tous réels a, b et $c \neq 0$: $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$

   • Pour tous réels a, $b \neq 0$, c et $d \neq 0$: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times d}{b \times d} + \dfrac{c \times b}{d \times b} = \dfrac{ad+bc}{bd}$

Exemples 6. $\frac{7}{3}+\frac{2}{3}=3\,;\ \frac{a}{3}+\frac{5a}{3}=2a\,;\ \frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{15}{20}+\frac{4}{20}=\frac{19}{20}.$
$\frac{1}{18}+\frac{5}{24}=\frac{19}{72}\,;\ \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1}{x(x+1)}-\frac{x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$

3. **Multiplication de deux fractions :** Pour tous réels $a, b \neq 0, c$ et $d \neq 0$:
$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d},\quad \text{en particulier}\quad a\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{d}$$
Exemples 7. $\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{20}\,;\ 7\times\frac{2}{3}=\frac{14}{3}\,;\ \frac{a}{b}\times\frac{1}{a}=\frac{1}{b}\,;\ \frac{x}{x-1}\times\frac{x^2-1}{3x^2}=\frac{x+1}{3x}$

4. **Division de deux fractions :** Pour tous réels $a, b \neq 0, c$ et $d \neq 0$:
$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$
Exemples 8. $\frac{3}{4}\div\frac{8}{5}=\frac{15}{32}\,;\ \frac{n(n+1)}{n-1}\div\frac{1}{n^2-1}=n(n+1)^2\,;\ \frac{2}{(x+1)^2}\div\frac{x-1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$

Remarque : Attention à la position des barres de fractions :
$$\frac{\frac{3}{5}}{7}=\frac{3}{5}\div\frac{7}{1}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{3}{35}\quad\text{et}\quad\frac{3}{\frac{5}{7}}=\frac{3}{1}\div\frac{5}{7}=\frac{3}{1}\times\frac{7}{5}=\frac{21}{5}$$

5. ***Remarque sur le signe « - » :*** Pour tous réels a et $b \neq 0$: $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$

2.3 Radicaux

Définition 6. *Si a est un réel positif ou nul, la racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique réel positif (ou nul) tel que $(\sqrt{a})^2 = a$.*

1. **Conséquence :** Pour tout réel positif ou nul a, $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$.
2. ***Remarque :*** Si $a > 0$, il y a exactement deux réels dont le carré est a : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Par exemple, 3 et -3 sont les deux réels dont le carré est égal à 9.
3. **Attention !** $\sqrt{a^2}$ n'est pas toujours égal à a ! Si $a \geq 0$, $\sqrt{a^2}=a$,
mais si $a \leq 0$, $\sqrt{a^2}=-a$. Par exemple, $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5=-(-5)$
4. **Plus généralement,** pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, si $n = 2p$, alors $\sqrt{a^n}=a^p$ et si $n = 2p+1$, alors $\sqrt{a^n}=a^p\sqrt{a}$. Par exemple : $\sqrt{128}=\sqrt{2^7}=8\sqrt{2}$.
5. **Propriétés :** Pour tous réels $a \geq 0$ et $b > 0$: $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

   Exemple 9. $\sqrt{18}=\sqrt{9\times 2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$
6. **Attention !** $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$. Par exemple, $\sqrt{1}+\sqrt{4}=3$ et $\sqrt{1+4}=\sqrt{5}\approx 2,2$

2.4 Puissances

Définition 7. *Soit n un entier strictement positif et a un réel :*

$$a^n = a \times a \times \cdots \times a \qquad (n \text{ facteurs})$$

Si $n = 0$ et $a \neq 0$, on convient de poser $a^0 = 1$

1. **Exemples 10.** $2^6 = 64\,;\ (-5)^3 = -125\,;\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}\,;\ (\sqrt{3})^5 = 9\sqrt{3}$

2. ***Remarque sur le signe de a^n :*** Si n est pair, a^n est positif et si n est impair, a^n est du signe de a

   Exemples 11. $(-3)^3 = -27$, $(-6)^6 = 46656$

3. **Puissances négatives :** Pour tout entier strictement positif n : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$

   Exemple 12. $2^{-2} = \frac{1}{4}$

4. **Propriétés :** Soient a et b deux réels non nuls et n et m deux entiers :

Produit de puissances	$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$3^6 \times 3^{-7} = 3^{-1}$
Quotient de puissances	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{3^6}{3^{-7}} = 3^{13}$
Puissance de puissances	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\left(2^4\right)^{-3} = 2^{-12}$
Puissance de produit	$(ab)^n = a^n \times b^n$	$35^4 = 5^4 \times 7^4$
Puissance de quotient	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3}$

5. **Puissances rationnelles :**

   Définition 8. *Soient a et b deux réels positifs. Soit q un entier naturel non nul. L'équation $a^q = b$ possède une unique solution appelée racine $q^{\text{ième}}$ de b et notée $a = b^{\frac{1}{q}}$ ou parfois $a = \sqrt[q]{b}$ (cette dernière notation étant moins utilisée)*

   Exemples 13. L'équation $x^3 = 125$ possède une unique solution $x = 5 = \sqrt[3]{125} = 125^{1/3}$

   Propriétés : Par définition, on a $(a^q)^{\frac{1}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a$

   Les propriété du tableau ci-dessus restent valables pour des puissances de la forme $\frac{1}{q}$: si a et b sont deux réels positifs et p et q deux entiers non nuls :

$$a^{\frac{1}{p}} a^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\ ; \qquad (ab)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{q}} b^{\frac{1}{q}}\ ; \qquad \left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{pq}}\ ; \qquad a^{\frac{-1}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{q}}} (a \neq 0)$$

   Exemples 14. $2^{1/3} \times 2^{1/9} = 2^{4/9}\,;\quad \left(3^{1/3}\right)^{1/2} = 3^{1/6}$

Définition 9. *Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et p et q deux entiers ($p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$), on définit*

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

Exemples 15. $125^{5/3} = (125^{1/3})^5 = 5^5 = 3125\,;\quad 81^{3/4} = (81^{1/4})^3 = 3^3 = 27$

Remarque : Soit $a > 0$: on a $\left(a^{1/2}\right)^2 = \left(a^2\right)^{1/2} = a$, ainsi $a^{1/2} = \sqrt{a}$

Propriétés : Soient a et b deux réels positifs et $r = \dfrac{p}{q}$ et $r' = \dfrac{p'}{q'}$ deux rationnels ($p, p' \in \mathbb{Z}$, $q, q' \in \mathbb{N}^*$)

Produit de puissances	$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$	$3^{1/3} \times 3^{-1/4} = 3^{1/12}$
Quotient de puissances	$\dfrac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$	$\dfrac{3^{-1/5}}{3^{1/4}} = 3^{-9/20}$
Puissance de puissances	$(a^r)^{r'} = a^{r \cdot r'}$	$\left(2^{3/5}\right)^{-2/3} = 2^{-2/5}$
Puissance de produit	$(ab)^r = a^r \times b^r$	$45^{3/4} = 3^{3/2} \times 5^{3/4}$
Puissance de quotient	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$	$\left(\dfrac{3}{25}\right)^{5/6} = \dfrac{3^{5/6}}{5^{5/3}}$

Exemples 16. $2^{3/4} \times 8^{1/2} = 2^{3/4} \times 2^{3/2} = 2^{9/4} = 4 \times 2^{1/4}\,;\quad 72^{5/3} = 3^{10/3} \times 2^5$

6. **Extension aux puissances réelles :** On verra lors de ce semestre que grâce à la fonction exponentielle on peut donner un sens mathématique aux puissances réelles de nombres strictement positifs, et que dans ce cas les propriétés ci-dessus restent encore valables.

3 Montrer une égalité

Principe : Lorsque l'on veut démontrer que deux réels A et B sont égaux, ll y a généralement 3 méthodes possibles :

1. On transforme l'un des deux nombres par une suite de calculs, afin d'obtenir le second :

   Par exemple, montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

   Réponse : $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

2. On transforme **séparément** les deux nombres A et B afin de démontrer qu'ils sont tous les deux égaux à un troisième nombre C :

   Par exemple, montrer que $(\sqrt{2}-3)(2-\sqrt{2}) = -\left(\sqrt{2}-\dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}$

   Réponse : D'une part $(\sqrt{2}-3)(2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-2-6+3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}-8$

   $$\begin{aligned} \text{D'autre part : } -\left(\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} &= -\left(2-5\sqrt{2}+\frac{25}{4}\right)+\frac{1}{4} = -\frac{32}{4}+5\sqrt{2}+\frac{1}{4} = 5\sqrt{2}-\frac{32}{4} \\ &= 5\sqrt{2}-8. \end{aligned}$$

   L'égalité est démontrée.

3. On montre que la différence $A-B$ est nulle.

   Par exemple, montrer que $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

   Réponse : $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})} - \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \dfrac{5-2-3}{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = 0.$
   L'égalité est démontrée.

Remarque : Lorsque A et B sont deux expressions en une variable (x par ex.), avant de démontrer que $A(x)$ et $B(x)$ sont égales, il faut vérifier qu'elles sont définies sur le même ensemble. Par exemple, $\dfrac{x^2+3x}{x} \neq x+3$ car $A(x) = \dfrac{x^2+3x}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $B(x) = x+3$ est définie sur $\mathbb{R}$ (on peut par contre préciser que pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{x^2+3x}{x} = x+3$)

Par exemple, montrer que pour tout $x \neq 1$: $\dfrac{2x^2-5x-1}{x-1} = 2x-3-\dfrac{4}{x-1}$

Réponse :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \neq 1,\ 2x-3-\frac{4}{x-1} &= \frac{(2x-3)(x-1)-4}{x-1} \\ &= \frac{2x^2-2x-3x+3-4}{x-1} = \frac{2x^2-5x-1}{x-1} \end{aligned}$$

4 Fonctions affines - Equations de droites - Systèmes linéaires 2×2

4.1 Fonctions affines

Définition 10. *Une fonction affine f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) par $f(x) = mx + p$ où m et p sont deux réels.*

Remarques :

1. Lorsque $p = 0$, la fonction f est dite linéaire.
2. Lorsque $m = 0$, f est une fonction constante.
3. Si $m > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et si $m < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. Une fonction affine f est entièrement déterminée par l'image de deux réels : soient x_1 et x_2 distincts tels que $f(x_i) = y_i$ $(i = 1, 2)$, alors $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, et pour tout réel x, $f(x) - y_2 = m(x - x_2)$.

