Jeux Sous Forme Extensive

Théorie des Jeux 2016-2017

03 Novembre 2016

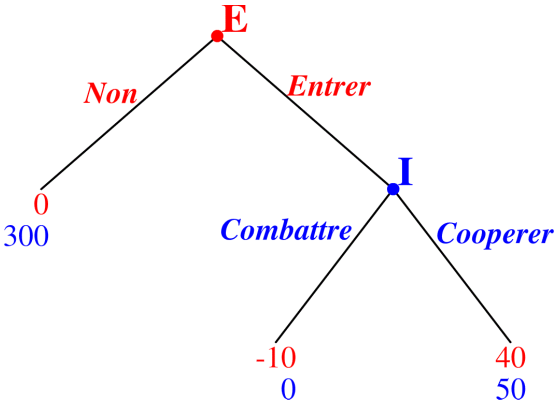
Forme Extensive

- jeux *simultanés*: les decisions sont prises à la même moment
- jeux *séquentiels*: les decisions sont prises à des moments differents
- implications?
  - un joueur peut (ou ne peut pas) observer le choix de l'autre joueur
  - chaque joueur peut jouer plusieurs fois

Example: Jeu d'entrée I

- la problem de l'entrée potentielle d'une nouvelle firme sur un marché d'un monopole
- 2 joueurs: Entrant (E) et Firme Instalée (I)
- l'Entrant doit choisir entre: *Entrer* ou *Ne Pas Entrer*
- I peut choisir entre: *Combattre* (cassant les prix) et *Cooperer* (créer un monopole joint)
- Arbre du jeu

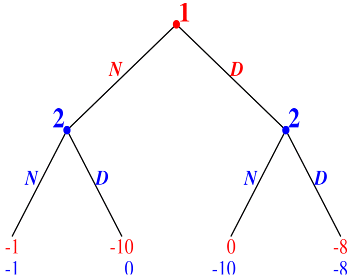
Example: Jeu d'entrée I



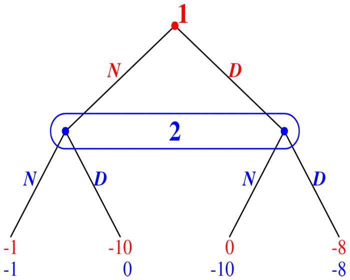
Jeux Sous Forme Extensive

- **arbre de jeu**: noeud initial, des noeuds de décisions, des noeuds termineaux et des branches reliant chaque noeud à ceux qui lui succèdent
- un **ensemble de joueurs**: $i = 1, 2..., n$
- pour chaque noeud de décision: *le nom de joueur* qui a le droit de choisir une action à ce noeud
- pour chaque joueur i : la specification de **l'ensemble des actions** permises à chaque noeud où il doit prendre une decision
- la **specification des gains** de chaque joueur a chaque noeud terminal

- parfois, un joueur qui doit prendre une décision ne connaît pas les choix effectué par les joueurs qui ont joué avant lui
- il ne connaît pas parfaitment le noeud auquel il se situe
- example: dilemme de prisonnier



(a) Info Parfaite



(b) Info Imparfaite

Representation de l'Information

- si un joueur ne peut pas distinguer deux noeuds, nous dirons que ces deux noeuds appartiennent au même ensemble d'information

Definition

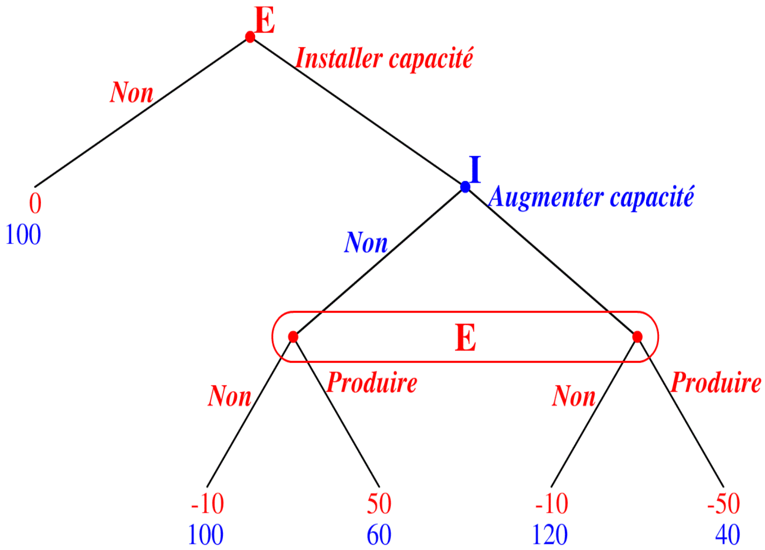
Ensemble d'information h_i : la collection de tous noeuds que le joueur qui doit jouer a cette étape *ne peut pas distinguer*

