UNIVERSITÉ DE CERGY **Licence d'Économie Finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion **L1 - S2**

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

TEST 2 - Mars 2014 - 1h 30 min

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Questions de cours et applications - 3+2+2 = 7 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$
   (a) Soit k un réel. Donner la définition de « f est homogène de degré k ».
   (b) *Application numérique* : soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{2y}{3x^2+5y^2}$.
   - Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
   - Montrer que f est homogène en précisant son degré d'homogénéité.

2. Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$
   (a) Donner la définition de la première fonction partielle F_1 de f au point $M_0(x_0;y_0)$
   (b) Donner la définition de la dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à la variable x au point M_0.
   (c) *Application numérique* : soit f la fonction définie par $f(x;y) = \dfrac{e^{3x}}{y}$. Donner l'expression de la première fonction partielle de f au point $M_0(0;1)$, puis de la dérivée partielle d'ordre 1 en la variable x au point M_0.

3. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = x + 2y + e^{x-y}$
   (a) Déterminer le vecteur gradient de f au point $M_0(1;1)$.
   (b) Déterminer l'équation du plan tangent au graphe $\mathcal{G}_f$ de f, au point $M_0'(1;1;4)$.

Exercice 1 - 8 points

Le plan $\mathbb{R}^2$ étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$, soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.

1. Soit $k \in \mathbb{R}$: donner la définition de la courbe de niveau k de f, notée L_k.
2. *Application numérique* : soit f définie par $f(x,y) = \dfrac{x+y^2}{x^2}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   (b) Définir puis représenter la courbe de niveau $k = 0$ de f dans le repère fourni en annexe. (Vous préciserez les éléments caractéristiques habituels : sommet ou centre éventuel, asymptotes éventuelles, axe(s) de symétrie(s), point(s) d'intersection avec les axes de symétrie)

(c) Définir puis représenter la courbe de niveau $k = 1$ de f dans le même repère. (Vous préciserez les éléments caractéristiques habituels)

(d) En déduire que f n'admet pas de limite au point $O(0; 0)$.

Exercice 2 - 5 points

1. Donner un équivalent simple de la fonction f en $x_0 = 0$; en déduire la limite de f en 0.

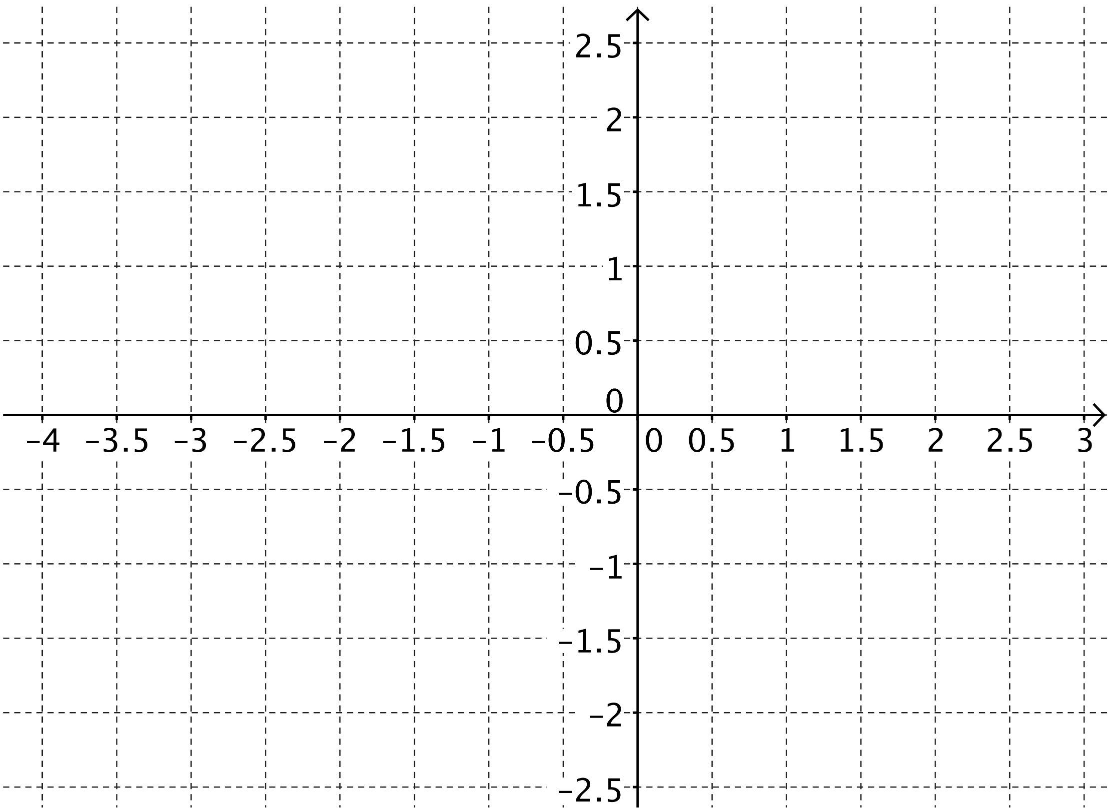
$$f \ : \ f(x) = \frac{e^{3x^2+2x} - 1}{x^3 - x^2 + 3x}$$