Exemple 17. Déterminer la fonction affine f telle que $f(0,01) = 2$ et $f(-0,02) = 11$
Réponse : $f(x) = -300x + 5$

4.2 Équations de droites

Rappels : • Soient A et B deux points distincts. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB), et les autres vecteurs directeurs de (AB) sont tous les vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{AB}$ différents de $\vec{0}$. On caractérise ainsi les points de la droite (AB) :

$$M \in (AB) \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires}$$

• Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits colinéaires si l'un des deux est nul, ou bien s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$.

• Dans le plan muni d'un repère, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $x \cdot y' - x' \cdot y = 0$.

Exemple 18. Dans le plan muni d'un repère, tracez les droites suivantes :

D_1 de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et passant par $A(1; 1)$.

D_2 de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passant par $B(3; -2)$.

D_3 de vecteur directeur $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et passant par $C(-1; 2)$.

Théorème 1. *La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.*

Remarque : m s'appelle le coefficient directeur de la droite (AB) car il définit la direction de (AB) grâce au vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$, et b est « l'ordonnée à l'origine » de (AB).

Théorème 2. *Dans le plan muni d'un repère, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine (en particulier, elle possède une équation du type $y = mx + p$).*

Théorème 3. *Dans le plan muni d'un repère, toute droite (d) a une équation de la forme :*
1) $y = mx + p$, lorsque (d) est non parallèle à l'axe des ordonnées.
2) $x = k$, lorsque (d) est parallèle à l'axe des ordonnées.

Conclusion : On peut résumer les deux cas, en énonçant que toute droite du plan a une équation du type $ax + by + c = 0$, où a et b ne sont pas simultanément nuls. Si $b = 0$, cette droite est parallèle à l'axe des ordonnées et a pour équation réduite $x = \dfrac{-c}{a} = k$, si $b \neq 0$ cette droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et a une équation réduite de la forme $y = \dfrac{-a}{b}x - \dfrac{c}{b} = mx + p$

Définition 11. *On appelle équation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$, toute équation de la forme*
$ax + by + c = 0$

Remarque importante : Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Alors un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

En effet, si $b \neq 0$, les points $M(b; -a-c/b)$ et $N(0; -c/b)$ appartiennent à $\mathcal{D}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Si $b = 0$, le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, mais également le vecteur $\vec{u} = a\vec{v}\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$

4.3 Propriété : signe de $ax + b$

Théorème 4. *La résolution de l'inéquation (I) : $ax + b > 0$ (où $a \neq 0$) permet de déterminer le signe de $ax + b$:*

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax + b$		signe de $-a$	0	signe de a	

Exemples 19.

1. Résoudre l'inéquation $(2x - 5)(1 - x) < 0$.
2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{3x + 1}{2 - x} \geq 1$.

4.4 La fonction valeur absolue

Définition 12. *Soit x un réel, la valeur absolue de x, notée $|x|$ est définie par : $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$.*

Exemples : $|3,46| = 3,46$; $|-\pi| = \pi$; $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$.

Remarque : Si l'on considère la droite réelle munie d'un repère $(O;\vec{i})$, la valeur absolue de x est alors la distance du point O au point M d'abscisse x. Si $M(x)$ et $N(y)$ sont deux points de la droite réelle, alors la distance $MN = |y - x|$.

Les propriétés qui suivent sont des conséquences de la définition.

Propriétés 1.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |-x|$.
3. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x||y|$ *et si* $y \neq 0$. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |x^n| = |x|^n$.
6. ***Inégalité triangulaire :*** $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$

Théorème 5. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$ *et* $\forall x \geq 0, \left(\sqrt{x}\right)^2 = |x| = x$.

Définition 13. *La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$*

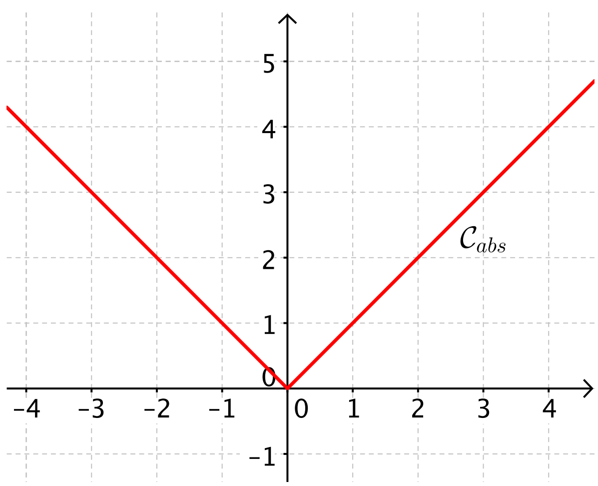


FIGURE 1 – Courbe de la fonction « Valeur absolue »

4.5 Système 2×2

Définition 14. *Un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y est de la forme :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax+by & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{array}\right.$$

où a, b, c, a', b', c' sont des réels tels que a et b (respectivement a' et b') ne soient pas simultanément nuls.
Trouver une solution de ce système, c'est déterminer un couple de réels (x_0, y_0) tels que $ax_0+by_0 = c$ ***et*** *$a'x_0 + b'y_0 = c'$. Le but étant de déterminer toutes les solutions.*

Remarque : interprétation graphique : Soit (d) la droite d'équation $ax+by = c$ (droite verticale si $b = 0$) et (d') la droite d'équation $a'x + b'y = c'$, les solutions du système correspondent alors **aux coordonnées des points d'intersection de (d) et (d')**. Il y a donc trois cas envisageables :

1. Si (d) et (d') sont sécantes en un point $M_0(x_0; y_0)$, le système admet une unique solution : le couple $(x_0; y_0)$.
2. Si (d) et (d') sont strictement parallèles, le système n'admet pas de solution.
3. Si (d) et (d') sont confondues, le système admet une infinité de solutions, tous les couples de coordonnées des points de d.

Théorème 6. *Soit (S) le système $\left\{\begin{array}{lcl} ax+by & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{array}\right.$. Notons D le nombre : $D = ab' - a'b$ (appelé déterminant du système). Si D est non nul, (S) admet une unique solution, et si D est nul, le système admet ou bien aucune solution ou bien une infinité de solutions.*

Exemple 20.
Soit (S) $\left\{\begin{array}{llcl} 3x & +7y & = & 2 \\ 2x & +3y & = & 5 \end{array}\right.$ Le déterminant de (S) est $D = 9 - 14 = -5 \neq 0$: on sait donc que (S) possède une unique solution ... à déterminer

Exemple 21. Résoudre les systèmes : (S) $\left\{\begin{array}{l} 2x+5y=-1 \\ x+3y=-1 \end{array}\right.$ et (S') $\left\{\begin{array}{l} 3x+9y=4 \\ x+3y=-2 \end{array}\right.$.

5 Dérivation - Tangente à une courbe

5.1 Fonction dérivable en un réel x_0

Rappels : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et $a < b$ deux réels de I. On appelle taux d'accroissement de f (ou taux de variation de f, ou accroissement moyen de f) entre a et b le rapport $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Dans un repère orthogonal, ce rapport est le coefficient directeur de la droite (AB) où $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

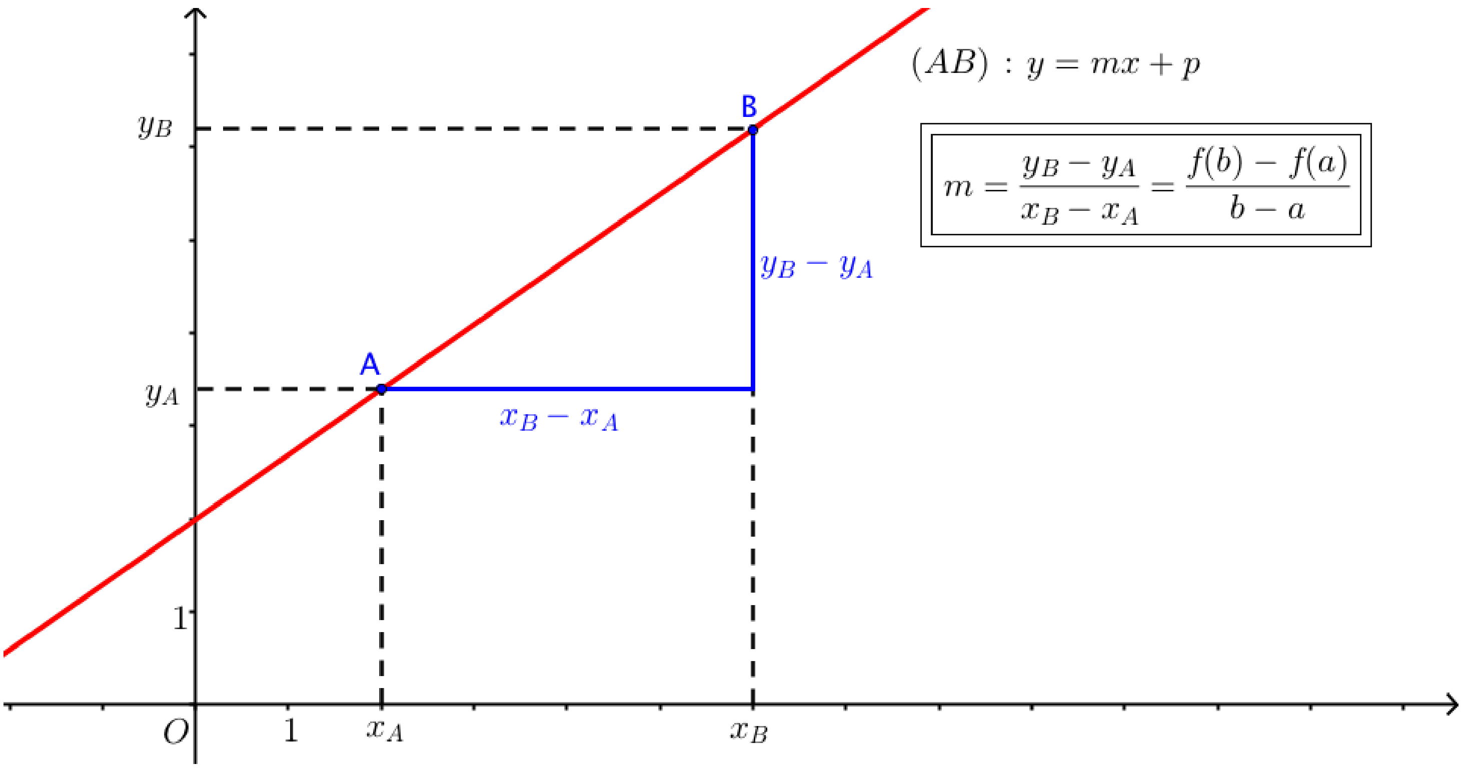


FIGURE 2 – Accroissement moyen entre a et b

Définition 15. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel appartenant à I. f est dite **dérivable en** x_0 si $\Delta f_{(x,x_0)} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite réelle (= finie) ℓ lorsque x tend vers x_0.*
*Dans ce cas, cette limite est notée $f'(x_0)$ et est appelée **nombre dérivé** de f en x_0*

Remarque : $\Delta f_{(x,x_0)}$ représente le coefficient directeur de la sécante (MM_0) où $M(x, f(x))$ et $M_0(x_0, f(x_0))$. Dire que $\Delta f_{(x,x_0)}$ possède une limite quand x tend vers x_0 revient à dire que la courbe représentative de f possède au point M_0 une tangente de coefficient directeur $f'(x_0)$. (tangente non verticale).

