

# Introduction à la Théorie des Jeux: Stratégies, Domination, Elimination Itérative

Théorie des Jeux, L3

15 Septembre 2016

- théorie des jeux étudie *l'interaction stratégique*
  - plusieurs agents: joueurs
  - chacun de ces joueurs doit faire un choix d'action
  - l'agent choisit *seul* mais les décisions *des autres* agents ont un impact sur les conséquences/résultats
- illustration: Windows vs MAC, un choix stratégique
  - une entreprise qui doit décider quel type d'ordinateurs acheter
  - utilité dépend pas seulement de sa propre décision PC/MAC mais aussi des actions choisies par les autres entreprises

# Conflits Stratégique: Va en Prison Directement

- *En URSS sous Staline, un directeur d'orchestre voyage dans un train et relit ses partitions. Croyant que les partitions étaient d'un code secret, les agents du KGB l'arrêtent et l'emmènent en prison. Il se défendit en disant qu'il s'agissait simplement du concert pour violon de Tchaïkovski. Le lendemain, un des agents rentre dans sa cellule et lui dit : « Vous avez intérêt à tout avouer. On a arrêté ton ami Tchaïkovski et il est déjà en train de parler ».*
- le deal proposé par le KGB qui est le suivant:
  - Si aucun des deux ne dénonce l'autre, les deux sortent en **3 ans** de prison.
  - Si seulement l'un d'eux dénonce l'autre, alors le dénonciateur passe **1 an** en prison et le dénoncé **25 ans**.
  - Si les deux se dénoncent l'un l'autre, les deux ont pour **10 ans** en prison.
- que doit faire le directeur d'orchestre?

# Conflits Stratégiques: Va en Prison Directement

- on peut résumer ces informations dans un tableau
- les actions du directeur d'orchestre (D.O.) sont représentées par les lignes et celles de Mr. Tchaïkovski (T) par les colonnes
- conséquences pour D.O. en années de prison. Une année de prison donne un paiement de -1 à chaque agent

D.O.\T	Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Dénoncer	-10, -10	-1, -25
Ne Pas Dénoncer	-25, -1	-3, -3

# Conflits Stratégiques: Dilemme du prisonnier

- D.O. préfère strictement la ligne d'en haut (dénoncer) à celle d'en bas (ne pas dénoncer) car  $-10 > -25$  et  $-1 > -3$
- T. préfère strictement dénoncer le D.O. (car ses paiements sur la colonne de gauche sont strictement supérieurs à ceux de la colonne de droite)
- la théorie nous donne une prédiction : les deux prisonniers vont se dénoncer l'un l'autre et passer dix années en prison.
- *Dilemme du prisonnier:*
  - le mieux pour tous les deux est de ne pas se dénoncer l'un l'autre
  - mais chaque joueur a une forte incitation à dénoncer l'autre

- on s'intéresse au temps de trajet entre deux villes

No. de voitures (en milliers)	0	5	10	15	20	25
Temps de trajet (en min)	30	35	40	45	50	55

- scénario 1: pas de transport en commun: congestion
- scénario 2: ligne de métro, temps de trajet 40 minutes
- question: quel sera le temps de trajet et le nombre de voitures sur la route dans l'équilibre (où aucun des agents n'a intérêt à se comporter autrement) ?

# Qu'est ce qu'un jeu?

- on a trois ingrédients fondamentaux pour pouvoir analyser la prise stratégique de décisions (un jeu).
- ① l'ensemble des **joueurs**:  $N$
- ② l'ensemble des **actions**  $a_i$  pour chaque joueur  $i$ :  $A_i$
- ③ les **paiements** ou utilités obtenu par chaque joueur  $i$  pour toute combinaison possible des actions:  $U_i(a_i, a_{-i})$
- la *forme normale* d'un jeu:

$$G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N} \rangle$$

- s'il n'y a pas d'ordre dans le jeu: prise de *décision simultanée*
  - les joueurs ne connaissent pas les actions prises par les autres joueurs avant de prendre leur décision
- si chaque joueur joue à son tour, on parlera de *décision séquentielle*
  - les joueurs observent (information parfaite) ou ne observent pas (information imparfaite) le choix de l'adversaire



- si le joueur utilise une *stratégie pure*, il choisit une action de manière *certaine* (avec probabilité 1)
- si le joueur joue un *stratégie mixte*, il choisit différentes actions avec probabilité positive (par ex. tirage au sort)
- dilemme du prisonnier:
  - Le D.O. choisit l'action « Dénoncer » : il s'agit d'une stratégie pure.
  - Le D.O. choisit d'utiliser l'action « Dénoncer » avec probabilité  $\frac{1}{2}$  et l'action « Ne Pas Dénoncer » avec probabilité  $\frac{1}{2}$  : il s'agit d'une stratégie mixte.

