Information Incompléte et Jeux Bayésiens I

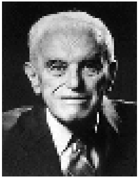
Théorie des Jeux, L3

24 Novembre 2016

Jeux avec information incompléte

- Dans les jeux que nous avos étudiés jusqu'a maintenant, nous avons chaque fois supposé que les joueurs connanissent toutes les données du problème auquel ils sont confrontés. Cette hypothèse est-elle réaliste?
    - jeu d'échecs? Oui!
    - jeu de cartes? Non, la main de l'adversaire reste inconnue
        - chaque joueur doit non seulement anticiper la stratégie de ses concurrents mais aussi leur main
    - jeu de cartes sequentiel (poker)? brouiller ces anticipations par le bluff
    - dilemme du prisonnier avec des préférences inconnues: altruiste vs. egoïste
    - duopole de Cournot avec des coûts inconnus

Jeux avec information incomplète



- Si les joueurs ne connaissent pas parfaitement les données du jeu peuvent-ils réagir de manière rationelle ?
- Oui, si l'incomplètude peut être corrigée
- complèter l'information avec la méthode de Harsanyi
- Concepts de solution: une comparaison

	Forme Strategique	**Forme Extensive**
Info Complète	Eq. de Nash	ENPSJ
Info Incomplète	Eq. de Nash-Bayésien	Eq. de Nash-Bayésien Parfait

L'approche de Harsanyi 1967-1968

- Considérons un jeu stratégique J opposant J1 et J2
- J2 connaît parfaitement les gais résultant de chaque paire de stratégies possibles, J1 ne les connaît pas
  - J1 et J2 connaît néanmoins la liste de stratégies qui est disponible pour chaque joueur
- J1 doit former des croyances sur ces gains: (J_k, p_k)
- Harsanyi: representer la manière dont J1 perçoit le jeu par un coup initial d'un joueur fictif: la Nature
- la Nature tire au hasard le vrai jeu auquel doivent jouer les deux joueurs, ensuite J2 est informé de ce choix et le joueurs jouent
- Donc, la manque d'info du J1 sera remplacé par un manque d'observation du coup joué par la Nature
- Harsanyi: remplacer le jeu stratégique en info incomplète J par un jeu séquentiel en info complète mais imparfaite J'

Dilemme du Prisonnier avec information incomplète

- Joueur 1 a des préférences égoïstes standard
- Joueur 1 n'est pas sûr des préférences du Joueur2
- Joueur 1 croit que le joueur 2 est égoïste-comme le joueur 1-ou altruiste.