Ainsi, lorsque f est dérivable en x_0 l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(remarquer que cette droite a pour coefficient directeur $f'(x_0)$ et passe par $M_0(x_0, f(x_0))$.

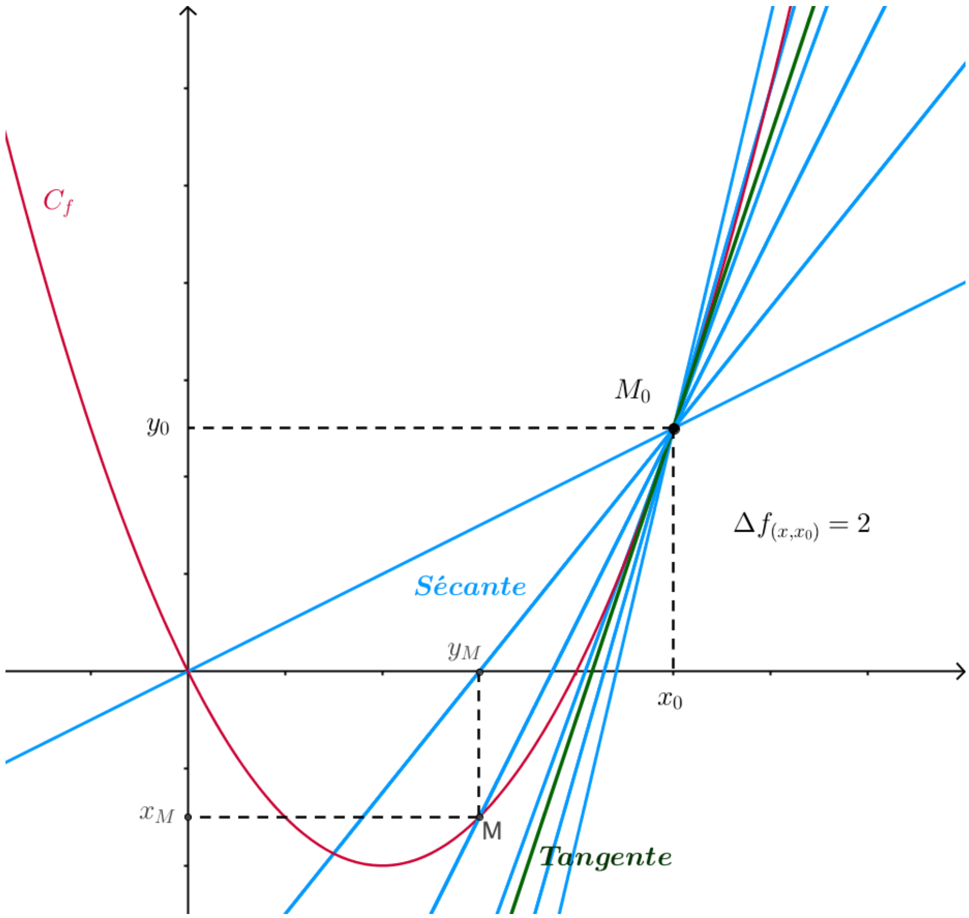


FIGURE 3 – Sécantes et tangente à $\mathcal{C}_f$ en M_0

Exemple 22. Soit $f \,:\, f(x) = x^2$. Pour $x_0 = 1$, on a $\Delta f_{(x,1)} = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$ donc $\lim\limits_{x \to 1} \Delta f_{(x,1)} = 2$. f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(1,1)$ a pour équation : $y = 2(x-1)+1$ soit : $y = 2x - 1$

Remarque : Avec le changement de variable $x = x_0 + h$, on a l'énoncé suivant : *f est dérivable en x_0 si et seulement si $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers zéro.*

5.2 Fonction dérivée sur un intervalle

Définition 16. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Si f est dérivable en tout réel de I, on dit que f est dérivable sur I et on peut alors définir la fonction dérivée de f, notée f', sur I par :*

$$\begin{aligned} f' \;:\; & I \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

Les étudiants doivent connaître le tableau des fonctions dérivées des fonctions de références suivantes (Les fonctions « Logarithme Népérien » et « Exponentielles » seront (re)vues lors du semestre) :

$f\ :\ f(x) = ...$	$f'(x) = ...$	Ensemble de validité
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \in \mathbb{Z}^*)$	nx^{n-1}	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0;+\infty[$

Opérations usuelles Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I :

Fonction	Dérivée	Condition
$f+g$	$f'+g'$	
$k.f$	$k.f'$	$k \in \mathbb{R}$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$	
$\dfrac{1}{g}$	$-\dfrac{g'}{g^2}$	$\forall x \in I, g(x) \neq 0$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$\forall x \in I, g(x) \neq 0$

Exemples 23. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur I :

$f_1(x) = -3x^3 + 2x^2 - 7x + 198$ sur $I = \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = -9x^2 + 4x - 7$

$f_2(x) = x\sqrt{x}$ sur $I =]0;+\infty[$ $\quad \forall x > 0,\ f_2'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

$f_3(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x}$ sur $I =]0;+\infty[$ $\quad \forall x > 0,\ f_3'(x) = \dfrac{-3}{x^4} + \dfrac{1}{x^2}$

$f_4(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$ sur $I =]-\infty;1[$ $\quad \forall x < 1,\ f_4'(x) = \cdots = \dfrac{1}{3}x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}(1-3x)$

$f_5(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ sur $I =]-1;+\infty[$ $\quad \forall x > -1,\ f_5'(x) = \cdots = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

$f_6(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ sur $I =]1;+\infty[$ $\quad \forall x > 1,\ f_6'(x) = \dfrac{-2}{x^2-1}$

Théorème 7. *Dérivée d'une fonction composée Soient f et g deux fonctions dérivables sur respectivement I et J tels que $f(I) \subset J$. Alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,*

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x)$$

On obtient ainsi les dérivées suivantes :

Fonction	Dérivée	Condition
f^n $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$nf' \times f^{n-1}$	$\forall x \in I, f(x) \neq 0$
$\ln f$	$\dfrac{f'}{f}$	$\forall x \in I, f(x) > 0$
$\exp(f)$	$f' \times \exp(f)$	

Exemples 24.

$f_1(x) = (-3x^2 + 2x + 1)^5$ sur $I = \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = (-6x + 2)(-3x^2 + 2x + 1)^4$

$f_2(x) = e^{3x^2-5x}$ sur $I = \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = (6x - 5)e^{3x^2-5x}$

$f_3(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $I = \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f_2'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Exemples 25. lorsqu'une fonction dépend d'une variable et d'un (ou plusieurs paramètres) on dérive selon la variable ! le paramètre ayant le rôle d'une constante

$f_1(x) = 3nx^5 + n^2$ sur $I = \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = 15nx^4$

$f_2(x) = x^2y^5$ sur $I = \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f_2'(x) = 2xy^5$

$f_3(y) = x^2y^5$ sur $I = \mathbb{R}$ $\quad \forall y \in \mathbb{R},\ f_2'(y) = 5x^2y^4$

$f_4(a) = \dfrac{a}{x^2 + 1}$ sur $I = \mathbb{R}$ $\quad \forall a \in \mathbb{R},\ f_4'(a) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

$f_5(x) = \dfrac{a}{x^2 + 1}$ sur $I = \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f_5'(x) = \dfrac{-2ax}{(x^2 + 1)^2}$

$f_6(x) = \dfrac{5nx}{x^2 - n^2}$ $(n > 0)$ sur $I =]n; +\infty[$ $\quad \forall x > n,\ f_6'(x) = \cdots = \dfrac{-5n(n^2 + x^2)}{(x^2 - n^2)^2}$

$f_7(y) = 15x^{1/3}y^{2/3}$ $(x > 0)$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ $\quad \forall y > 0,\ f_7'(y) = 10x^{1/3}y^{-1/3}$

5.3 Approximation affine

Dans cette partie, x_0 est un réel, et I_{x_0} est un intervalle ouvert contenant x_0. On notera également $I_{x_0}^* = I_{x_0} \setminus \{x_0\}$.

Théorème 8. ***Théorème d'approximation affine***

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au moins sur I_{x_0}. f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe une fonction ε définie et continue sur I_{x_0}, telle que $\varepsilon(x_0) = 0$ et un nombre réel A tels que :

$$\forall x \in I_{x_0}, \quad f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad (*)$$

Remarque : On peut donner une autre expression de l'égalité $(*)$ en posant $x = x_0 + h$ (avec h « petit », i.e. proche de zéro) et écrire une approximation affine :

$$\forall h \in \mathbb{R} \text{ tel que } x_0 + h \in I_{x_0}^* \ : \ f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h.f'(x_0)$$

L'approximation étant d'autant plus précise que h est proche de zéro.

