

L2 Gestion, 2014 - 2015

Statistique

Examen Session 2 du 24 juin 2015

Durée : 2 heures

*L'objectif ici n'est pas de tout traiter mais, d'en couvrir une part significative de manière convaincante. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Les points 1. et 2. de l'exercice sont indépendants. Vous pourriez vous servir de la table de la loi de Student se trouvant à la page 3.*

**Exercice (11 pts)**

1. Dans un magasin, on suppose qu'à chaque minute, une unité (au maximum) d'un certain produit a 1% de chances d'être vendue. On suppose les achats de ce produit effectués à des temps différents, indépendants les uns des autres.
  - (a) Déterminer la loi de probabilités du nombre d'unités de ce produit vendues en 30 minutes. Calculer la probabilité de vendre au moins une unité de ce produit en 30 minutes.
  - (b) La magasin est ouvert 7h30 minutes (soit 450 minutes) par jour. Quel est le nombre moyen d'unités vendues par jour?
  - (c) Par quelle loi peut-on approcher la loi du nombre d'unités de ce produit vendues en un jour?
  - (d) Chaque matin, le stock de ce produit est reconstitué à 5 unités. Déterminer la probabilité qu'il n'y ait pas rupture de stock pour une journée.
  
2. On s'intéresse aux achats (en €) dans deux parfumerie A et B.
  - (a) Dans la parfumerie A, des études ont montré que ces achats sont (approximativement) distribués selon une loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  et qu'environ 30,85% des achats sont inférieurs à 50€ et 66,87% sont compris entre 50 et 100€. Déterminer l'espérance  $m$  et l'écart-type  $\sigma$ .
  - (b) Dans la parfumerie B, ces achats sont distribués suivant une loi de moyenne  $\mu$  (inconnue) et de variance également inconnue. Sur un échantillon de 65 achats, la moyenne et variance empirique sont respectivement 103 et 11,5. On considère le test 
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 100 \\ H_1 : \mu \neq 100. \end{cases}$$
 Déterminer la statistique du test ainsi que la région critique au seuil  $\alpha = 0,05$ . Conclure.

**Problème (12 pts)**

On fait l'hypothèse que la durée de vie  $X$  d'une ampoule électrique de marque A est une loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{\theta}$  avec  $\theta > 0$ . Ainsi,  $E(X) = \theta$ .  $\theta$  est un paramètre inconnu qu'une association de consommateurs souhaite estimer. Elle achète donc  $n$  ampoules de la marque et mesure leurs durées de vie  $(x_1, \dots, x_n)$  qui est une réalisation du n-échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  issu de  $X$ .

1. On désigne par  $f$  et  $F$  respectivement la densité et la fonction de répartition de  $X$ .

- (a) Rappeler l'expression de  $f$ .
- (b) Déterminer  $F$ .
2. On admet que l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de  $\theta$  est  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .
- (a) Montrer que cet estimateur est sans biais.
- (b) Déterminer l'erreur quadratique moyenne de l'estimation de  $\theta$  par  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .
3. On pose  $m_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ .
- (a) Exprimer la fonction de répartition de  $m_n$  en fonction de  $F$ . En déduire la densité de  $m_n$ .
- (b) Quelle est la loi de  $m_n$ ? En déduire son espérance et sa variance.
4. On suppose que  $m_n$  suit une loi exponentielle de paramètre  $n/\theta$ .
- (a) On rappelle alors que  $E(m_n) = \theta/n$ . En déduire un estimateur sans biais de  $\theta$ . Déterminer la variance de cet estimateur.
- (b) Entre cet estimateur et l'EMV de  $\theta$ , qu'auriez-vous conseillé à l'association?
5. Deux mois, soit environ 1400 heures après le début du test, le cabinet auquel le travail a été confié envoie les résultats suivants : la durée de vie moyenne d'une ampoule de marque A, estimée à l'aide d'essais sur cent ampoules, est de 110000 heures. A votre avis, lequel des deux estimateurs ci-dessus (l'EMV et celui trouvé au 4.) a été utilisé ?

Fractiles d'ordre  $P$  de la loi de Student  $T_v$

$v \backslash P$	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999	0,9995
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
32	0,256	0,530	0,853	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
34	0,255	0,529	0,852	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
36	0,255	0,529	0,852	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
38	0,255	0,529	0,851	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
70	0,254	0,527	0,847	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
90	0,254	0,526	0,846	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
$\infty$	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291