2. Donner un équivalent simple de g au point $M_0(0; 0)$. g est-elle prolongeable par continuité en M_0 ? Si oui, définir le prolongement de g en M_0.

$$g \ : \ g(x, y) = \frac{2xy(\sqrt{1 + xy} - 1)}{\ln(1 + x^2 y)}$$

ANNEXE à L'EXERCICE 1

NOM & Groupe de TD :



UNIVERSITÉ DE CERGY **Licence d'Économie Finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion **L1 - S2**

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Corrigé du TEST 2 - MARS 2014

Questions diverses - 3+2+2,5 = 7,5 points

1. (a) • **1 point** f est homogène de degré $k \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall (x,y) \in D_f, \forall t > 0,\ (tx,ty) \in \mathcal{D}_f \textbf{(0,5 pt)} \text{ et } f(tx,ty) = t^k f(x,y) \textbf{(0,5 pt)}$$

   (b) • **2 points**
   - **(0,5 point)** Ici, f est définie en (x,y) si et seulement si $3x^2+5y^2 \neq 0 \iff (x,y) \neq (0;0)$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$
   - **(1,5 point)** Ainsi, si $(x,y) \neq (0;0)$ alors pour tout réel $t > 0, (tx,ty) \neq (0;0)$ et

$$f(tx,ty) = \frac{2tx}{3(tx)^2+5(ty)^2} = \frac{2tx}{t^2(3x^2+5y^2)} = t^{-1}f(x,y)$$

   f est donc homogène de degré -1.

2. (a) • **0,5 point** La première fonction partielle au point $M_0(x_0,y_0)$ de f, notée F_1, est la fonction définie par $F_1(x) = f(x,y_0)$

   (b) • **0,5 point** La dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à la variable x au point M_0 est la dérivée en x_0 de la première fonction partielle F_1 (lorsqu'elle existe). On note, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) = F_1'(x_0)$

   (c) • **1 point** Ici, F_1 est définie par $F_1(x) = f(x;1) = \dfrac{e^{3x}}{1} = e^{3x}$ **(0,5 pt)** et donc $F_1'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,1) = 3e^{3x}$ **(0,25 pt)**, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0;1) = F_1'(0) = 3$ **(0,25 pt)**

3. (a) • **1,25 point** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1+e^{x-y}$ **(0,5 pt)** et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2-e^{x-y}$ **(0,5 pt)** donc $\overrightarrow{grad}\ f(1;1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(0,25 pt)**

   (b) • **1,25 point** Soit $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan tangent $\mathcal{P}$ à $\mathcal{G}_f$ au point $M_0'(1;1;4)$ donc $\mathcal{P}$ a une équation de la forme : $2x+y-z+d=0$; de plus $M_0'(1;1;4) \in \mathcal{P}$ donc $d=1$ et $\mathcal{P}$ a pour équation : $2x+y-z+1=0$.

Exercice 1 - 8,5 points

1. • **0,5 point** $L_k = \Big\{(x,y) \in \mathcal{D}_f /\ f(x,y) = k\Big\}$.

2. *Application numérique* : soit f définie par $f(x,y) = \dfrac{x+y^2}{x^2}$.