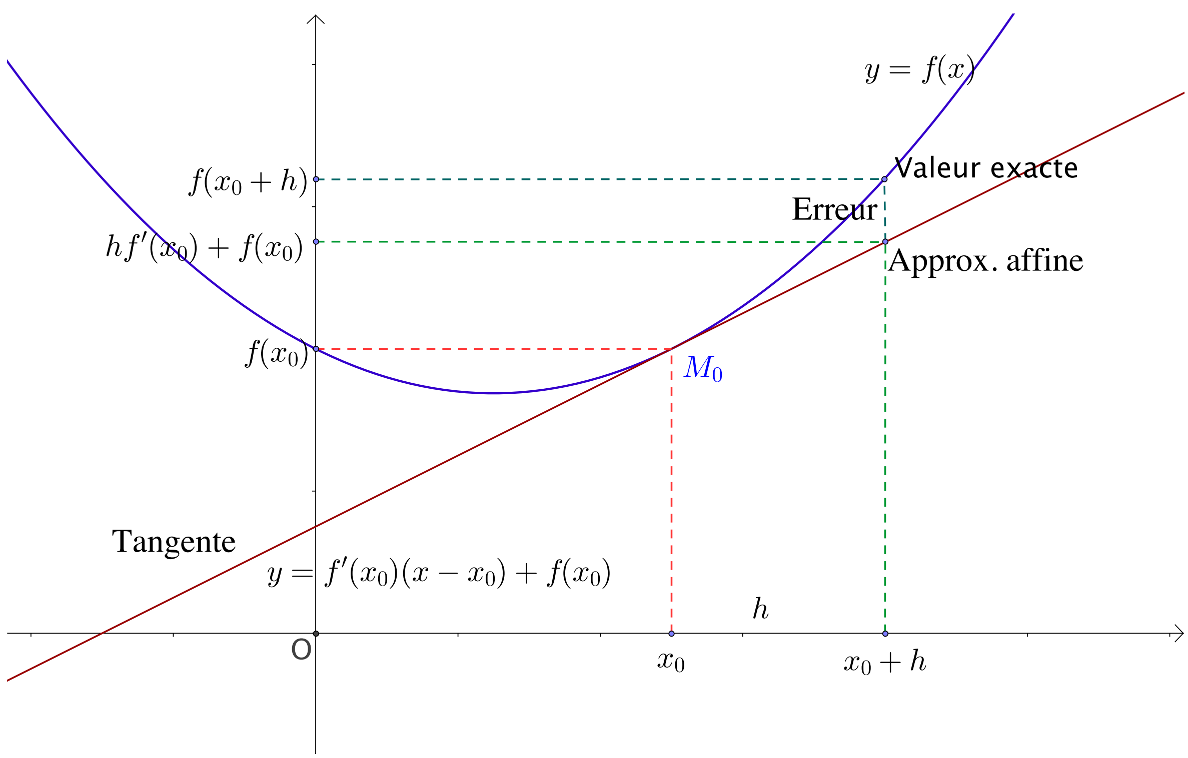


Figure 4 – Approximation affine

Exemples 26.

1. La hausse des prix a été de $0,4\%$ pendant trois mois consécutifs : donner une valeur approchée du pourcentage d'augmentation global sur cette période .
2. Donner une valeur approchée de $\sqrt{1,01}$.

UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2015-2016**

U.F.R. Économie & Gestion
Licence d'Économie Finance et Gestion

MATH101 : Pratique des Fonctions numériques

Notes de cours : Chapitre II : Fonctions usuelles

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 17. *Soit $\mathcal{E}$ une partie de $\mathbb{R}$ (en pratique, $\mathcal{E}$ sera un intervalle ou une union d'intervalles de $\mathbb{R}$). Une* ***fonction*** *(numérique) définie sur $\mathcal{E}$ est un procédé qui permet d'associer à tout réel x appartenant à $\mathcal{E}$* ***au plus*** *un réel $y = f(x)$.*

On note : $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$

On pourra également noter plus simplement $f : f(x) = y$ (notation personnelle qui permet d'éviter des phrases du type « La fonction $f(x) = ...$ »)

Définition 18. *On dit que y est l'image de x par la fonction f, et que x est un antécédent de y par la fonction f.*

Définition 19. *L'ensemble de définition d'une fonction $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ qui ont une image par f. Cet ensemble sera noté $\mathcal{D}_f$ ou plus simplement $\mathcal{D}$.*

Recherche d'ensembles de définition

1. $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$: la fonction f est un quotient défini en x si et seulement si A et B sont définies en x et $B(x) \neq 0$.
   Exemples : $f : f(x) = \dfrac{x^2 - 7x - 3}{x^2 - 9}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$ et $g : g(x) = \dfrac{4 - x}{7 + 2x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-7}{2}\right\}$.
2. $f(x) = \sqrt{A(x)}$: la fonction f est définie en x si et seulement si A l'est et $A(x) \geq 0$.
   Exemples : $f : f(x) = \sqrt{3x - 7}$ est définie sur $\left[\dfrac{7}{3}; +\infty\right[$, et $g : g(x) = \sqrt{-x^2 + 6x}$ est définie sur $[0; 6]$.

3. $f(x) = \dfrac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$: la fonction f est définie en x si et seulement si A et B le sont et $B(x) > 0$.

   Exemple : $f : f(x) = \dfrac{3x+8}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ est définie sur $]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$.

4. $f(x) = \ln(A(x))$: la fonction f est définie en x si et seulement si A l'est et $A(x) > 0$

   Exemple : $f : f(x) = \ln(-7x+3)$ est définie sur $\left]-\infty; \dfrac{3}{7}\right[$.

Définition 20. *Le plan étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle la **courbe représentative de la fonction** f (ou **représentation graphique** de f), l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$, tels que $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$, cette courbe sera notée $\mathcal{C}_f$.*

*On dit alors que l'équation $y = f(x)$ est **l'équation** de la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère considéré.*

Remarque : *Test des verticales*

Par définition, tout réel x a AU PLUS une image par la fonction f, cela signifie graphiquement que pour tout réel x_0 fixé, il y a au plus un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0 (Si x_0 appartient à $\mathcal{D}_f$, il y a un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0, sinon il n'y pas de point d'abscisse x_0). On en conclut que toute verticale (i.e. toute parallèle à l'axe (Oy)) coupe la courbe $\mathcal{C}_f$ en AU PLUS un point.

Illustration :

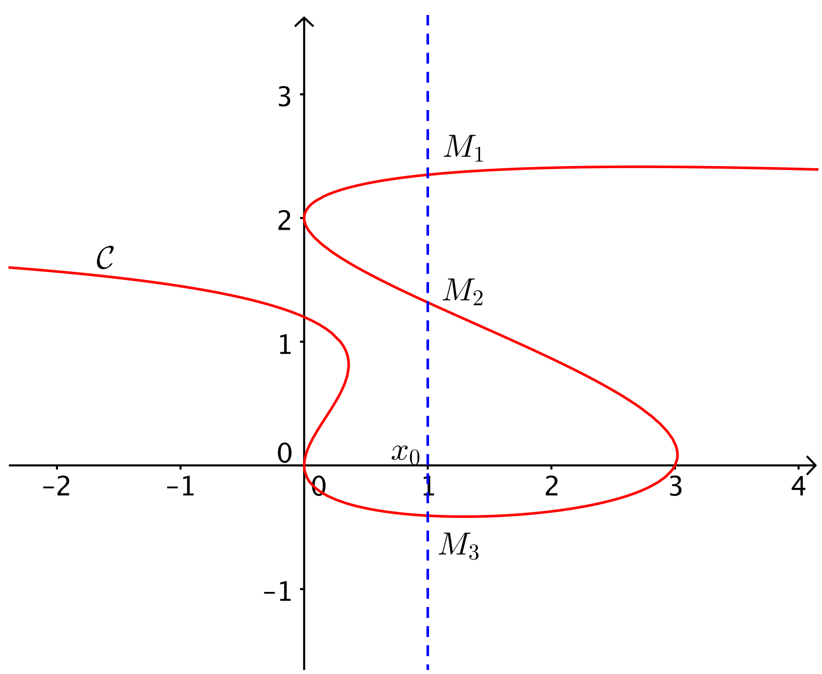


FIGURE 5 – Test des verticales

1.2 Variations d'une fonction

Définition 21. *Soit f une fonction définie sur **un intervalle** I.*
On dit que f est croissante sur I si :

$$\forall (x_0, x_1) \in I \times I, x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) \leq f(x_1)$$

On dit que f est strictement croissante sur I si :

$$\forall (x_0, x_1) \in I \times I, x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1)$$

On dit que f est décroissante sur I si :

$$\forall (x_0, x_1) \in I \times I, x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) \geq f(x_1)$$

On dit que f est strictement décroissante sur I si :

$$\forall (x_0, x_1) \in I \times I, x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) > f(x_1)$$

On retiendra qu'une fonction croissante conserve l'ordre des inégalités, et une fonction décroissante inverse l'ordre des inégalités.

Théorème 9. *Soit f une fonction définie et dérivable sur **un intervalle** I.*

1. *Si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I.*
2. *Si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.*
3. *Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.*

1.3 Composition de deux fonctions

Définition 22. *Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ tels que pour tout x appartenant à $\mathcal{D}_f$, $f(x)$ appartient à $\mathcal{D}_g$ (ce que l'on note par $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$). La composée de f suivie de g est alors la fonction h notée $h = g \circ f$ définie sur $\mathcal{D}_h$ par $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Illustration :

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}_f & \xrightarrow{\text{f}} & f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g & \xrightarrow{\text{g}} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) & \longmapsto & g(y) = g(f(x)) \end{array}}_{g \circ f}$$

Exemples 27.

1. On considère les fonctions $f : f(x) = -x^2 + 3x - 4$ et $g : g(x) = 2x + 1$ définies sur $\mathbb{R}$.
   Alors $h = f \circ g$, est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -4x^2 + 2x - 2$ et $l = g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $l(x) = -2x^2 + 6x - 7$.
2. On considère les fonctions $f : f(x) = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ et $g : g(x) = -3x + 5$ $(x \in \mathbb{R})$.
   Alors $h = f \circ g$, est définie par $h(x) = \sqrt{-3x + 5}$, pour $x \leq \dfrac{5}{3}$ et
   et $l = g \circ f$, vérifie $l(x) = -3\sqrt{x} + 5$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.
3. Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-2}{3}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3x + 2} + 5$. On peut écrire f comme composée $f = l \circ h \circ g$ où $g : g(x) = 3x + 2$, $h : h(x) = \dfrac{1}{x}$ et $l : l(x) = x + 5$

2 Les fonctions polynômes du second degré

Définition 23. *Une fonction f est une fonction polynôme du second degré s'il existe des réels a, b et c (où a est non nul) tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Une telle fonction est donc définie sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 10. *Soit (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$.*
On note Δ le réel : $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. *Si $\Delta > 0$, (E) possède deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.*
2. *Si $\Delta = 0$, (E) possède une unique solution réelle $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.*
3. *Si $\Delta < 0$, (E) ne possède pas de solution réelle.*

Définition 24. *Le réel Δ est appelé discriminant de l'équation (E)*
(ou de la fonction $f : f(x) = ax^2 + bx + c$).

Théorème 11. ***Factorisation et signe de $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$ $\mathbf{(a \neq 0)}$.***

1. *Si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

2. *Si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$.*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
signe de $f(x)$		signe de a	0	signe de a	

3. *Si $\Delta < 0$, $f(x)$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, et $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x*

Théorème 12. *La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré*
$f : f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ est la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$

1. *$\mathcal{P}$ possède un axe de symétrie vertical : la droite d'équation $x = \dfrac{-b}{2a}$*
2. *Le point $S\left(\dfrac{-b}{2a}; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$ est le sommet de $\mathcal{P}$.*
3. *Si $a > 0$, f possède un minimum en $x = \dfrac{-b}{2a}$, et si $a < 0$, f possède un maximum en $x = \dfrac{-b}{2a}$.*
4. *Si $\Delta > 0$, $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses (Ox) en deux points de coordonnées $(x_1, 0)$ et $(x_2, 0)$, Si $\Delta = 0$, $\mathcal{P}$ est tangente à l'axe (Ox) au point $S(x_0, 0)$. Si $\Delta < 0$, $\mathcal{P}$ n'a pas de point d'intersection avec l'axe (Ox).*

Illustrations : Les 6 figures suivantes illustrent les différents cas rencontrés selon le signe de a et le signe de Δ.

