UNIVERSITÉ DE CERGY

Année 2015-2016

LICENCE d'ÉCONOMIE, FINANCE et GESTION
Première année - Semestre 1

DIV 101 - Soutien en Mathématiques

Partiel - Première Session - Janvier 2016 - 2h00

Exercice 1 - 3 points

On considère les trois droites suivantes, données par leurs équations réduites respectives :

$$\mathcal{D}_1 \ : \ y = \frac{-2}{5}x + \frac{4}{5} \qquad \mathcal{D}_2 \ : \ y = \frac{2x+8}{7} \qquad \mathcal{D}_3 \ : \ y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

1. Pour chacune de ces trois droites donnez deux points à coordonnées entières.
2. Démontrer que les trois droites sont concourantes en un point I dont vous préciserez les coordonnées.

Exercice 2 - 5 points

On considère le polynôme $P(X) = 2X^3 + 9X^2 + 7X - 6$

1. Justifier que le polynôme $N(X) = X + 2$ divise $P(X)$, puis effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $N(X)$.
2. En déduire la factorisation de $P(X)$ en un produit de trois polynômes de degré 1.
3. Résoudre l'inéquation $(I) \ : \ 2X^3 + 9X^2 + 7X - 6 \leq 0$

Exercice 3 - 4 points

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f_1 \ : \ f_1(x) = \dfrac{5x}{3} + \dfrac{3}{5x}$ sur $I =]0; +\infty[$ $\qquad$ $f_2 \ : \ f_2(x) = (-x^2 + 2x + 5)^3$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_3 \ : \ f_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$ sur $I =]-\infty; 5[$ $\qquad$ $f_4 \ : \ f_4(x) = \ln(3x^2 + 7)$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_5 \ : \ f_5(x) = xe^{-x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

Exercice 4 - 7 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{8}{x^2 - 2x - 3}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Résoudre l'équation $(E) \ : \ x^2 - 2x - 3 = 0$. En déduire l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$: que peut-on en déduire comme conséquence graphique ?
3. Étudier le signe de $D(x) = x^2 - 2x - 3$. En déduire les limites de f en $x_1 = -1$ puis en $x_2 = 3$: que peut-on en déduire comme conséquence graphique ?