- implication: chaque noeud contenu dans h_i contient alors exactement le même ensemble d'actions disponibles
- jeu a information *parfaite*: si chaque ensemble d'information a un seul noed (singleton)
- jeu a information *imparfaite*: si au moins un ensemble d'info contient plus d'un noeud

Stratégies vs. actions

- Stratégie $\neq$ Action!
- une stratégie d'un joueur doit specifier une action pour ce joueur *chaque fois* qu'il est susceptible de jouer
  - ex: s'il joue a plusieurs tours, nous devons specifier une action pour *chaque tour*
- Une stratégie $=$ un plan complet d'actions
- example: une version plus détaillée du jeu de l'entrée

Jeu d'entrée II



Jeu d'entrée II: stratégies

- une stratégie de joueur **E** doit specifier une action pour *chaque ensemble d'information*
- example de stratégie pour **E**: *(Non, Produire)*
- observation: la deuxième ensemble d'info du **E** a deux sommets/noeuds mais on a specifié seulement un action. Pourquoi?
- un plan complet?
  - permettre le test d'optimalité des actions: optimalité d'une action dependra de ce qui passe dans la suite de jeu quand le joueur choisit une action alternative
  - couvrir les possibilités d'erreurs

Definition de stratégie

Definition

(Stratégie Pure). Pour joueur i, une stratégie pure est un plan d'actions qui prescrit un action de ce joueur pour chaque de ses ensembles de information h_i

S_i - l'ensemble de stratégies pures s_i de joueur i

Definition

(Stratégie Mixte). Une stratégie mixte est une mesure de probabilités p_i definie sur l'ensemble de stratégies pures S_i du joueur i

P_i - l'ensemble des stratégies mixtes p_i

Jeu d'entrée II

- Joueur **E**: deux ensembles d'information: E_0 et E_1 chacun avec 2 actions
  - alors, **E** a $2 \times 2 = 4$ stratégies
  - $S_E = \{(Installer, Produire); (Installer, NonProduire); (Non, Produire); (Non, NonProduire)\}$
- Joueur **I**: un seul ensemble d'information et il dispose de 2 actions à cet ensemble
  - donc **I** a $1 \times 2 = 2$ stratégies
  - $S_I = \{Augmenter, Non\ Augmenter\}$

Représenter la Forme Normale

Construire un jeu sous forme normale ou *les actions pures* du chaque joueur sont les stratégies pures dans le jeu sous forme-extensive et les paiements sont les paiements terminaux correspondantes à ces stratégies...

example: forme normale jeu d'entréee **II**:

E/I	*Augmenter*	*NonAug*
(Installer, Prod)	$-50, 40$	$50, 60$
(Installer, NonProd)	$-10, 120$	$-10, 100$
(Non, Prod)	$0, 100$	$0, 100$
(Non, NonProd)	$0, 100$	$0, 100$

Forme Normale Reduite

Definition

(Stratégies Equivalentes). Deux stratégies s_i et $s_i^{'}$ sont equivalentes si et seulement si pour tout profil de strategies donné des autres joueurs, le joueur i obtient la même utilité quand il joue s_i ou $s_i^{'}$

$$U_i(s_i, s_{-i}) = U_i(s_i^{'}, s_{-i}), (\forall)s_{-i} \in S_{-i}$$

Definition

(Forme Normale Reduite). S'obtient a partir de la forme normale initiale en remplacant toutes les stratégies equivalentes par une seule stratégie.