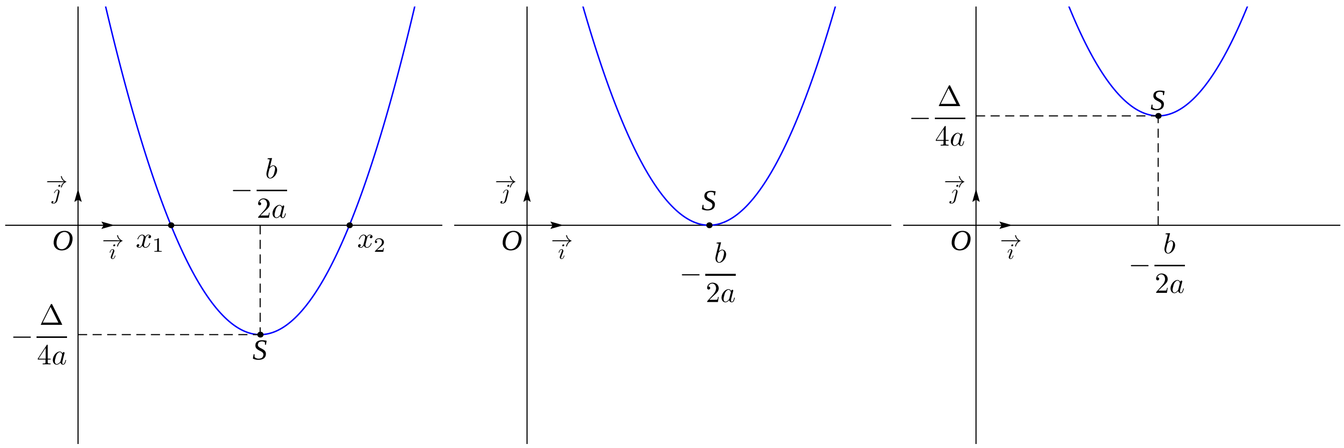


FIGURE 6 – $a > 0$

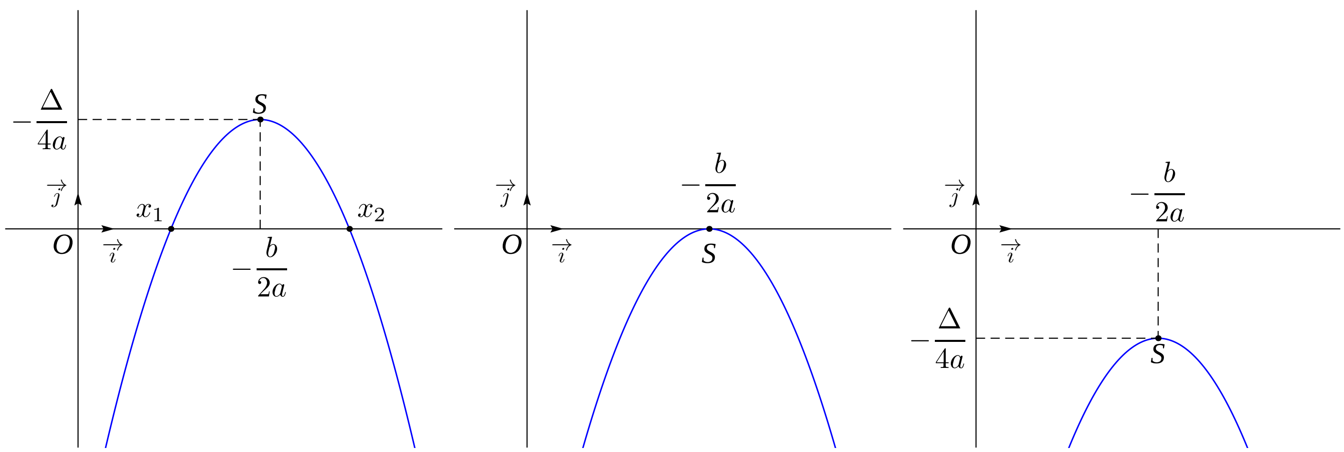


FIGURE 7 – $a < 0$

Exemple 28.

Pour construire « à mains levées » la parabole $\mathcal{P}$ représentative de la fonction $f : f(x) = -2x^2 + 5x - 2$, on doit préciser

- Son coefficient $a = -2 < 0$: $\mathcal{P}$ est ouverte vers le bas.
- Son sommet $S\left(\dfrac{5}{4}; \dfrac{9}{8}\right)$
- Son axe de symétrie δ d'équation $x = \dfrac{5}{4}$
- L'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe (Oy) : $A(0; -2)$
- Les éventuels points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe (Ox) : pour cela on doit résoudre l'équation $-2x^2 + 5x - 2 = 0$ de discriminant $\Delta = 9$: il y a deux points d'intersection : $B\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$ et $C(2; 0)$

Exemple 29. Résoudre l'inéquation $(1 - 3x)(-2x^2 + 3x + 5) > 0$.

3 Fonctions polynômes

Définition 25. *Une fonction polynôme P est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que, pour tout réel x,*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

Les réels a_k, pour $k \in \{0, 1, ..., n\}$, sont appelées coefficients du polynôme et chaque terme $a_k x^k$ est appelé monôme (de degré k lorsque $a_k \neq 0$)

*Le **degré** d'un polynôme non nul P est le degré de son monôme de plus haut degré.*

*La **valuation** de P est le degré du monôme de plus bas degré.*

Le polynôme nul n'a pas de degré ni de valuation.

Remarque : On confondra la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ et le polynôme $P(x)$.

Théorème 13.

1. *La somme de deux polynômes P et Q est un polynôme noté $P+Q$. Si $P+Q$ n'est pas le polynôme nul,* $\deg(P+Q) \leq \sup(\deg P; \deg Q)$.
2. *Le produit d'un polynôme P de degré n et d'un polynôme Q de degré m est un polynôme de degré $n+m$.*

Exemple 30. Soient $P(x) = 2x^2 - 3x$ et $Q(x) = x^4 - 7x^3 + x - 5$.

Alors $(P+Q)(x) = x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 2x - 5$, $PQ(x) = 2x^6 - 17x^5 + 21x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 15x$ et $(P - 2Q)(x) = -2x^4 + 14x^3 + 2x^2 - 5x + 10$

Définition 26. *Soient P_0 et P_1 deux polynômes. On dit que P_0 divise P_1 (noté $P_0 \mid P_1$) s'il existe un polynôme Q tel que $P_1 = P_0.Q$.*

On dit également que P_1 est un multiple de P_0.

Exemple 31. Soient $P_0(x) = x^2 + x + 1$ et $P_1(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$. P_0 divise P_1, en effet : $P_1(x) = P_0(x) \times (2x - 1)$.

Remarques :

1. Si P_0 divise P_1 alors $\deg P_0 \leq \deg P_1$. En effet, si $P_0 \mid P_1$ alors il existe Q tel que $P_1 = P_0.Q$ et donc $\deg P_1 = \deg P_0 + \deg Q$.
2. Si $P \neq 0$ alors $P \mid P$.
3. S'il existe un réel k non nul tel que $P_1 = k.P_0$ alors $\deg P_0 = \deg P_1$.

Théorème 14. ***Division euclidienne de deux polynômes*** *Soient P_0 et P_1 deux polynômes tels que $P_0 \neq 0$ et $\deg P_0 \leq \deg P_1$, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tels que $P_1 = P_0.Q + R$ et R est soit le polynôme nul, soit $0 \leq \deg R < \deg P_0$.*

Définition 27. *L'écriture $P_1 = P_0.Q + R$ s'appelle la division euclidienne de P_1 par P_0. Les polynômes P_0, P_1, Q et R sont respectivement le diviseur, le dividende, le quotient et le reste de cette division.*

Exemple 32.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & & -1 & x \quad -1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2 \; +2x \; +2 \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & & & \\
 & -2x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3}
 & & 2x & & \\
 & & -2x & +2 & \\ \cline{3-4}
 & & & +1 &
\end{array}
$$

Conclusion : $x^3 + x^2 - 1 = (x-1)(x^2 + 2x + 2) + 1$

Théorème 15. *Soient P_0 et P_1 deux polynômes tels que $P_0 \neq 0$. P_1 est divisible par P_0 si et seulement si le reste de la division euclidienne de P_1 par P_0 est nul.*

Exemple 33. Effectuer la division euclidienne de $P_1(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ par $P_0(x) = x^2 - 1$ afin de justifier que P_0 divise P_1.

Définition 28. *Soit P un polynôme : une **racine** (ou un zéro) de P est un réel α tel que $P(\alpha) = 0$*

Théorème 16. *Soit P un polynôme. α est une racine de P si et seulement si P est divisible par $(x - \alpha)$.*

Exemple 34.

Soit $P(X) = X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 3X + 2$ Déterminer deux racines « évidentes » de $P(X)$ afin de factoriser au maximum $P(X)$ sur $\mathbb{R}$.

4 La fonction Logarithme Népérien

Définition 29. *On admet qu'il existe une unique fonction, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, dont la dérivée est la fonction inverse* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, *et vérifiant en outre* $\ln(1) = 0$.

On l'appelle fonction ***logarithme népérien*** *; elle est notée* $\ln$.

Théorème 17. $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ \ln(xy) = \ln x + \ln y$

Propriétés 2.
1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x.$
2. $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \ \ln(x^n) = n \ln x.$
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2} \ln x.$

Exemples 35.
1. On peut écrire à l'aide d'un seul logarithme certains nombres réels : $A = 2\ln 3 + \ln 2 = \ln 18$, $B = \ln 7 - 2\ln 9 = \ln \dfrac{7}{81}$, $C = 4\ln \dfrac{1}{2} + 3\ln 2 + \ln 8 = \ln 4 = 2\ln 2$
2. On peut écrire à l'aide de quelques logarithmes certains nombres réels :
   $E = \ln(72) = \ln(2^3 \times 3^2) = 3\ln 2 + 2\ln 3$
   $F = \ln(24) - \ln 6 - \ln 64 = \ln 3 + 3\ln 2 - (\ln 2 + \ln 3) - 6\ln 2 = -4\ln 2$

Théorème 18. *La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *Ses limites aux bords de son ensemble de définition sont :*

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Preuve : Par définition, la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$: donc la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|$			$+$			
$\ln x$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Remarques :

1. La tangente à $\mathcal{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ a pour équation $y = x - 1$.
2. On note e l'unique réel strictement positif tel que $\ln e = 1$.
   On a $e \simeq 2,7182818...$
3. La tangente à $\mathcal{C}_{\ln}$ au point $B(e;1)$ a pour équation $y = \dfrac{1}{e}x$.