	C	D
C	$4,4$	$0,6$
D	$6,0$	$2,2$

Joueur 2 égoïste

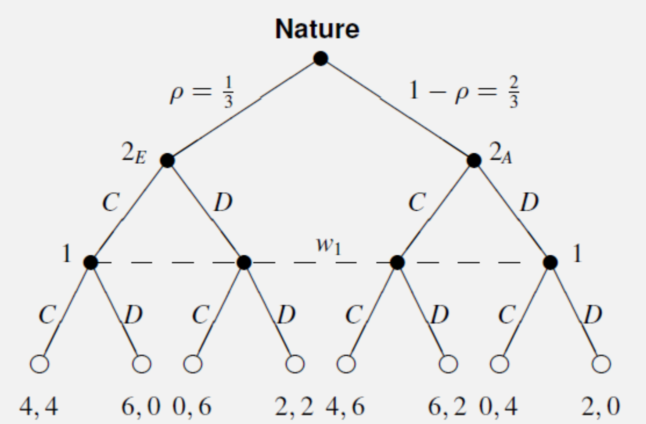
	C	D
C	$4,6$	$0,4$
D	$6,2$	$2,0$

Joueur 2 altruiste

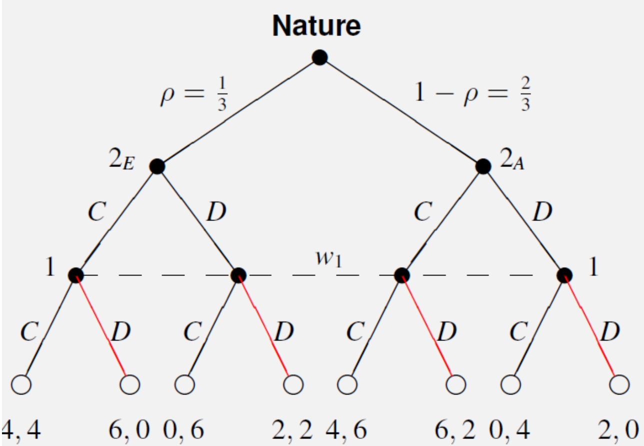
- Analyse stratégique? Supposons que le joueur 1 croit rencontrer le type égoïste avec la probabilité ρ

De l'information incomplète à l'information imparfaite...

Soit $\rho = \frac{1}{3}$

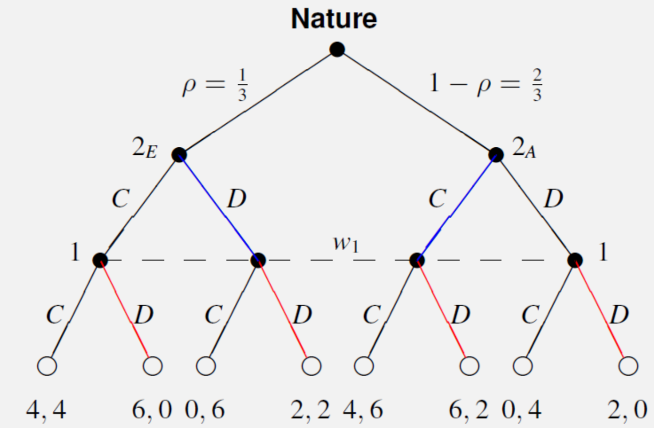


Analyse stratégique



Joueur 1 a une action strictement dominante D, quel que soit le jeu réel

Analyse stratégique



étant donné D du jouer 1, la meilleure réponse du 2_E : D et du 2_A : C. Donc, l'équilibre $(D, (D, C))$.

La Dilemme du Prisonnier ou pas...

- Joueur 1 est incertain du jeu qui est effectivement joué

	C	D
C	$4,4$	$0,6$
D	$6,0$	$2,2$

Jeu 1

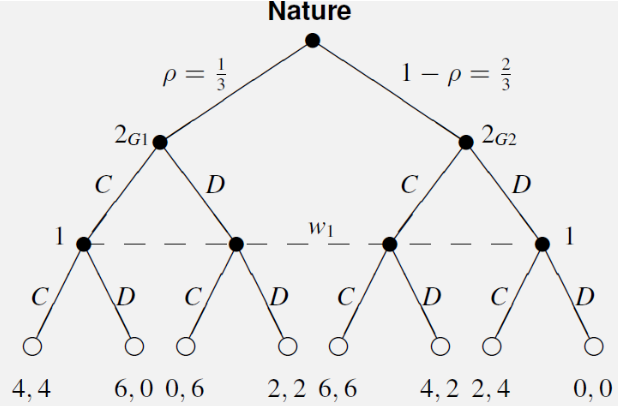
	C	D
C	$6,6$	$2,4$
D	$4,2$	$0,0$

Jeu 2

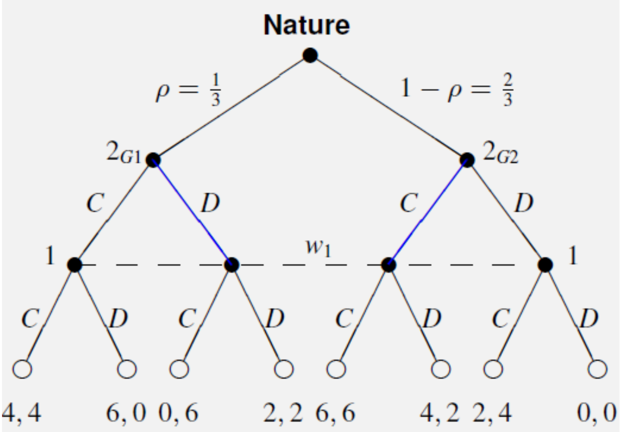
- Le joueur 1 croit que DP est joué avec la probabilité ρ
- Le Joueur 2 sait quel jeu est joué

De l'information incomplète à l'information imparfaite...

