UNIVERSITÉ DE CERGY

Année 2012-2013

LICENCE d'ÉCONOMIE et GESTION
Première année - Semestre 1

DIV 101 - Soutien en Mathématiques

Partiel - Première session - Décembre 2012 - 2h00

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 4 points

On considère le polynôme $P(X) = 2X^3 + X^2 - 13X + 6$

1. Justifier que le polynôme $N(X) = X - 2$ divise $P(X)$, puis effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $N(X)$.
2. En déduire la factorisation de $P(X)$ en un produit de trois polynômes de degrés 1
3. Résoudre l'équation $(E)\ :\ 2X^3 + X^2 - 13X + 6 = 0$

Exercice 2 - 8 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$(E_1)\ :\ \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{2} = 3$ $\qquad$ $(I_1)\ :\ \dfrac{2-x}{x-1} \leq 1$

$(E_2)\ :\ \ln(x+2) = \ln(3-x)$ $\qquad$ $(I_2)\ :\ \ln x \leq 1$

$(E_3)\ :\ e^{2x} = 1$ $\qquad$ $(I_3)\ :\ (e^x - 4)(2e^x - 1) > 0$

Exercice 3 - 5 points

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f_1\ :\ f_1(x) = x^2(3x+7)$ sur $I = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_2\ :\ f_2(x) = (x+1)\sqrt{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

$f_3\ :\ f_3(x) = \dfrac{2x+3}{-3x+1}$ sur $I = \left]\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$ $\qquad$ $f_4\ :\ f_4(x) = \dfrac{x - \ln x}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

$f_5\ :\ f_5(x) = \ln(2x-1)$ sur $I = \left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$ $\qquad$ $f_6\ :\ f_6(x) = xe^{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

Exercice 4 - 3 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+5}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction dérivée f' de f est définie par $f'(x) = \dfrac{-x^2-2x+3}{(x^2+2x+5)^2}$.

   Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ afin d'en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1.

UNIVERSITÉ DE CERGY — **Licence d'Économie et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion — **L1 - S1**

DIV 101 - Soutien en Mathématiques

Partiel de décembre 2012 - Corrigé

Exercice 1 - 4,5 points

1. • **0,5 point** On calcule $P(2) = 2 \times 2^3 + 2^2 - 13 \times 2 + 6 = 16 + 4 - 26 + 6 = 0$ donc 2 est une racine de P et $N(X) = X - 2$ divise $P(X)$.

   • **1,5 point**

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2X^3 & +X^2 & -13X & +6 & X \quad -2 \\
\cline{5-5}
-(2X^3 & -4X^2) & & & 2X^2 \; +5X \; -3 \\
\cline{1-2}
 & 5X^2 & -13X & & \\
 & -(5X^2 & -10X) & & \\
\cline{2-3}
 & & -3X & +6 & \\
 & & -(-3X & +6) & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

   • **0,5 point** Conclusion : $2X^3 + X^2 - 13X + 6 = (X - 2)(2X^2 + 5X - 3)$

2. • **1,5 point** Notons $Q(X) = 2X^2+5X-3$: le discriminant de $Q(X)$ est $\Delta = 25+24 = 49$: $Q(X)$ possède deux racines : $X_1 = -3$ et $X_2 = \dfrac{1}{2}$

   Donc $Q(X) = 2(X + 3)\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$ et $P(X) = 2(X - 2)(X + 3)\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$

3. • **0,5 point** Donc $P(X) = 0 \Longleftrightarrow x \in \left\{-3; 2; \dfrac{1}{2}\right\}$

Exercice 2 - 8 points

• **0,5 point** (E_1) : $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{2} = 3 \Longleftrightarrow \dfrac{2}{3}x = \dfrac{7}{2} \Longleftrightarrow x = \dfrac{21}{4}$ donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{21}{4}\right\}$

• **2 points** (I_1) : $\dfrac{2-x}{x-1} \leq 1 \Longleftrightarrow \dfrac{2-x}{x-1} - 1 \leq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{2-x-(x-1)}{x-1} \leq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{-2x+3}{x-1} \leq 0$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-2x+3}{x-1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S} =]-\infty, 1[\cup \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$

• **1,5 point** (E_2) : $\ln(x+2) = \ln(3-x)$ est définie si et seulement si $x + 2 > 0$ et $3 - x > 0 \Longleftrightarrow x > -2$ et $x < 3$ donc (E_2) est définie sur $]-2; 3[$

$(E_2) \Longleftrightarrow x \in]-2; 3[$ et $x + 2 = 3 - x \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \in]-2; 3[$ donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

• **1 point** (I_2) : $\ln x \leq 1 \Longleftrightarrow 0 < x \leq e$ donc $\mathcal{S} =]0; e]$

• **1 point** (E_3) : $e^{2x} = 1 \Longleftrightarrow (e^x)^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow (e^x - 1)(e^x + 1) = 0$
$\Longleftrightarrow e^x = 1$ ou $e^x = -1$. Enfin, $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x = -1$ n'a pas de solution, donc $\mathcal{S} = \{0\}$

• **2 points** (I_3) : $(e^x - 4)(2e^x - 1) > 0$
On résout les deux inéquations : $e^x - 4 \geq 0 \Longleftrightarrow e^x \geq 4 \Longleftrightarrow x \geq \ln 4 = 2\ln 2$
et $2e^x - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow e^x \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$. On a alors le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$2\ln 2$		$+\infty$
$e^x - 4$		$-$		$-$	0	$+$	
$2e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(e^x - 4)(2e^x - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} =]-\infty; -\ln 2[\cup]2\ln 2, +\infty[$

Exercice 3 - 6 points

• **1 point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = 2x(3x+7) + 3x^3 = 9x^2 + 14x$

• **1 point** $\forall x > 0,\ f_2'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}}$

• **1 point** $\forall x > \dfrac{1}{3},\ f_3'(x) = \dfrac{11}{(-3x+1)^2}$

• **1,5 point** $\forall x > 0,\ f_4'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$ • **0,5 point** $\forall x > \dfrac{1}{2},\ f_5'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$

• **1 point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_6'(x) = e^{x^2} + x(2xe^{x^2}) = (2x^2+1)e^{x^2}$

Exercice 4 - 4,5 points

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+5}$.

1. • **1 point** f est définie en x si et seulement si $D(x) = x^2 + 2x + 5 \neq 0$; or le discriminant de $D(x)$ est égal à -16, donc $D(x)$ n'a pas de racine, et ne s'annule pas : f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. • **2,5 points** $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1(x^2+2x+5) - (2x+2)(x+1)}{(x^2+2x+5)^2} = \dfrac{-x^2-2x+3}{(x^2+2x+5)^2}$. $f'(x)$ est donc du signe de son numérateur $N(x) = -x^2 - 2x + 3$.
   Le discriminant de $N(x)$ est $\Delta = 16$: N(x) possède donc deux racines réelles $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	

3. • **1 point** On a $f'(-1) = \dfrac{1}{4}$ et $f(-1) = 0$, donc la tangente $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 a pour équation $y = \dfrac{1}{4}(x+1)$

UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2012-2013**
LICENCE d'ÉCONOMIE et GESTION
Première année - Semestre 1

DIV 101 - Soutien en Mathématiques

Partiel - Seconde session - Juin 2013 - 2h00

Pas de candidat au module de soutien en seconde session

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte de l'orthographe et du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.