   (a) • **0,5 point** f est définie si et seulement si $x^2 \neq 0 \iff x \neq 0$: donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(Oy)\}$

   (b) • **1,5 point**

   - **(0,5 point)** Pour définir L_0, on résout (E) : $\dfrac{x+y^2}{x^2} = 0$ et $x \neq 0$

   $(E) \iff x + y^2 = 0$ et $x \neq 0 \iff x = -y^2$ et $x \neq 0$

   - **(0,5 point)** Ainsi L_0 est la parabole $\mathcal{P}$ ouverte vers la gauche d'axe de symétrie D d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) et de sommet $O(0;0)$ **privée des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe (Oy) !**

   - **(0,5 point)** Pour étudier les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe (Oy), on résout le système :

   $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ x+y^2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y^2 & = & 0 \end{array}\right. \iff x = y = 0$: $\mathcal{P}$ et (Oy) ont un point d'intersection : $O(0;0)$.

   (c) • **3,5 points**

   - **(1 point)** Pour définir L_1, on résout (E) : $\dfrac{x+y^2}{x^2} = 1$ et $x \in \mathcal{D}_f$

   $$\begin{array}{lcl} (E) & \iff & x + y^2 = x^2 \text{ et } x \neq 0 \\ & \iff & x^2 - x - y^2 = 0 \text{ et } x \neq 0 \\ & \iff & \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \dfrac{1}{4} \text{ et } x \neq 0 \\ & \iff & \dfrac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{1/4} - \dfrac{y^2}{1/4} = 1 \text{ et } x \neq 0 \end{array}$$

   - **(1 point)** Ainsi L_1 est l'hyperbole $\mathcal{H}$ ouverte vers la gauche et la droite, de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ et de paramètres $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$, **privée des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe (Oy) !**

   - **(0,5 point)** Pour étudier les points d'intersection de $\mathcal{H}$ avec l'axe (Oy), on résout le système :

   $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ x^2 - x - y^2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y^2 & = & 0 \end{array}\right. \iff x = y = 0$: $\mathcal{H}$ et (Oy) ont un point d'intersection $O(0;0)$.

   - **(0,5 point)** Les asymptotes de $\mathcal{H}$ sont les droites D_1 d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ et D_2 d'équation $y = -x + \dfrac{1}{2}$

   - **(0,5 point)** Pour tracer $\mathcal{H}$, on étudie les points d'intersection avec ses axes de symétrie : il n'y a pas de point d'intersection entre $\mathcal{H}$ et la droite d'équation $x = 1$

   Pour déterminer les points d'intersection entre $\mathcal{H}$ et la droite d'équation $y = 0$, on résout le système :

   $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ x^2 - x - y^2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ x(x-1) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ x & = & 0 \text{ ou } x = 1 \end{array}\right.$

   Il y a deux points d'intersection $O(0;0)$ etc $A(1;0)$

(d) **(Bonus 0,5 point)** On remarque tout d'abord que le point $O(0;0)$ est un point d'accumulation pour les deux lignes de niveaux L_0 et L_1 : le calcul de la limite de $f(x;y)$ lorsque $(x;y)$ tend vers O en parcourant L_0 (respectivement L_1) est donc cohérent.

