UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE **Année 2013-2014**

LICENCE d'ÉCONOMIE FINANCE et GESTION
Première année - Semestre 1

DIV 101 - Soutien en Mathématiques

Partiel - Seconde session - Juin 2014 - 2h00

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 4 points

1. Effectuer la division euclidienne de $P(X) = 2X^4 + 7X^3 + 4X^2 + 2X - 3$ par $Q(X) = X^2 + X + 1$
2. En déduire la résolution de l'inéquation $(I)\ :\ 2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 2x - 3 \geq 0$

Exercice 2 - 8 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$(E_1)\ :\ \dfrac{2}{3}x - 5 = \dfrac{3}{4}$ $\qquad$ $(I_1)\ :\ \dfrac{x}{x+1} \leq 1$

$(E_2)\ :\ \ln(x+2) = \ln(3-x)$ $\qquad$ $(I_2)\ :\ \ln x \leq 1$

$(E_3)\ :\ e^{2x+1} = 1$ $\qquad$ $(I_3)\ :\ (e^x - 4)(2e^x - 1) > 0$

$(E_4)\ :\ x^{\frac{3}{2}} = 8$

Exercice 3 - 5 points

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f_1\ :\ f_1(x) = 3x^3 - x^2 + 7x - 1$ sur $I = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_2\ :\ f_2(x) = \dfrac{2x-3}{1-x}$ sur $I =]1;+\infty[$

$f_3\ :\ f_3(x) = (2x+1) \times \sqrt{x}$ sur $=]0;+\infty[$ $\qquad$ $f_4\ :\ f_4(x) = (x^2+1)^2$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_5\ :\ f_5(x) = xe^{3x}$ sur $I = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_6\ :\ f_6(x) = \dfrac{x + \ln x}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

Exercice 4 - 3 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x+4}{x^2+1}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction dérivée f' de f est définie par $f'(x) = \dfrac{-3x^2 - 8x + 3}{(x^2+1)^2}$.

   Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ afin d'en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

Licence d'Économie et Gestion **L1 - S1**

U.F.R. Economie et Gestion

DIV 101 - Soutien en Mathématiques

Partiel - Seconde session - Juin 2014 - Corrigé

Exercice 1 - 4 points

1. • **1,5 Point**

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2X^4 & +7X^3 & +4X^2 & +2X & -3 & X^2 \quad +X \quad +1 \\
\cline{6-6}
-(2X^4 & +2X^3 & +2X^2) & & & 2X^2 \quad +5X \quad -3 \\
\cline{1-3}
 & 5X^3 & +2X^2 & +2X & & \\
 & -(5X^3 & +5X^2 & +5X) & & \\
\cline{2-4}
 & & -3X^2 & -3X & -3 & \\
 & & -(-3X^2 & -3X & -3) & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Conclusion : $2X^4 + 7X^3 + 4X^2 + 2X - 3 = (X^2 + X + 1)(2X^2 + 5X - 3)$

2. • **2,5 Points** D'après ce qui précède : $(E) \iff (x^2 + x + 1)(2x^2 + 5x - 3) \geq 0$
Le discriminant de $Q(x) = x^2 + x + 1$ est égal à $-3 < 0$: donc $Q(x)$ ne possède pas de racine et est toujours du signe de « $a = 1$ »
Le discriminant de $D(x) = 2x^2 + 5x - 3$ est $\Delta = 49 > 0$: $D(x)$ possède deux racines réelles : $x_1 = -3$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x^2 + x + 1$		$+$		$+$		$+$	
$2x^2 + 5x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : $\mathcal{S}_I =]-\infty; -3] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Exercice 2 - 8 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

• **1 Point** (E_1) : $\dfrac{2}{3}x - 5 = \dfrac{3}{4} \iff \dfrac{2}{3}x = \dfrac{23}{4} \iff x = \dfrac{69}{8}$. Donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{69}{8}\right\}$

• **1 Point** (I_1) : $\dfrac{x}{x+1} \leq 1 \iff \dfrac{x}{x+1} - 1 \leq 0 \iff \dfrac{x-(x+1)}{x+1} \leq 0 \iff \dfrac{-1}{x+1} \leq 0 \iff x+1 > 0$. Donc $\mathcal{S} =]-1; +\infty[$

• **1,5 point** (E_2) : $\ln(x+2) = \ln(3-x)$ est définie si et seulement si $x+2 > 0$ et $3 - x > 0 \iff x > -2$ et $x < 3$ donc (E_2) est définie sur $]-2;3[$

$(E_2) \iff x \in]-2;3[$ et $x + 2 = 3 - x \iff x = \dfrac{1}{2} \in]-2;3[$ donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

• **1 point** (I_2) : $\ln x \leq 1 \iff 0 < x \leq e$ donc $\mathcal{S} =]0; e]$

• **0,5 Point** (E_3) : $e^{2x+1} = 1 \iff 2x + 1 = 0 \iff x = \dfrac{-1}{2}$. Donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$

• **2 points** (I_3) : $(e^x - 4)(2e^x - 1) > 0$

On résout les deux inéquations : $e^x - 4 \geq 0 \iff e^x \geq 4 \iff x \geq \ln 4 = 2\ln 2$

et $2e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq \dfrac{1}{2} \iff x \geq \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2$. On a alors le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$2\ln 2$		$+\infty$
$e^x - 4$		$-$		$-$	0	$+$	
$2e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(e^x - 4)(2e^x - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} =]-\infty; -\ln 2[\cup]2\ln 2, +\infty[$

• **1 point** (E_4) : $x^{\frac{3}{2}} = 8 \iff x = 8^{\frac{2}{3}} \iff x = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} \iff x = 2^2 = 4$ donc $\mathcal{S} = \{4\}$

Exercice 3 - 5 points

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

• **0,5 Point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = 9x^2 - 2x + 7$

• **1 Point** $\forall x \in]1\,;+\infty[,\ f_2'(x) = \dfrac{2(1-x) - (-1)(2x-3)}{(1-x)^2} = \dfrac{-1}{(1-x)^2}$

• **1 Point** $\forall x > 0,\ f_3'(x) = 2\sqrt{x} + (2x+1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6x+1}{2\sqrt{x}}$

• **1 Point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_4'(x) = 2(2x)(x^2+1) = 4x^3 + 4x$

• **0,5 Point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_5'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = (3x+1)e^{3x}$

• **1 Point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_6'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

Exercice 4 - 4 points

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{3x+4}{x^2+1}$.

1. **• 0,5 point** f est définie en x si et seulement si $D(x) = x^2 + 1 \neq 0$; or pour tout réel x, $x^2 + 1 \geq 1$: f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. **• 2,5 points** $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{3(x^2+1) - 2x(3x+4)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-3x^2 - 8x + 3}{(x^2+1)^2}$.
   $f'(x)$ est donc du signe de son numérateur $N(x) = -3x^2 - 8x + 3$.
   Le discriminant de $N(x)$ est $\Delta = 100$: N(x) possède donc deux racines réelles $x_1 = -3$ et $x_2 = \dfrac{1}{3}$

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	$\frac{-1}{2}$	$\nearrow$	$4,5$	$\searrow$	

3. **• 1 point** $f(0) = 4$ et $f'(0) = 3$ donc la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(0;4)$ a pour équation $y = 3(x-0) + 4$ soit $y = 3x + 4$.