Jeu d'entrée II: Forme Normale Reduite

E/I	*Augmenter*	*NonAug*
(Installer, Prod)	$-50, 40$	$50, 60$
(Installer, NonProd)	$-10, 120$	$-10, 100$
(Non, $(\cdot)$*)*	$0, 100$	$0, 100$

- les stratégies *(Non,Prod)* et *(Non,NonProd)* terminent le jeu et donc le choix dans l'ensemble d'info E_1 n'est plus d'importance pour les gains
- Equilibre de Nash? strategies dominées, fonctions de meilleures réponses...
- deux éq. de Nash pures: $\{$*(Installer, Prod); NonAug*$\}$ et $\{$*(Non,*$(\cdot)$*),Augmenter*$\}$

Introduire le joueur Hasard...

- Jeu de Marketing, Straffin (1974)
- 2 joueurs: Firme 1 et Firme 2 choisit *la qualité* de leur produits
  - qualité moyenne: M
  - qualité élevé: E
- *la taille de marché* choisit par Hasard (Nature) avec equiprobabilité:
  - petit marché [P] avec probabilité $\rho = 1/2$
  - grand marché [G] avec probabilité $\rho = 1/2$
- matrices de paiements:

F1/F2	M	E
M	60, 20	20, 60
E	70, 10	50, 30

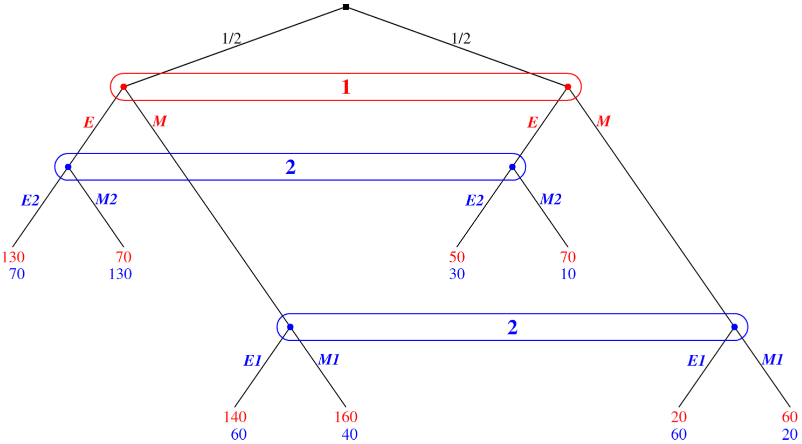
marché petit P

F1/F2	M	E
M	160, 40	140, 60
E	70, 130	130, 70

marché grand G

Structure d'Information: Jeu de Marketing I

- les deux firmes *ne savent pas* le choix du hasard
- Firme 2 *observe* le choix du Firme 1



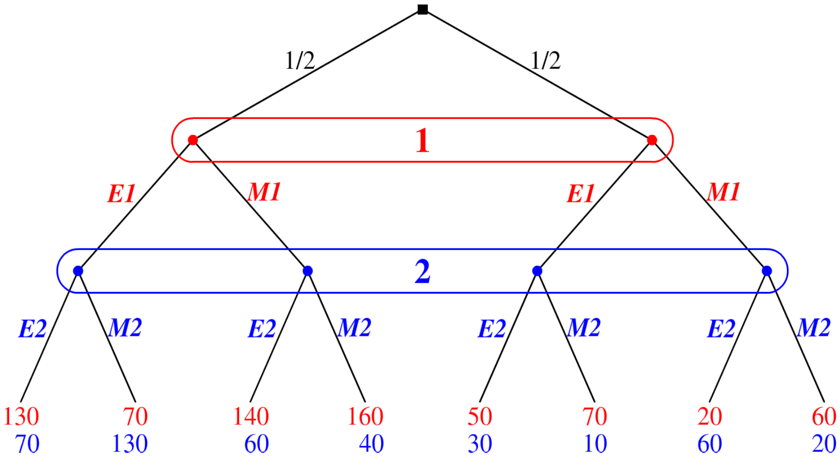
Jeu de Marketing I: Forme Normale

- Firme 1: 1 ensemble d'information avec 2 actions
  - $\Rightarrow 1 \times 2 = 2$ stratégies: $M,\ E$
- Firme 2: 2 ensembles d'information avec 2 actions chaque
  - $\Rightarrow 2 \times 2 = 4$ stratégies: $M_1 M_2, M_1 E_2, E_1 M_2, E_1 E_2$
- matrice des paiements *esperées* sous $\rho_P = \rho_G = \frac{1}{2}$:

F1/F2	$M_1 M_2$	$M_1 E_2$	$E_1 M_2$	$E_1 E_2$
M	$110, 30$	$110, 30$	$80, 60$	$80, 60$
E	$70, 70$	$90, 50$	$70, 70$	$90, 50$

- calculs explicites dans le CM...
- unique équilibre de Nash pure: $(M,\ E_1 M_2)$

- les deux firmes *ne savent pas* le choix du hasard
- ils *ne observent pas* les actions de l'adversaire



Jeu de Marketing II: Forme Normale

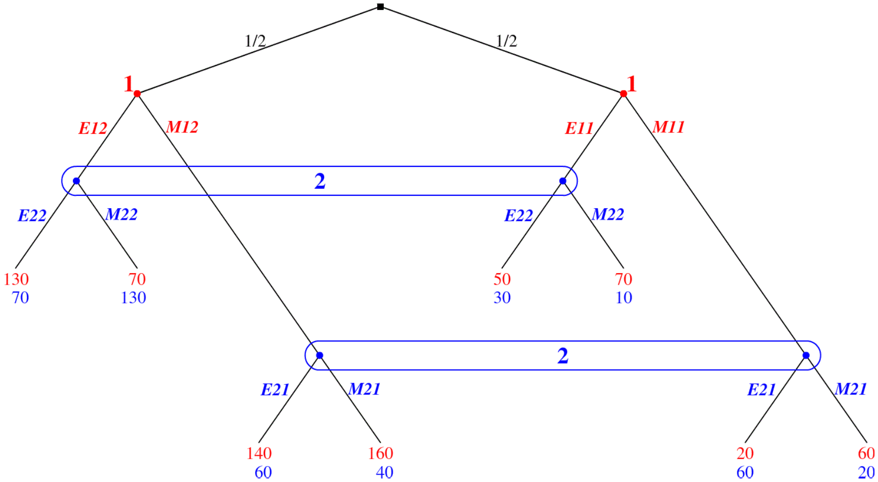
- Firme 1: 1 ensemble d'information avec 2 actions a chaque noeud
  - $\Rightarrow 1 \times 2 = 2$ stratégies: $\{M_1, E_1\}$
- Firme 2: 1 ensemble d'information avec 2 actions a chaque noeud
  - $\Rightarrow 1 \times 2 = 2$ stratégies: $\{M_2, E_2\}$
- matrice des paiements *esperées* sous $\rho_P = \rho_G = \frac{1}{2}$:

F1/F2	M_2	E_2
M_1	$110, 30$	$80, 60$
E_1	$70, 70$	$90, 50$

- pas de équilibre de Nash avec stratégies pures!

Structure d'Information: Jeu de Marketing III

- Firme 1 *observe* le choix du hasard
- Firme 2 *observe* le choix de Firme 1, *mais pas* le choix du hasard



Jeu de Marketing III: Forme Normale

- Firme 1: 2 ensemble d'information avec 2 actions a chaque noeud
  - $\Rightarrow 2 \times 2 = 4$ stratégies: $\{M_{11}M_{12}, M_{11}E_{12}, E_{11}M_{12}, E_{11}E_{12}\}$
- Firme 2: 2 ensemble d'information avec 2 actions a chaque noeud
  - $\Rightarrow 2 \times 2 = 4$ stratégies: $\{M_{21}M_{22}, M_{21}E_{22}, E_{21}M_{22}, E_{21}E_{22}\}$
- matrice des paiements *esperées* sous $\rho_P = \rho_G = \frac{1}{2}$:

F1/F2	$M_{21}M_{22}$	$M_{21}E_{22}$	$E_{21}M_{22}$	$E_{21}E_{22}$
$M_{11}M_{12}$				
$M_{11}E_{12}$				
$E_{11}M_{12}$				
$E_{11}E_{12}$				

- à compléter...
- équilibre(s) des Nash?