Information Incompléte et Jeux Bayésiens II

Théorie des Jeux, L3

01 Decembre 2016

Rappel: l'approche de Harsanyi

Les jeux avec information *incomplète* peuvent être considérés comme des jeux sous forme extensive avec information *imparfaite*

- *Nature* joue le premier: une état du monde $\omega \in \Omega$ est réalisé...
  - ...selon le distribution de probabilité *a priori* sur Ω : connaisance commune pour les joueurs
- les joueurs reçoivent des *signaux* τ_i sur ω qui peuvent différer d'un joueur à l'autre
  - for each $\omega \in \Omega$: chaque joueur sait qu'il est dans un certain état $\omega' \in \tau_i(\omega)$
- les *croyances* sont formées: le distribution de probabilité *a posteriori* sur Ω est dérivé par la règle de Bayes (à partir de la distribution *a priori* sur Ω).
- les joueurs jouent: ils peuvent choisir actions différentes dans les différents états du monde, à condition qu'ils soient cohérents avec les croyances.
- les gains sont réalisés: les joueurs reçoivent les gains correspondant aux actions choisies à l'état du monde réalisé.

Connaisance commune sur la distribution a priori (common prior)

- Soit $P : \Omega \to [0,1]$ la distribution de probabilité *a priori* sur Ω (finite)
- $p(t_1, \dots, t_n) = p(t) := \sum_{\omega : \tau(\omega) = t} P(\omega)$
- $p_i(t_{-i} \mid t_i)$ la croyance subjective *a posteriori* du type t_i du joueur i la réalisation des types d'autres joueurs:

$$\begin{aligned} p_i(t_{-i} \mid t_i) &= \frac{\text{Prob}[N_{-i} \text{ reçoivent signaux } t_{-i} \text{ et } i \text{ reçoit signal } t_i]}{\text{Prob}[i \text{ reçoit signal } t_i]} \\ &= \frac{p(t_{-i}, t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p(t_{-i}, t_i)} \end{aligned}$$

Régle de Bayes

Connaisance commune sur la distribution a priori

- sans connaisance commune sur la distribution a priori, les joueurs doivent former des croyances sur les croyances a priori des adversaires...
- croyances sur croyances sur croyances a priori, etc...
- hiérarchie indésirable des croyances
- ou, à un certain niveau de croyances, les distributions a priori deviennent des connaissances communes

Doctrine du Harsanyi

- la contribution du Harsanyi: résume l'ensemble du système hiérarchique des croyances que chaque joueur pourrait avoir à un état du monde en une seule entité, *le type* du joueur.
- Dans un jeu Bayésien, les types (de différents joueurs rationnels) tiendront des croyances *cohérentes* dans le sens que toutes ces croyances peuvent être dérivées d'une distribution de probabilité a priori *commune*
- Intuition: deux décideurs rationnels qui ont accès à des informations/signaux identiques trouveront des conclusions identiques

Avoir plus d'information peut être défavorable... (I)

	L	M	R
T	$1, 2\epsilon$	$1, 0$	$1, 3\epsilon$
B	$2, 2$	$0, 0$	$0, 3$

état ω_1

	L	M	R
T	$1, 2\epsilon$	$1, 3\epsilon$	$1, 0$
B	$2, 2$	$0, 3$	$0, 0$

état ω_2

- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{2}$
- $\tau_i(\omega_1) = \tau_i(\omega_2)$ pour $i = 1, 2$; signaux non informatifs
- Joueur i a seulement un *type* t_i
- actions disponibles: $s_1(t_1) \in \{T, B\}, s_2(t_2) \in \{L, M, R\}$.

Plus d'information peut être défavorable... (I)

ω_1	L	M	R
T	$1, 2\epsilon$	$1, 0$	$1, 3\epsilon$
B	$2, 2$	$0, 0$	$0, 3$

$P(\omega_1) = 1/2$

ω_2	L	M	R
T	$1, 2\epsilon$	$1, 3\epsilon$	$1, 0$
B	$2, 2$	$0, 3$	$0, 0$

$P(\omega_2) = 1/2$

$$\begin{aligned} B_1(a_2) &\in \arg \max_{x \in \{T,B\}} \{\tfrac{1}{2} u_1((x, a_2), \omega_1) + \tfrac{1}{2} u_1((x, a_2), \omega_2)\} \\ B_2(a_1) &\in \arg \max_{y \in \{L,M,R\}} \{\tfrac{1}{2} u_2((a_1, y), \omega_1) + \tfrac{1}{2} u_2((a_1, y), \omega_2)\} \end{aligned}$$

- $B_2(a_1) = L$ pour $a_1 \in \{T, B\}$, meilleur réponse unique
- $B_1(B_2(a_1)) = B_1(L) = B$
- (B, L) unique équilibre de Nash Bayésien avec paiements $(2, 2)$

Plus d'information peut être défavorable... (II)

- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{2}$

ω_1	L	M	R
T	$1, 2\epsilon$	$1, 0$	$1, 3\epsilon$
B	$2, 2$	$0, 0$	$0, 3$

ω_2	L	M	R
T	$1, 2\epsilon$	$1, 3\epsilon$	$1, 0$
B	$2, 2$	$0, 3$	$0, 0$

- $\tau_1(\omega_1) = \tau_1(\omega_2), \tau_2(\omega_1) \neq \tau_2(\omega_2)$; joueur 2 informé
- Joueur 1 a un type t_1, joueur 2 a deux types $\{t_2^1, t_2^2\}$
  - $s_1(t_1) \in \{T, B\}$
  - $s_2(t_2^j) \in \{L, M, R\}$ for $j = 1, 2$.