Théorème 19. *: Conséquences de la stricte croissance de la fonction* $\ln$

1. $0 < x = y \iff \ln x = \ln y$
2. $0 < x < y \iff \ln x < \ln y$. *En particulier,* $0 < x < 1 \iff \ln x < 0$

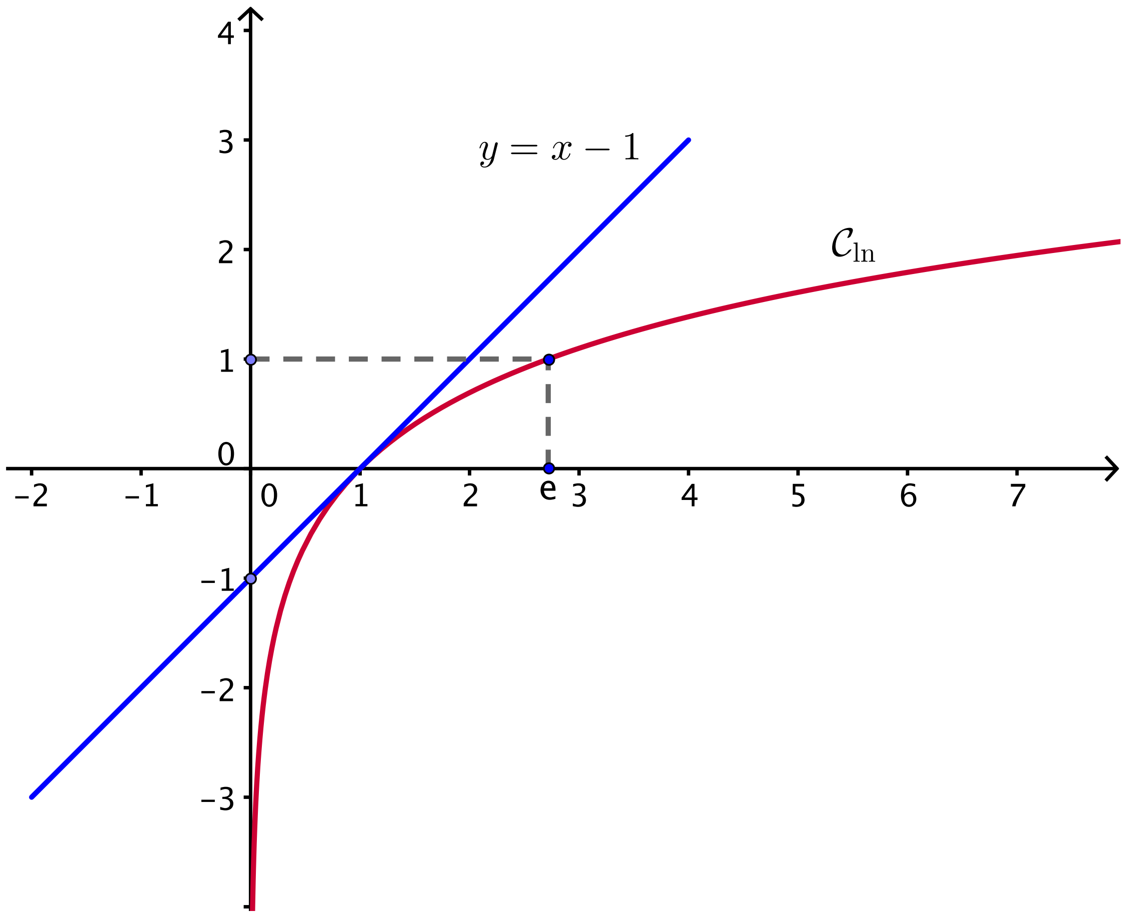


FIGURE 8 – Courbe de la fonction ln

Exemples 36. AVANT de résoudre une équation / inéquation, il ne faut pas oublier de donner l'ensemble de validité.

- (E_1) : $\ln(3x) = \ln(x+2)$ est définie en x si et seulement si
$\begin{cases} 3x & > & 0 \\ x+2 & > & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & > & 0 \\ x & > & -2 \end{cases} \iff x > 0$. (E_1) est donc définie sur $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}_+^*$
$(E_1) \iff 3x = x+2$ ET $x > 0 \iff x = 1 > 0$. Donc $\mathcal{S}_1 = \{\ 1\}$

- (E_2) : $\ln(3x) = \ln(x-2)$ est définie en x si et seulement si
$\begin{cases} 3x & > & 0 \\ x-2 & > & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & > & 0 \\ x & > & 2 \end{cases} \iff x > 2$. (E_2) est donc définie sur $\mathcal{D}_2 =]2; +\infty[$
$(E_2) \iff 3x = x-2$ ET $x > 2$, donc $x = -1$ mais $-1 \leq 2$, donc $\mathcal{S}_2 = \emptyset$

- (E_3) : $\ln(x+3) = \ln 3 + \ln(x-2)$ est définie en x si et seulement si
$\begin{cases} x+3 & > & 0 \\ x-2 & > & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & > & -3 \\ x & > & 2 \end{cases} \iff x > 2$. (E_3) est donc définie sur $\mathcal{D}_3 =]2; +\infty[$
$(E_3) \iff \ln(x+3) = \ln 3(x-2)$ ET $x > 2$
$\iff x+3 = 3(x-2)$ ET $x > 2 \iff x = \dfrac{9}{2} > 2$. Donc $\mathcal{S}_2 = \left\{\dfrac{9}{2}\right\}$

- (I_1) : $\ln(3-x) \geq \ln(2x+1)$ est définie en x si et seulement si
$\begin{cases} 3-x & > & 0 \\ 2x+1 & > & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & < & 3 \\ x & > & \dfrac{-1}{2} \end{cases} \iff \dfrac{-1}{2} < x < 3$. Donc $\mathcal{D}' = \left]\dfrac{-1}{2}; 3\right[$
$(I_1) \iff 3 - x \geq 2x+1$ et $x \in \mathcal{D}' \iff x \leq \dfrac{2}{3}$ et $x \in \mathcal{D}'$. Donc $\mathcal{S}' = \left]\dfrac{-1}{2}; \dfrac{2}{3}\right]$

- (I_2) : $\ln(x+1) < \ln 2$ est définie en x si et seulement si $x+1 > 0$ c-a-d. $x > -1$.
Donc $\mathcal{D}'' =]-1; +\infty[$ $(I_2) \iff x+1 < 2$ et $x \in \mathcal{D}''$. Donc $\mathcal{S}'' =]-1; 1[$

5 La fonction Exponentielle

Définition 30. *D'après le paragraphe précédent, tout réel b possède un unique antécédent $a > 0$ par la fonction logarithme népérien, i.e. $\ln a = b$. Ceci nous permet de définir une fonction sur $\mathbb{R}$, appelée fonction exponentielle, notée* exp, *telle que :* $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \exp x \end{cases} \iff \begin{cases} y \in \mathbb{R}_+^* \\ x = \ln y \end{cases}$
*On dit que la fonction exponentielle est **la fonction réciproque** de la fonction* ln

Conséquences immédiates :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp x > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp x) = x$ et 3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln x) = x$
4. $\exp 0 = 1$ (car $\ln 1 = 0$)
5. $\exp 1 = e$ (car $\ln e = 1$)

Propriété fondamentale : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x+y) = \exp x . \exp y$

Preuve : Soit $A = \exp x . \exp y$, on a : $\ln A = \ln(\exp x . \exp y) = \ln(\exp x) + \ln(\exp y) = x + y$
Soit $B = \exp(x+y)$, on a : $\ln B = \ln(\exp(x+y)) = x + y$, donc $\ln A = \ln B$, donc $A = B$ ■

Conséquence Une démonstration par récurrence sur n permet de montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (\exp x)^n = \exp(nx)$$

En particulier, pour $x = 1$: $\forall n \in \mathbb{N}, (\exp 1)^n = e^n = \exp(1.n) = \exp n$. Nous admettrons que cette écriture peut se généraliser à tout x réel : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp x = e^x$;
La propriété fondamentale s'écrit alors : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{x+y} = e^x.e^y$

Les autre propriétés sur les puissances sont aussi valables :

$$1.\ \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad \text{et} \qquad 2.\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

Exemples 37. $A = e^{\ln 5} = 5$; $B = e^{2\ln 2} = e^{\ln 4} = 4$; $C = e^{2-\ln 3} = \dfrac{e^2}{3}$;
$D = e^{2x-1} \times e^{-x+1} = e^x$; $E = \ln(e^7) = 7$; $F = e^{\frac{1}{2}\ln 7} = \sqrt{7}$; $G = \dfrac{e^{1+3x}}{e^{2+x}} = e^{-1+2x}$.

Exemples 38. Résoudre les équations et inéquations :
(E_1) : $e^{x+1} = 1$; (E_2) : $e^{3x-1} = 5$ (E_3) : $e^{x^2} = e^{2-x}$;
(I_1) : $e^x - 1 \geq 0$; (I_2) : $e^x > e^2$ (I_3) : $e^{-x} \leq 5$

Rép. : $S_1 = \{-1\}$, $S_2 = \left\{\dfrac{1+\ln 5}{3}\right\}$, $S_3 = \{-2; 1\}$, $S'_1 = \mathbb{R}^+$, $S'_2 =]2; +\infty[$, $S'_3 = [-\ln 5; +\infty[$.