4. Démontrer que la fonction dérivée f' de f est définie par $f'(x) = \dfrac{-16x+16}{(x^2-2x-3)^2}$.

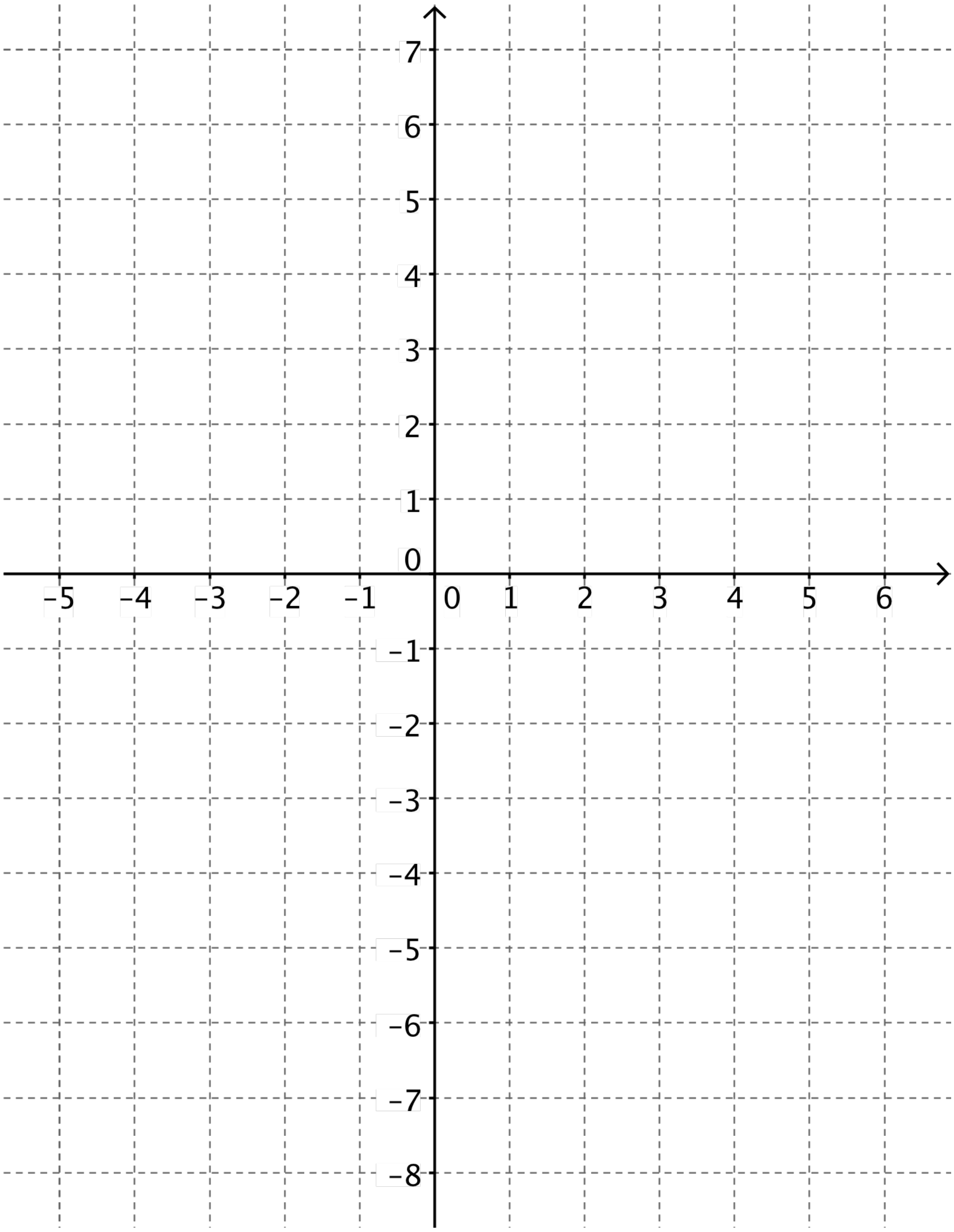
   Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathcal{D}_f$

5. Résumer les variations de f dans un tableau : indiquer les limites et l'extremum local.

6. Tracez $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes dans le repère fourni en annexe.

NE PAS INSCRIRE VOTRE NOM

ANNEXE à L'EXERCICE 4 : à rendre avec votre copie



UNIVERSITÉ DE CERGY

Année 2015-2016

LICENCE d'ÉCONOMIE, FINANCE et GESTION
Première année - Semestre 1

DIV 101 - Soutien en Mathématiques

Partiel - Première Session - Janvier 2016 - 2h00

Exercice 1 - 3 points

$$\mathcal{D}_1 \,:\, y = \frac{-2}{5}x + \frac{4}{5} \qquad \mathcal{D}_2 \,:\, y = \frac{2x+8}{7} \qquad \mathcal{D}_3 \,:\, y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

1. • **1,5 point** $\mathcal{D}_1$ passe par $A(-3;2)$ et $A'(2;0)$
   $\mathcal{D}_2$ passe par $B(-4;0)$ et $A'(3;2)$
   $\mathcal{D}_3$ passe par $C(-2;-1)$ et $A'(1;3)$
2. • **1,5 point** On étudie tout d'abord l'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$: pour cela on résout l'équation :

$$\frac{-2}{5}x + \frac{4}{5} = \frac{2}{7}x + \frac{8}{7} \Longleftrightarrow \frac{-2}{5}x - \frac{2}{7}x = \frac{8}{7} - \frac{4}{5} \Longleftrightarrow \frac{-24}{35}x = \frac{12}{35} \Longleftrightarrow x = \frac{-1}{2}$$