Plus d'information peut être défavorable... (II)

- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{2}, \tau_1(\omega_1) = \tau_1(\omega_2) = t_1, \tau_2(\omega_1) = t_2^1 \neq t_2^2 = \tau_2(\omega_2)$

ω_1	L	M	R
T	$1, 2\epsilon$	$1, 0$	$1, 3\epsilon$
B	$2, 2$	$0, 0$	$0, 3$

ω_2	L	M	R
T	$1, 2\epsilon$	$1, 3\epsilon$	$1, 0$
B	$2, 2$	$0, 3$	$0, 0$

- Les deux types de joueur 2 ont les meilleures réponses uniques,

$$s_2(t_2^1) := R, s_2(t_2^2) := M.$$

- Joueur 1 optimise:

$$\max_{x \in \{T, B\}} \frac{1}{2} u_1((x, R), \omega_1) + \frac{1}{2} u_1((x, M), \omega_2)$$

- Maximisé pour $x = T$. Unique équilibre de Nash Bayésien $(T, (t_2^1 : R, t_2^2 : M))$, paiements $(1, 3\epsilon) < (2, 2)$!

	L	R
T	$2,2$	$0,0$
B	$3,0$	$1,1$

ω_1

	L	R
T	$2,2$	$0,0$
B	$0,0$	$1,1$

ω_2

	L	R
T	$2,2$	$0,0$
B	$0,0$	$1,1$

ω_3

- état du monde: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$
- signaux:
  - joueur 1, deux signaux: $\tau_1(\omega_1) = t_1^1, \tau_1(\omega_2) = \tau_1(\omega_3) = t_1^2$
  - joueur 1, deux signaux:: $\tau_2(\omega_1) = \tau_2(\omega_2) = t_2^1, \tau_2(\omega_3) = t_2^2$
- croyances *a posteriori*:
  - Joueur 1: $p_1(\omega_1 \mid t_1^1) = 1, p_1(\omega_2 \mid t_1^2) = \frac{3}{4}, p_1(\omega_3 \mid t_1^2) = \frac{1}{4}$
  - Joueur 2: $p_2(\omega_1 \mid t_2^1) = \frac{3}{4}, p_2(\omega_2 \mid t_2^1) = \frac{1}{4}, p_2(\omega_3 \mid t_2^2) = 1$
- Vérifiez que les postérieurs sont dérivés de la distribution *a priori* commune : $P(\omega_1) = \frac{9}{13}, P(\omega_2) = \frac{3}{13}, P(\omega_3) = \frac{1}{13}$

Jeu d'infection: équilibre de Nash Bayésien

Déterminer les meilleures réponses *pour chaque type* de joueur 1, 2:

- $s_1(t_1^1) = B$
- $s_2(t_2^1) = R$ (indépendamment de l'action du joueur 1 dans l'état ω_2)
- $s_1(t_1^2) = B$ (indépendamment de l'action du joueur 2 dans l'état ω_3)
- $s_2(t_2^2) = R$ (étant donné la meilleure réponse du joueur 1 dans l'état ω_3)
- équilibre de NashBayésien unique: $\big((t_1^1 : B, t_1^2 : B); (t_2^1 : R, t_2^2 : R)\big)$

L'intuition: les incitations dans l'état ω_1 "infectent" le jeu dans les états ω_2 and ω_3

Equilibre de Nash-Bayésien avec stratégies mixtes

Une *stratégie mixte* est une fonction $\sigma : T_i \longrightarrow \Delta(A_i)$

Definition

Un équilibre de Nash Bayésien avec stratégies mixtes pour un jeu Bayésien est un profile $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ des stratégies mixtes, telle que pour tous $i \in N$ et tous types $t_i \in T_i$ la stratégie mixte $\sigma_i^*(t_i) \in \Delta(A_i)$ maximise

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_i(\omega \mid t_i)\ u_i(((\sigma^*(\tau(\omega))_{-i}, \sigma_i), \omega) \quad \text{dans } \sigma_i.$$

Existence d'un équilibre Bayésien

Theorem

Soit G un jeu Bayésien fini, i.e., les ensembles des joueurs, actions et types sont finis. Alors, un équilibre de Nash Bayésien avec stratégies mixte du jeu G existe.

Démonstration: utiliser la transformation du Harsanyi : transformer G avec info incomplète dans un jeu G^* avec information imparfaite. Alors, l'ensemble des équilibres de Nash du G^* n'est pas vide: $EN(\Gamma(G^*)) \neq \varnothing$.