UNIVERSITÉ DE CERGY

Année 2014-2015

LICENCE d'ÉCONOMIE FINANCE et GESTION
Première année - Semestre 1

DIV 101 - Soutien en Mathématiques

Partiel - Première session - Janvier 2015 - 2h00

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte de l'orthographe et du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 3 points

Soient D la droite passant par $A(-1;1)$ et $B(1;7)$ et D' la droite de coefficient directeur -1 et passant par $C(2;0)$

1. Déterminer une équation réduite de D et de D'
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D et D'

Exercice 2 - 4 points

1. Effectuer la division euclidienne de $P(X) = X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 6$ par $Q(X) = X^2 - 1$
2. En déduire la résolution de l'inéquation $(I)\ :\ x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 > 0$

Exercice 3 - 6 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$(E_1)\ :\ x^2 + 2x - 2 = 0$ $\qquad$ $(I_1)\ :\ \dfrac{x+1}{x} \leq 1$

$(E_2)\ :\ \ln(x) = \ln(1-x)$ $\qquad$ $(I_2)\ :\ \ln x^2 > 2$

$(E_3)\ :\ 3^t = 10$ $\qquad$ $(I_3)\ :\ e^{1-2x} \geq 3$

Exercice 4 - 4 points

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f_1\ :\ f_1(x) = \dfrac{x}{5} - \dfrac{3}{x}$ sur $I =]0;+\infty[$ $\qquad$ $f_2\ :\ f_2(x) = \dfrac{5x^2 - 3x}{2-x}$ sur $I =]2;+\infty[$

$f_3\ :\ f_3(x) = \dfrac{7}{(3x^2+1)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_4\ :\ f_4(x) = (-x^2 + 5x + 7)^3$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_5\ :\ f_5(x) = (\ln(x))^2$ sur $I =]0;+\infty[$

Exercice 5 - 3 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de f. En déduire les variations de f.

UNIVERSITÉ DE CERGY — **Licence d'Économie et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion — **L1 - S1**

DIV 101 - Soutien en Mathématiques

Partiel de Janvier 2015 - Corrigé

Exercice 1 - 3 points

1. • **1,5 Point** Le coefficient directeur de D est $a = \dfrac{7-1}{1-(-1)} = 3$ et D a pour équation $y = 3x + b$, de plus $y_A = 3x_A + b \iff b = 4$. D a donc pour équation $y = 3x + 4$
   D' a une équation de la forme $y = -1x + b'$. De plus, $y_C = -x_C + b' \iff b' = 2$ et D' a donc pour équation $y = -x + 2$
2. • **1,5 Point** Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection I de D et D', on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 3x+4 \\ y & = & -x+2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & -x+2 \\ 0 & = & 4x+2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{-1}{2} \\ y & = & \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \qquad \text{donc } I\left(\frac{-1}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$$

Exercice 2 - 4,5 points

1. • **1,5 Point**

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -X^3 & -7X^2 & +X & +6 & X^2 \qquad -1 \\ \cline{6-6}
-(X^4 & & -X^2) & & & X^2 \ -X \ -6 \\ \cline{1-3}
& -X^3 & -6X^2 & +X & & \\
& -(-X^3 & & +X) & & \\ \cline{2-4}
& & -6X^2 & & +6 & \\
& & -(-6X^2 & & +6) & \\ \cline{3-5}
& & & & 0 &
\end{array}$$

   Ainsi : $X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 6 = (X^2-1)(X^2-X-6)$
2. • **3 Points** D'après ce qui précède : $(I) \iff (x^2-x-6)(x^2-1) > 0$
   • Le discriminant de $Q(x) = x^2 - x - 6$ est égal à 25 : donc $Q(x)$ possède deux racines $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$
   • $x^2 - 1$ a pour racines -1et 1. On résout (I) à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-x-6		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2-1)(x^2-x-6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]-1; 1[\cup]3; +\infty[$

Exercice 3 - 6 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

• **1 Point** (E_1) : $x^2+2x-2=0$. Le discriminant est $\Delta=12$: (E_1) possède donc deux solutions $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{12}}{2}=-1-\sqrt{3}$ et $x_2=-1+\sqrt{3}$

• **1 Point** (I_1) : $\dfrac{x+1}{x}\leq 1 \Longleftrightarrow \dfrac{x+1}{x}-1\leq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x+1-x}{x}\leq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x}\leq 0 \Longleftrightarrow x<0$.
Donc $\mathcal{S}=\mathbb{R}_-^*$

• **1 Point** (E_2) : $\ln(x)=\ln(1-x)$: (E_2) est définie si et seulement si $x>0$ et $1-x>0$ c-a-d. $x\in\mathcal{D}=]0;1[$

$$\begin{aligned}(E_2) &\Longleftrightarrow x=1-x \text{ et } x\in\mathcal{D}\\ &\Longleftrightarrow x=\frac{1}{2}\in\mathcal{D}. \qquad \text{Donc} \quad \mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}\right\}\end{aligned}$$

• **1 Point** (I_2) : $\ln x^2>2$ est définie si et seulement si $x^2>0 \Longleftrightarrow x\neq 0$
$(I_2)\Longleftrightarrow x^2>e^{>}2$. Donc $\mathcal{S}=]-\infty;-e[\,\cup]e;+\infty[$

• **1 Point** (E_3) : $3^t=10 \Longleftrightarrow e^{t\ln 3}=10 \Longleftrightarrow t=\dfrac{\ln 10}{\ln 3}$. Donc $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{\ln 10}{\ln 3}\right\}$

• **1 Point** (I_3) : $e^{1-2x}\geq 3 \Longleftrightarrow 1-2x\geq \ln 3 \Longleftrightarrow -2x\geq \ln 3-1 \Longleftrightarrow x\leq \dfrac{\ln 3-1}{-2}$
Donc $\mathcal{S}=\left]-\infty;\dfrac{1-\ \ln 3}{2}\right]$

Exercice 4 - 4,5 points

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

• **1 Point** $\forall x\in]0;+\infty[,\ f_1'(x)=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{x^2}$

• **1 Point** $\forall x\in]2\ ;+\infty[,\ f_2'(x)=\dfrac{(10x-3)(2-x)-(-1)(5x^2-3x)}{(2-x)^2}=\dfrac{-5x^2+20x-6}{(2-x)^2}$

• **1 Point** $\forall x\in\mathbb{R},\ f_3'(x)=\dfrac{-14(6x)}{(3x^2+1)^3}=\dfrac{-84x}{(3x^2+1)^3}$

• **0,5 Point** $\forall x\in\mathbb{R},\ f_4'(x)=3(-2x+5)(-x^2+5x+7)^2$

• **1 Point** $\forall x\in]0;+\infty[,\ f_6'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$

Exercice 5 - 3 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x^2}$

1. • **1 Point** $\lim\limits_{x\to+\infty}-x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x^2}=0$
2. • **2 Points** $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=-2xe^{-x^2}$. $f'(x)$ est du signe de $-2x$ car $e^{-x^2}>0$ pour tout x. On a donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0