   Une fois obtenue l'abscisse $x_I = \dfrac{-1}{2}$ du point d'intersection, on obtient son ordonnée en utilisant l'une ou l'autre des équations de $\mathcal{D}_1$ ou $\mathcal{D}_2$: on trouve $y_I = 1$
   On vérifie que le point $I(-1/2;1)$ appartient à $\mathcal{D}_3$: en effet : $\dfrac{4}{3}x_I + \dfrac{5}{3} = \dfrac{-2}{3} + \dfrac{5}{3} = 1 = y_I$
   Conclusion : les trois droites sont bien concourantes en $I(-1/2;1)$

Exercice 2 - 5 points

1. • **0,5 point** On calcule $P(-2) = 2\times(-2)^3 + 9\times 2^2 + 7\times 2 - 6 = -16 + 36 - 14 - 6 = 0$ donc -2 est une racine de P et $N(X) = X + 2$ divise $P(X)$.
   • **1,5 point**

$$\begin{array}{rrrr|l}
2X^3 & +9X^2 & +7X & -6 & X \quad +2 \\ \cline{5-5}
-(2X^3 & +4X^2) & & & 2X^2 \; +5X \; -3 \\ \cline{1-2}
 & 5X^2 & +7X & & \\
 & -(5X^2 & +10X) & & \\ \cline{2-3}
 & & -3X & -6 & \\
 & & -(-3X & -6) & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

   • **0,5 point** Conclusion : $2X^3 + 9X^2 + 7X - 6 = (X+2)(2X^2 + 5X - 3)$
2. • **1 point** Notons $Q(X) = 2X^2 + 5X - 3$: son discriminant est $\Delta = 25 + 24 = 49$: $Q(X)$ possède deux racines : $X_1 = -3$ et $X_2 = \dfrac{1}{2}$

Donc $Q(X) = 2(X+3)\left(X - \frac{1}{2}\right)$

et $P(X) = 2(X+2)(X+3)\left(X - \frac{1}{2}\right) = (X+2)(X+3)(2X-1)$

3. • **1,5 point** On étudie le signe de $P(X)$ dans un tableau de signes

X	$-\infty$		-3		-2		$1/2$		$+\infty$
$X+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$X+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2X-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(X)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $P(X) \leq 0 \iff x \in]-\infty; -3] \cup [-2; 1/2]$

Exercice 3 - 4 points

- **1 point** $\forall x > 0,\ f_1'(x) = \frac{5}{3} - \frac{3}{5x^2}$
- **0,5 point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2'(x) = 3(-2x+2)(-x^2+2x+5)^2$
- **1 point** $\forall x < 5,\ \ f_3'(x) = \frac{-\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}}{5-x} = \frac{1}{2(5-x)\sqrt{5-x}} = \frac{1}{2(5-x)^{3/2}}$
- **0,5 point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_4'(x) = \frac{6x}{3x^2+7}$
- **1 point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_5'(x) = e^{-x^2} + x(-2xe^{-x^2}) = (-2x^2+1)e^{-x^2}$

Exercice 4 - 8 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{8}{x^2 - 2x - 3}$.

1. • **1 point** Le discriminant de (E) : $x^2 - 2x - 3 = 0$ est $\Delta = 16$. (E) possède donc 2 solutions : $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\,-1; 3\}$
2. • **1 point** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8}{x^2} = 0$. De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.
3. • **2 points**

   (0,5 pt) D'après la résolution de (E), on connaît le signe de $D(x)$:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   (0,5 pt) • Limite en $x_1 = -1$. On a : $\lim\limits_{x \to -1} x^2 - 2x - 3 = 0$

   D'après le tableau de signes ci-dessus : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$

   (0,5 pt) • Limite en $x_1 = 3$. De même, $\lim\limits_{x \to 3} x^2 - 2x - 3 = 0$

   D'après le tableau de signes ci-dessus : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$

   (0,5 pt) La courbe $\mathcal{C}_f$ possède deux asymptotes verticales : les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$.

4. • **1,5 point**

(0,5 pt) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;3\} : f'(x) = \dfrac{-8(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2} = \dfrac{-16x+16}{(x^2-2x-3)^2}$.

(1 pt)

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$(-16x+16)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x^2-2x-3)^2$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	

5. • **1 point**

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

6. • **1,5 point**