Théorème 20. *La fonction exponentielle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$

Preuve : Soient x_1 et x_2 deux réels. Comparer $\exp(x_1)$ et $\exp(x_2)$ équivaut à comparer $\ln(\exp(x_1)) = x_1$ et $\ln(\exp(x_2)) = x_2$. Ainsi, si $x_1 < x_2$, alors $\exp(x_1) < \exp(x_2)$ ■

Courbe de la fonction exponentielle : On admet que la courbe de la fonction exponentielle est l'image de celle de la fonction logarithme népérien par la symétrie d'axe la première bissectrice. Cette symétrie permet de connaître les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$: au point $A'(0, 1)$ la tangente a pour équation $y = x + 1$ et en $B'(1, e)$ la tangente a pour équation $y = ex$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x) = exp(x)$				$+$			
$f(x) = exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

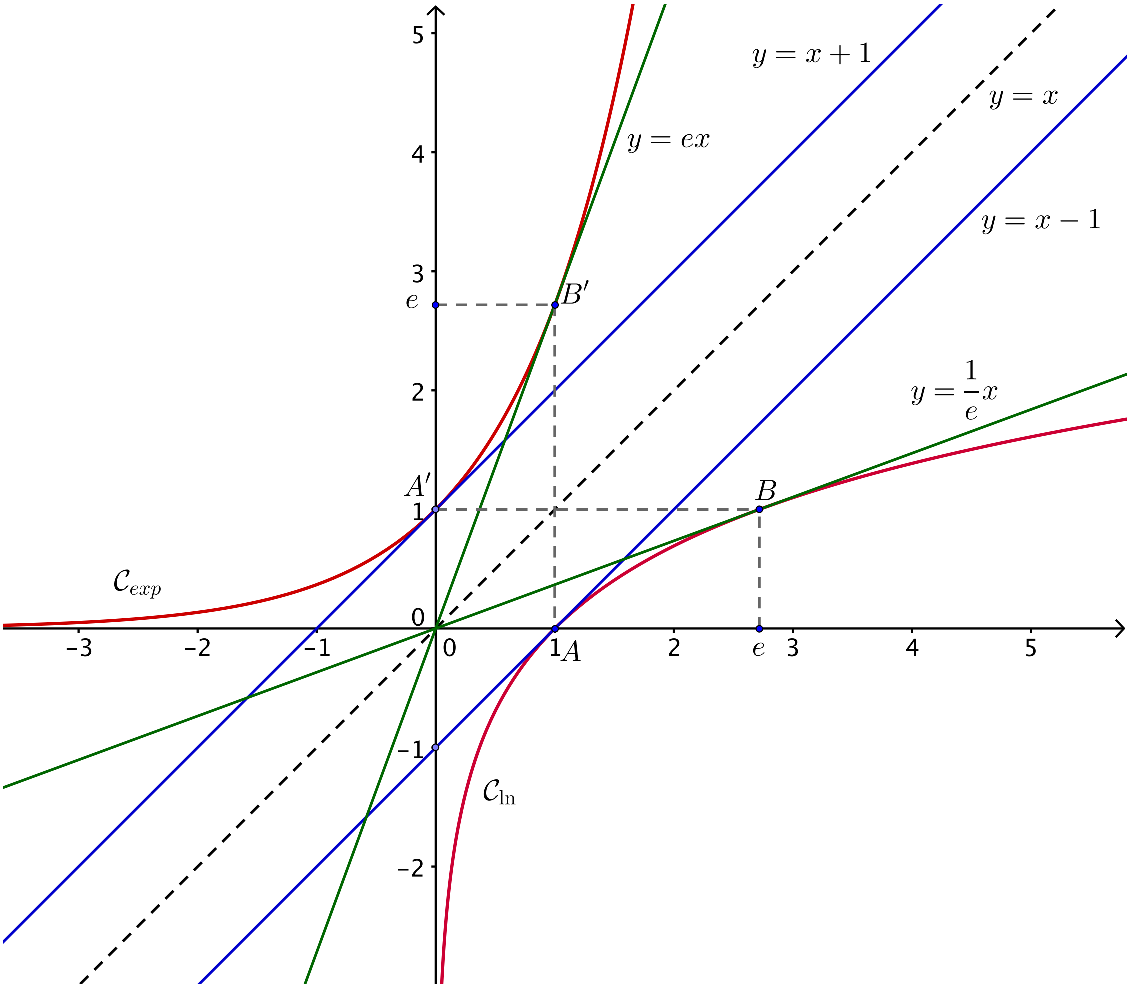


FIGURE 9 – Courbes des fonctions ln et exp

Théorème 21. *La fonction exponentielle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout réel* x*,* $\exp'(x) = \exp x$*.*

Exemples 39. Vérifiez les fonctions dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur l'intervalle I :

$f_1(x) = \ln 2x$ sur $I =]0; +\infty[$ $\qquad \forall x > 0,\ f_1'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f_2(x) = \ln(x^2)$ sur $I =]0; +\infty[$ $\qquad \forall x > 0,\ f_2'(x) = \dfrac{2}{x}$

$f_3(x) = (\ln x)^2$ sur $I =]0; +\infty[$ $\qquad \forall x > 0,\ f_3'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$

$f_4(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$ $\qquad \forall x > 0,\ f_4'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

$f_5(x) = e^{-x}$ sur $I = \mathbb{R}$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f_5'(x) = -e^{-x}$

$f_6(x) = x.e^{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f_6'(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2}$

6 Fonctions exponentielles de base a

Définition 31. *Soit a un réel strictement positif : on appelle fonction exponentielle de base a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$.*

Justification : On a vu que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x^p = p \ln x$. On admet que cette égalité se prolonge à tout réel.

Remarque : Si $a = 1$, la fonction exponentielle de base 1 est la fonction constante égale à 1.

Les propriétés connues sur les puissances se prolongent aux fonctions exponentielles de base a.

Propriétés 3. $\forall (a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $a^x.a^y = a^{x+y}$ *2.* $(a^x)^y = a^{x.y}$ *3.* $a^x.b^x = (ab)^x$

Exemples 40. $A = e^{1-3x} \times e^{2x+7} = e^{-x+8}$; $B = \dfrac{4^{5x-3}}{4^{2x-1}} = 4^{3x-2}$; $C = 3^{1+x} \times 9^{-x} = 3^{1-x}$.

Exemples 41. Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1) \ : \ 3^x = 27000; \qquad (E_2) \ : \ 1,02^x = 3; \qquad (E_3) \ : \ e^{\frac{x}{2}} - 1 = \frac{8}{e^{\frac{x}{2}} + 1}$$

Réponses : $S_1 = \left\{\dfrac{3 \ln 30}{\ln 3}\right\}$, $S_2 = \left\{\dfrac{\ln 3}{\ln 1,02}\right\}$, $S_3 = \{\ln 9\}$.

Exemple 42. Pour fabriquer un nouveau produit, une entreprise a investi 500000 euros dans une nouvelle machine. Cette machine se revend au bout d'une durée d'utilisation t, exprimée en années, au prix p, exprimé en milliers d'euros, donné par la fonction : $p(t) = 500e^{\frac{-t}{10}}$. Au bout de combien de temps (au mois près) la machine a perdu la moitié de sa valeur.

Réponse : Pour tout $t \geq 0$, $p'(t) = -50e^{\frac{-t}{10}} > 0$, p est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (c'est cohérent !)

On cherche t vérifiant : $p(t) = \dfrac{1}{2}p(0) = 250$, soit $500e^{\frac{-t}{10}} = 250 \iff e^{\frac{-t}{10}} = \dfrac{1}{2} \iff t = 10 \ln 2$, soit environ 6 ans et 11 mois.

Variations : Si $a > 1$, la fonction exponentielle de base a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est strictement décroissante si $0 < a < 1$.

Preuve : Soit $a > 0$. La fonction $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) = \ln a e^{x \ln a}$. Le signe de $f_a'(x)$ est donc celui de $\ln a$, d'où le résultat.

$a > 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x) = \ln a e^{x \ln a}$		$+$	
$f(x) = a^x$	0 ↗	1	↗ $+\infty$

$0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x) = \ln a e^{x \ln a}$		$-$	
$f(x) = a^x$	$+\infty$ ↘	1	↘ 0

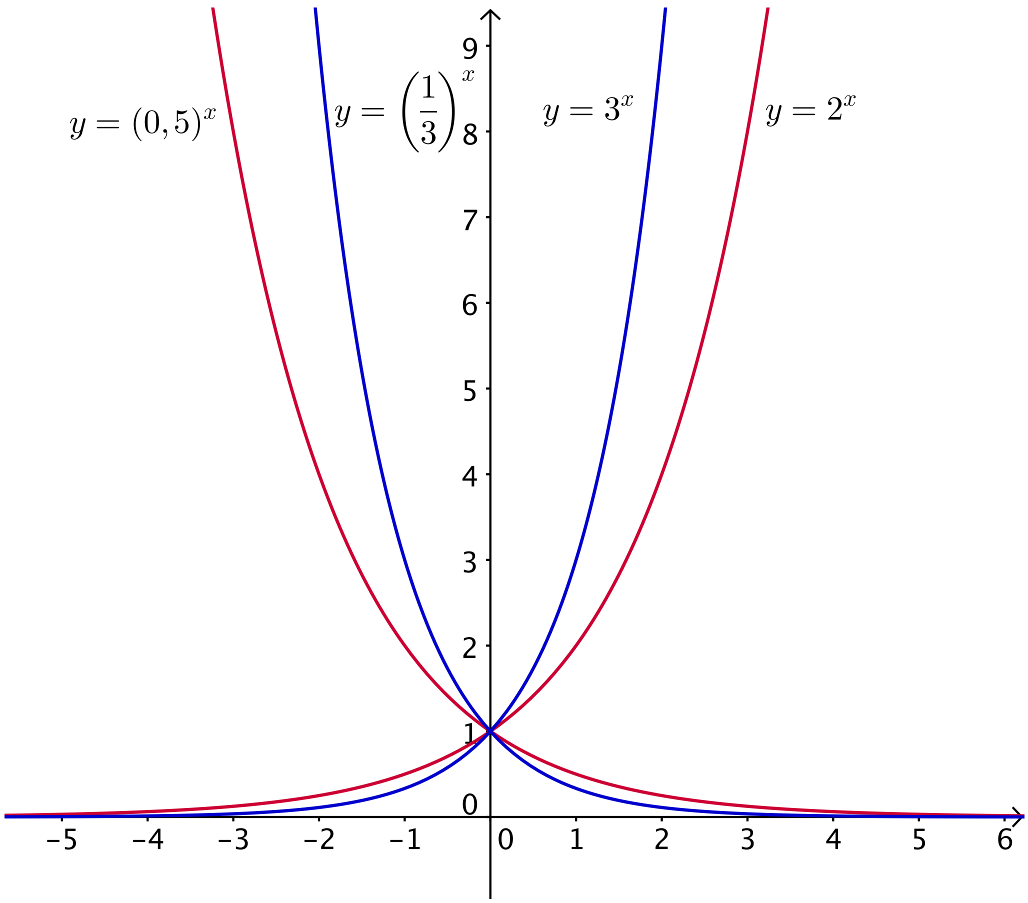


FIGURE 10 – Courbes des fonctions $x \mapsto 0,5^x$, $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$ et $x \mapsto 3^x$

Remarque : Les courbes des fonctions f_a et $f_{\frac{1}{a}}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées (Oy).

7 Fonctions puissances d'exposants réels

Définition 32. *Soit r un réel non nul : on appelle fonction puissance d'exposant r la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_r(x) = x^r = e^{r \ln x}$.*

Remarques :

1. On utilise encore la remarque précédente : si $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, $b^a = e^{a \ln b}$.
2. Si $r = 0$, la fonction $x \mapsto x^0$ est la fonction constante égale à 1.

