UNIVERSITÉ DE CERGY

Année 2013-2014

LICENCE d'ÉCONOMIE FINANCE et GESTION
Première année - Semestre 1

DIV 101 - Soutien en Mathématiques

Partiel - Première session - Décembre 2013 - 2h00

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte de l'orthographe et du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 3 points

1. Factoriser le polynôme $P(x) = 2x^2 - x - 3$
2. En déduire la résolution de l'inéquation $(I)\ :\ \dfrac{2x^2 - x - 3}{4 - x} \leq 0$

Exercice 2 - 3 points

1. Effectuer la division euclidienne de $P(X) = X^4 - 2X^3 - 5X^2 + 6X$ par $Q(X) = X^2 - X$
2. En déduire la résolution de l'équation $(E)\ :\ x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

Exercice 3 - 7 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$(E_1)\ :\ \dfrac{1}{3}x + 2 = \dfrac{3}{4}$ $\qquad$ $(I_1)\ :\ \dfrac{x+1}{x} \leq 1$

$(E_2)\ :\ \ln(x^2) = \ln(2x+3)$ $\qquad$ $(I_2)\ :\ \ln x > 2$

$(E_3)\ :\ e^{2x} = 1$ $\qquad$ $(I_3)\ :\ (e^x + 4)(e^x - 2) > 0$

Exercice 4 - 4 points

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f_1\ :\ f_1(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ sur $I = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_2\ :\ f_2(x) = \dfrac{5x - 3}{7 - 2x}$ sur $I = \left]\dfrac{7}{2}\ ;+\infty\right[$

$f_3\ :\ f_3(x) = x \times \sqrt{2x+1}$ sur $= \left]\dfrac{-1}{2};+\infty\right[$ $\qquad$ $f_4\ :\ f_4(x) = (x^2 + x - 5)^3$ sur $I = \mathbb{R}$

$f_5\ :\ f_5(x) = e^{3x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_6\ :\ f_6(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $I = \mathbb{R}$

Exercice 5 - 3 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 1 - e^x$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
2. En déduire les variations de f.

DIV 101 - Soutien en Mathématiques

Partiel de décembre 2013 - Corrigé

Exercice 1 - 3 points

1. • **1 Point** Le discriminant du polynôme $P(x) = 2x^2 - x - 3$ est $\Delta = 25$, $P(x)$ possède donc deux racines réelles $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{3}{2}$ et $P(x) = 2(x+1)(x - \frac{3}{2})$
2. • **2 Points** En déduire la résolution de l'inéquation (I) : $\frac{2x^2 - x - 3}{4 - x} \leq 0$
   On s'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
$2(x+1)(x - \frac{1}{2})$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$4 - x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{P(x)}{4 - x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

   Donc $\mathcal{S}_I = \left[-1; \frac{3}{2}\right] \cup]4; +\infty[$

Exercice 2 - 3,5 points

1. • **1,5 Point**

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^4 & -2X^3 & -5X^2 & +6X & X^2 \ -X \\
\cline{5-5}
-(X^4 & -X^3) & & & X^2 \ -X \ -6 \\
\cline{1-2}
 & -X^3 & -5X^2 & & \\
 & -(-X^3 & +X^2) & & \\
\cline{2-3}
 & & -6X^2 & +6X & \\
 & & -(-6X^2 & +6X) & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 & \\
\end{array}
$$

2. • **2 Points** D'après ce qui précède : $(E) \Longleftrightarrow (x^2 - x - 6)(x^2 - x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$ ou $x^2 - x = 0$
   Le discriminant de $Q(x) = x^2 - x - 6$ est égal à 25 : donc $Q(x)$ possède deux racines $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$
   $x^2 - x = 0 \Longleftrightarrow x(x-1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$
   Conclusion : (E) possède 4 solutions : $\mathcal{S} = \{-2; 0; 1; 3\}$

Exercice 3 - 6,5 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

• **1 Point** (E_1) : $\dfrac{1}{3}x+2=\dfrac{3}{4} \iff \dfrac{1}{3}x=\dfrac{-5}{4} \iff x=\dfrac{-15}{4}$. Donc $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{-15}{4}\right\}$

• **1 Point** (I_1) : $\dfrac{x+1}{x} \leq 1 \iff \dfrac{x+1}{x}-1 \leq 0 \iff \dfrac{x+1-x}{x} \leq 0 \iff \dfrac{1}{x} \leq 0 \iff x<0$.
Donc $\mathcal{S}=\mathbb{R}_-^*$

• **2 Points** (E_2) : $\ln(x^2)=\ln(2x+3)$: (E_2) est définie si et seulement si $x^2>0$ et $2x+3>0$ c-a-d. $x \in \mathcal{D}=]\dfrac{-3}{2},0[\cup]0;+\infty[$

$$\begin{aligned} (E_2) &\iff x^2=2x+3 \text{ et } x \in \mathcal{D} \\ &\iff x^2-2x-3=0 \text{ et } x \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $p(x)=x^2-2x-3$ est égal à 16 : $P(x)$ possède donc deux racines $x_1=-1 \in \mathcal{D}$ et $x_2=3 \in \mathcal{D}$
Donc $\mathcal{S}=\{-1;3\}$

• **0,5 Point** (I_2) : $\ln x>2 \iff x>e^2$. Donc $\mathcal{S}=]e^2;+\infty[$

• **0,5 Point** (E_3) : $e^{2x}=1 \iff 2x=0 \iff x=0$. Donc $\mathcal{S}=\{0\}$

• **1,5 Point** (I_3) : $(e^x+4)(e^x-2)>0$
On remarque que pour tout réel x, $e^x+4>4>0$ donc $(e^x+4)(e^x-2)$ est du signe de e^x-2
On résout l'inéquation $e^x-2>0 \iff e^x>2 \iff x>\ln 2$
Donc $\mathcal{S}=]\ln 2;+\infty[$

Exercice 4 - 4,5 points

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

• **0,5 Point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x)=9x^2-8x+5$

• **1 Point** $\forall x \in \left]\dfrac{7}{2}\,;+\infty\right[,\ f_2'(x)=\dfrac{5(7-2x)-(-2)(5x-3)}{(7-2x)^2}=\dfrac{29}{(7-2x)^2}$

• **1 Point** $\forall x>\dfrac{-1}{2},\ f_3'(x)=\sqrt{2x+1}+x\times\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\dfrac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$

• **1 Point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_4'(x)=3(2x+1)(x^2+x-5)^2$

• **0,5 Point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_5'(x)=3e^{3x+1}$

• **0,5 Point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_6'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

Exercice 5 - 3 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x+1-e^x$

1. • **1 Point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)=3-e^x$
2. • **2 Points** On résout l'inéquation : $3-e^x>0 \iff 3>e^x \iff x<\ln 3$

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$3\ln 3-2$	$\searrow$	