# Stratégies dominantes et stratégies dominées

- une stratégie est dite dominante si le joueur obtient une utilité strictement supérieure à celle qu'il obtient avec n'importe qu'elle autre stratégie, *indépendamment* des stratégies des autres joueurs
- si un joueur a une telle stratégie, il peut la choisir sans se soucier des stratégies des autres joueurs. Si un joueur a une stratégie dominante, il l'utilise toujours.
- exemple:

D.O \ T	Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Dénoncer	-10, -10	-1, -25
Ne Pas Dénoncer	-25, -1	-3, -3

- Q: stratégie dominante pour D.O?

# Stratégies dominantes et stratégies dominées

Une stratégie est dite *strictement dominée* si le joueur obtient une utilité strictement inférieure à celle qu'il obtient avec autre stratégie, indépendamment des stratégies des autres joueurs.

## Definition

(Domination Stricte). Soient  $a_i$  et  $a'_i$  deux strategies (mixtes) du joueur  $i$ .  $a_i$  est *strictement dominée* par  $a'_i$  si, et seulement si:

$$(\forall) a_{-i} \in A_{-i}, U_i(a_i, a_{-i}) < U_i(a'_i, a_{-i})$$

- exemple:

D.O \ T	Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Dénoncer	-10, -10	-1, -25
Appeler son Avocat	-5, -7	-5, -7
Ne Pas Dénoncer	-25, -1	-3, -3

- Q: stratégie strictement dominée pour D.O?

## Definition

(Domination Faible). Soient  $a_i$  et  $a'_i$  deux stratégies (mixtes) du joueur  $i$ .  $a_i$  est *faiblement dominée* par  $a'_i$  si:

$$(\forall) a_{-i} \in A_{-i}, U_i(a_i, a_{-i}) \leq U_i(a'_i, a_{-i})$$

$$(\exists) a_{-i} \in A_{-i}, U_i(a_i, a_{-i}) < U_i(a'_i, a_{-i})$$

- exemple:

J1 \ J2	Cinéma	Restaurant
Cinéma	1, 1	1, 0
Restaurant	1, 0	0, 0

- Q: stratégie faiblement dominée pour J1?

- 1 est ce qu'il existe une stratégie dominante?
  - si oui, le joueur l'utilise car elle maximise son utilité
  - sinon on doit passer à l'étape 2.
- 2 est ce qu'il existe des stratégies *strictement* dominées?
  - Si oui, on peut les éliminer du jeu car un joueur rationnel ne les utilise pas.
- 3 une fois éliminées, on applique les étapes 1 et 2 au jeu réduit jusqu'à ce qui ne reste plus de stratégies dominantes ou strictement dominées.

- exemple:

J1 \ J2	L	M	R
U	2, 2	1, 1	4, 0
D	1, 2	4, 1	3, 5

- J2: M strictement dominé par L; après pour J1: D strictement dominé par U
- résultat du elimination successive des stratégies strictement dominées: profile (U,L)

# Elimination des stratégies faiblement dominées?

- l'ordre de élimination est importante, on peut arriver à des résultats différentes avec différentes séquences d'élimination
- exemple:

J1 \ J2	L	R
T	1, 1	0, 0
M	1, 1	2, 1
B	0, 0	2, 1

- T et B sont faiblement dominées par M

# Elimination des stratégies faiblement dominées?

- d'abord éliminer T et après L:

J1 \ J2	R
M	2, 1
B	2, 1

- d'abord éliminer B et après R:

J1 \ J2	L
T	1, 1
M	1, 1

- résultats incohérents: *on peut pas éliminer les stratégies faiblement dominées!*