Propriétés 4. *Les propriétés connues sur les puissances se prolongent aux fonctions puissances d'exposants réels : $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \forall (r, r') \in \mathbb{R}^2$:*

1. $x^r.x^{r'} = x^{r+r'}$
2. $(x^r)^{r'} = x^{r.r'}$
3. $x^r.y^r = (xy)^r$
4. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$
5. $x^{-r} = \dfrac{1}{x^r}$

Exemples 43. $A = 8^{\frac{2}{3}} \times 2^{-2} = 1$; $B = (4\sqrt{2})^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{10}{3}}$; $C = 18^{1,3} \times 2^5 = 2^{6,3} \times 3^{2,6}$; $D = 12^{1,6} \times 9^{-0,5} = 2^{3,2} \times 3^{0,6}$; $E = \dfrac{12^{6,4}}{6^{2,3}} = 2^{10,5} \times 3^{4,1}$

Variations : Si $r > 0$, la fonction puissance d'exposant r est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est strictement décroissante si $r < 0$.

Preuve : Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^r = e^{r \ln x}$: f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables, et $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{r}{x} e^{r \ln x} = r x^{r-1}$; sur $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est du signe de r. ■

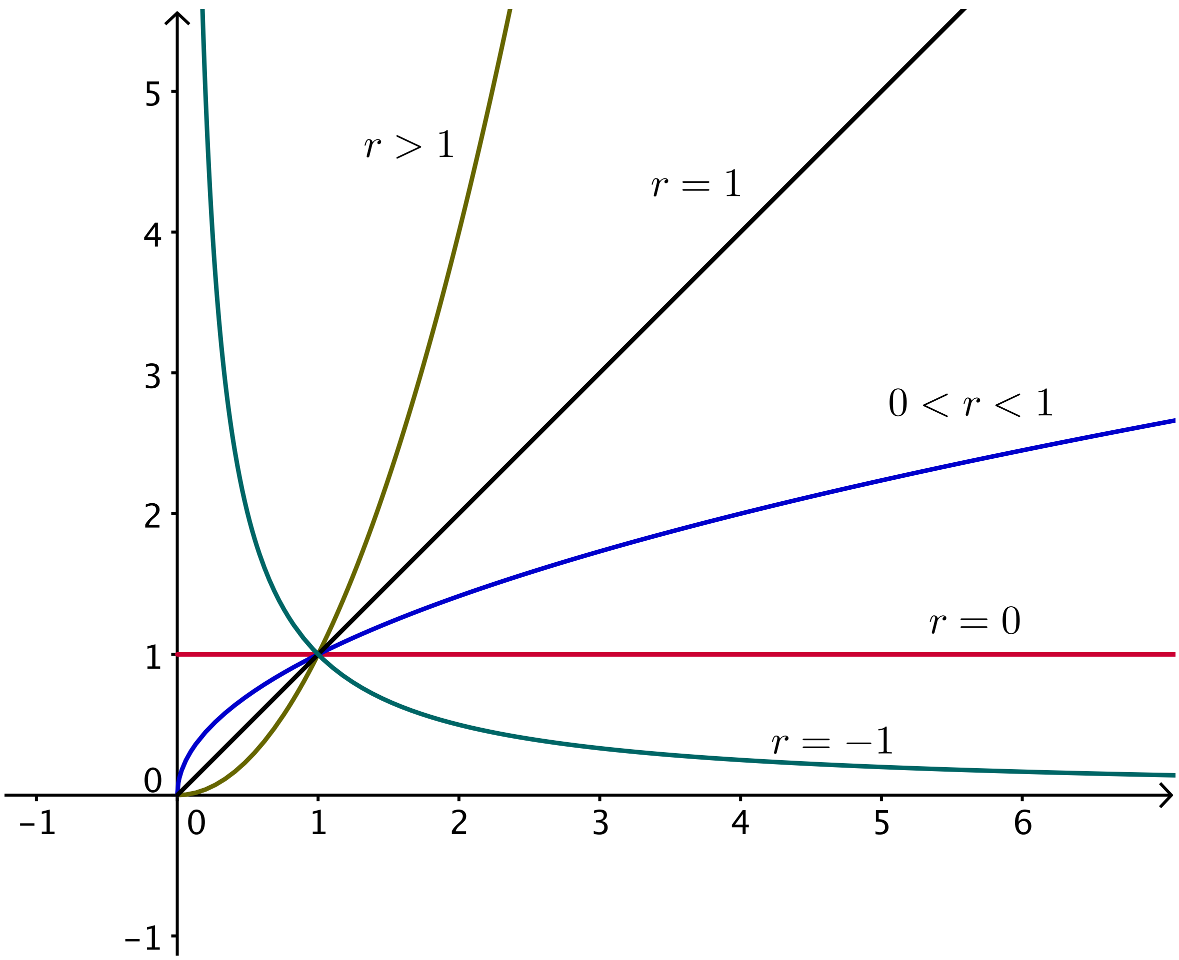


FIGURE 11 – Les courbes des fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto x^1$, $x \mapsto x^{-1}$, $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$ et $x \mapsto x^2$

Exemples 44.

1. Résoudre les équations suivantes :
   $(E_1)\ :\ x^3 = 27000$ $\qquad (E_2)\ :\ (1+t)^4 = 0,0016$ $\qquad (E_3)\ :\ x^{\frac{1}{5}} = 3$
   Réponses : $S_1 = \{30\}$, $S_2 = \{-0,8\}$, $S_3 = \{243\}$

2. Pour un produit, une étude statistique montre que la demande (en milliers d'unités) y en fonction du prix unitaire x (en euros) suit la relation $\ln y = -0,9 \ln x + 2$. Montrer qu'on a la relation $y = e^2 \times x^{-0,9}$. En déduire le prix unitaire que l'on doit fixer pour une demande de 3000 unités.

Réponse :

- On a l'équivalence : $y = e^2 \times x^{-0,9} \Longleftrightarrow y = e^{-0,9 \ln x + 2} = e^2 \times e^{\ln(x^{-0,9})} = e^2 x^{-0,9}$
- On résout : $3 = e^2 x^{-0,9} \Longleftrightarrow x^{-0,9} = \dfrac{3}{e^2} \Longleftrightarrow x = \left(\dfrac{3}{e^2}\right)^{\frac{1}{-0,9}} \simeq 2,7$ euro.

Remarque : Fonctions puissances entières

1. Si $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$, la fonction « puissance n » est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n : f_n(x) = x^n$

2. Les propriétés vues ci-dessus, restent bien entendu valables lorsque les puissances sont des entiers naturels.

3. **Illustration :**

Si $0 < x < 1$ alors $x > x^2 > x^3 > x^4 > ... > x^n > x^{n+1} > ..... > 0$

Si $x > 1$ alors $0 < x < x^2 < x^3 < x^4 < ... < x^n < x^{n+1} < .....$

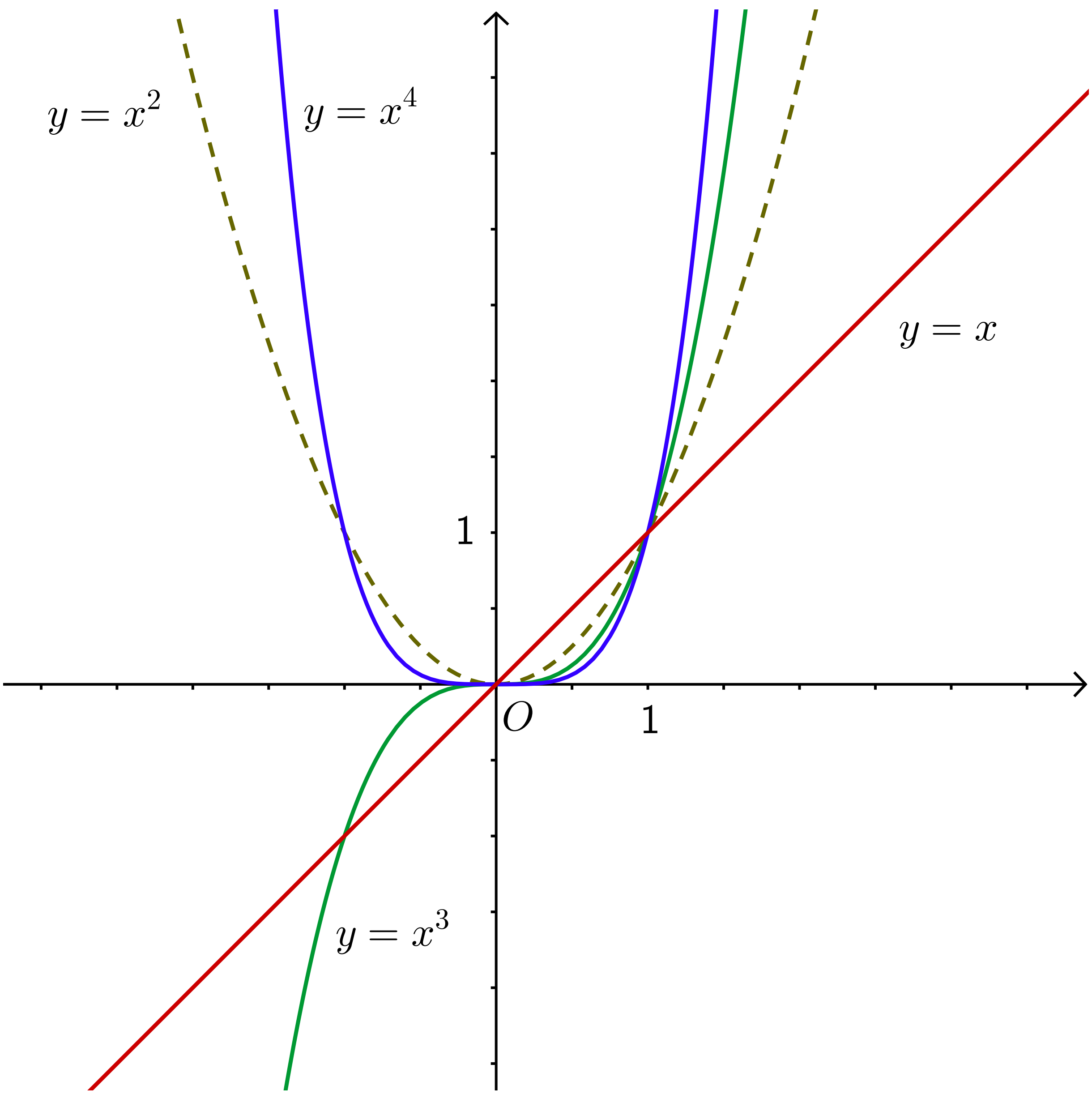


FIGURE 12 – Les courbes des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$