Soit $\rho = \frac{1}{3}$

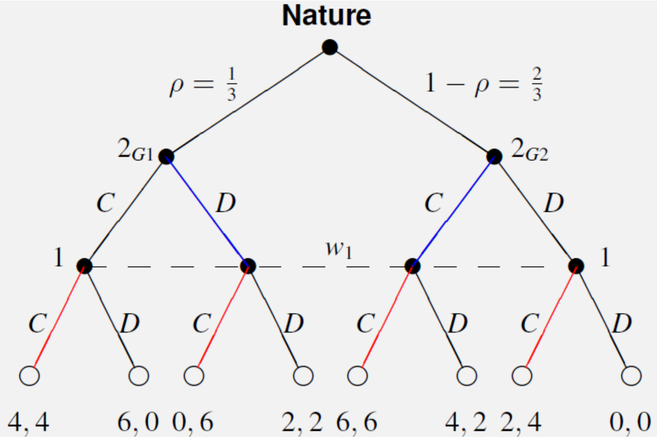


Analyse stratégique



Joueur 2: 2_{G1} a une stratégie dominante D, 2_{G2} a une stratégie dominante C

Analyse stratégique



La meilleure réponse du joueur 1 à (D, C) :

$$\arg \max_{x \in \{C,D\}} [\tfrac{1}{3} u_1^{G1}(x, D) + \tfrac{2}{3} u_1^{G2}(x, C)] = C$$

L'approche de Harsanyi 1967-1968

Les jeux avec information *incomplète* peuvent être considérés comme des jeux sous forme extensive avec information *imparfaite*

- *Nature* joue le premier: une état du monde $\omega \in \Omega$ est réalisé...
  - ...selon le distribution de probabilité *a priori* sur Ω : connaisance commune pour les joueurs
- les joueurs reçoivent des *signaux* τ_i sur ω qui peuvent différer d'un joueur à l'autre
  - for each $\omega \in \Omega$: chaque joueur sait qu'il est dans un certain état $\omega' \in \tau_i(\omega)$
- les *croyances* sont formées: le distribution de probabilité *a posteriori* sur Ω est dérivé par la règle de Bayes (à partir de la distribution *a priori* sur Ω).
- les joueurs jouent: ils peuvent choisir actions différentes dans les différents états du monde, à condition qu'ils soient cohérents avec les croyances.
- les gains sont réalisés: les joueurs reçoivent les gains correspondant aux actions choisies à l'état du monde réalisé.

La Dilemme du Prisonnier ou pas...

- Joueur 1 est incertain du jeu qui est effectivement joué

	C	D
C	$4,4$	$0,6$
D	$6,0$	$2,2$

Jeu 1

	C	D
C	$6,6$	$2,4$
D	$4,2$	$0,0$

Jeu 2

- Le joueur 1 croit que DP est joué avec la probabilité ρ
- Le Joueur 2 sait quel jeu est joué

La Dilemme du Prisonnier ou pas: modélisation du jeu

- Jouers: $N = \{1, 2\}$
- États du monde: $\Omega = \{G_1, G_2\}$
- Distribution a priori: $P(G_1) = \frac{1}{3}, P(G_2) = \frac{2}{3}$
- Signaux: $\tau_i : \Omega \to T_i$, (pour decrire l'info disponible à chaque joueur)
  - $\tau_1(\omega) = 1$, pour $\omega = G_1, G_2$: aucune information
  - $\tau_2(\omega) = \omega$, pour $\omega = G_1, G_2$: information complète
- Croyances (a posteriori): $p_i : \Omega \times T_i \to [0, 1]$
  - $p_1(G_1 \mid 1) = \rho = \frac{1}{3}, p_1(G_2 \mid 1) = 1 - \rho = \frac{2}{3}$
  - $p_2(G_1 \mid G_1) = 1, p_2(G_2 \mid G_1) = 0$
  - $p_2(G_1 \mid G_2) = 0, p_2(G_2 \mid G_2) = 1$
- Paiements dépendant de l'État du monde: $u_i : A \times \Omega \to \mathbb{R}$

Jeu Bayésien

Definition

Un *jeu bayésien sous forme stratégique* est un 6-tuple ordonné

$$G = \langle N, \Omega, (\tau_i)_{i \in N}, (p_i)_{i \in N}, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle,$$

avec $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ - l'ensemble des joueurs, Ω - l'ensemble des états du monde et pour chaque $i \in N$:

- $\tau_i : \Omega \to T_i$ est la fonction signal du joueur i; T_i - l'ensemble des types du joueur i
- $p_i : \Omega \times T_i \to [0, 1]$ *croyance* a posteriori du joueur i; $p_i(\omega \mid t_i)$ est la probabilité subjective que le joueur i détient sur l'état ω conditionnel sur son type t_i

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_i(\omega \mid t_i) = 1.$$

- A_i - l'ensemble des actions du joueur i (notation $A = \times_{i \in N} A_i$).
- $u_i : A \times \Omega \to \mathbb{R}$ fonction paiements pour i.

Equilibre Bayésien

- Un équilibre de Nash-Bayésien est un équilibre du jeu Bayésien, dans lequel chaque joueur choisit une meilleure action étant donné son type et ses croyances sur les types des autres joueurs (qu'il déduit de son type en utilisant la règle de Bayes).

- chaque joueur choisit une action qui maximise sa utilité esperée, étant données les types et ses croyances.

Equilibre Bayésien avec stratégies pures

Definition

Une stratégie pure du joueur i est une fonction $s : T_i \to A_i$.

Definition

Un équilibre de Nash-Bayésien est un profile des stratégies pures $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ telle que pour tous $i \in N$ et tous $t_i \in T_i$ l'action $s_i^*(t_i) \in A_i$ est la solution du problème

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{\omega \in \Omega} p_i(\omega \mid t_i) \; u_i(s_1^*(t_1), ..., s_{t-1}^*(t_{i-1}), a_i, s_{t+1}^*(t_{i+1}), ..., s_n^*(t_n); \omega)$$

Connaisance commune sur la distribution a priori (common prior)

- Soit $P : \Omega \to [0,1]$ la distribution de probabilité *a priori* sur Ω (finite)
- $p(t_1, \ldots, t_n) = p(t) := \sum_{\omega : \tau(\omega) = t} P(\omega)$
- $p_i(t_{-i} \mid t_i)$ la croyance subjective *a posteriori* du type t_i du joueur i la réalisation des types d'autres joueurs:

$$
\begin{aligned}
p_i(t_{-i} \mid t_i) &= \frac{\text{Prob}[N_{-i} \text{ reçoivent signaux } t_{-i} \mid i \text{ reçoit signal } t_i]}{\text{Prob}[i \text{ reçoit signal } t_i]} \\
&= \frac{p(t_{-i}, t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p(t_{-i}, t_i)}
\end{aligned}
$$

Régle de Bayes

Connaisance commune sur la distribution a priori

- sans connaisance commune sur la distribution a priori, les joueurs doivent former des croyances sur les croyances a priori des adversaires...
- croyances sur croyances sur croyances a priori, etc...
- hiérarchie indésirable des croyances
- ou, à un certain niveau de croyances, les distributions a priori deviennent des connaissances communes

Doctrine du Harsanyi

- la contribution du Harsanyi: résume l'ensemble du système hiérarchique des croyances que chaque joueur pourrait avoir à un état du monde en une seule entité, *le type* du joueur.
- Dans un jeu Bayésien, les types (de différents joueurs rationnels) tiendront des croyances *cohérentes* dans le sens que toutes ces croyances peuvent être dérivées d'une distribution de probabilité a priori *commune*
- Intuition: deux décideurs rationnels qui ont accès à des informations/signaux identiques trouveront des conclusions identiques