- **1 point**

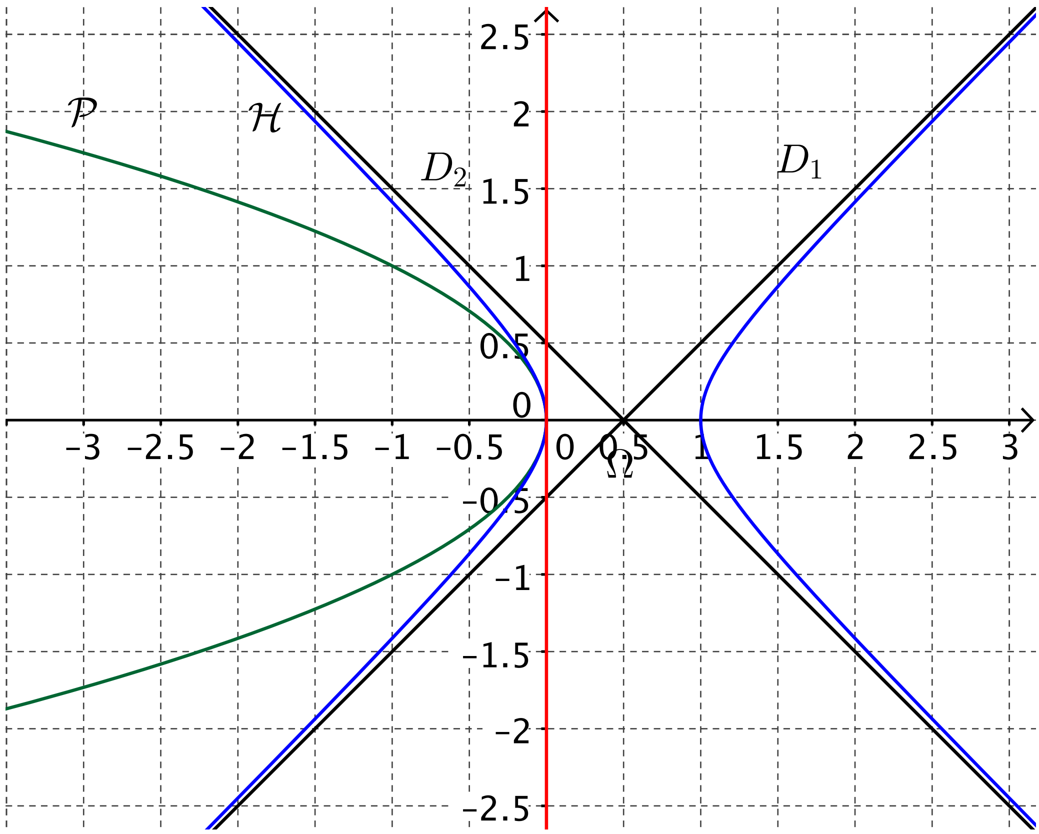
- **(0,5 point)** $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\(x,y)\in L_0}} f(x;y) = 0$ par définition de la ligne de niveau L_0.

De même $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\(x,y)\in L_1}} f(x;y) = 1$

- **(0,5 point)** On a trouvé deux limites différentes lorsque $(x;y)$ tend vers O en parcourant deux chemins différents : f n'a donc pas de limite en O.

• Figure : 1,5 point

0,5 point pour $\mathcal{P}$, 0,5 point pour les asymptote, et 0,5 point pour $\mathcal{H}$.



Exercice 2 - 5,5 points

1. • **2 points**
- **(1 point)** Pour le numérateur : Posons $u(x) = 3x^2 + 2x$ **(0,25 pt)** , alors $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = 0$ **(0,25 pt)** ; comme $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$ **(0,25 pt)** , on a par changement de variable, $e^{3x^2+2x} - 1 \underset{0}{\sim} 3x^2 + 2x$ **(0,25 pt)**, enfin $3x^2 + 2x \underset{0}{\sim} 2x$
- **(0,25 point)** Pour le dénominateur : $x^3 - x^2 + 3x \underset{0}{\sim} 3x$
- **(0,75 point)** Par quotient, $\dfrac{e^{3x^2+2x} - 1}{x^3 - x^2 + 3x} \underset{0}{\sim} \dfrac{2x}{3x}$ **(0,25 pt)**, c.a.d. $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{3}$ **(0,25 pt)** et donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{2}{3}$ **(0,25 pt)** .

2. • **3,5 points**
- **(1 point)** Pour le numérateur : Posons $u(x, y) = xy$ **(0,25 pt)** , alors $\lim\limits_{(x,y) \to (0;0)} u(x, y) = 0$ **(0,25 pt)** ; comme $\sqrt{u+1} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}u$ **(0,25 pt)**, on a par changement de variable, $\sqrt{1+xy} - 1 \underset{(0;0)}{\sim} \dfrac{xy}{2}$ **(0,25 pt)**
- **(1 point)** Pour le dénominateur : posons $v(x, y) = x^2y$ **(0,25 pt)**, alors $\lim\limits_{(x,y) \to (0;0)} v(x, y) = 0$ **(0,25 pt)** ; comme $\ln(1 + u) \underset{0}{\sim} u$ **(0,25 pt)**, on a par changement de variable, $\ln(1 + x^2y) \underset{(0;0)}{\sim} x^2y$ **(0,25 pt)**
- **(0,5 point)** Par produit et quotient, $g(x, y) \underset{(0;0)}{\sim} \dfrac{2xy\frac{xy}{2}}{x^2y}$ **(0,25 pt)** , soit $g(x, y) \underset{(0;0)}{\sim} y$ **(0,25 pt)**
- **(1 point)** Ainsi, $\lim\limits_{(x,y) \to (0;0)} g(x, y) = \lim\limits_{y \to 0} y = 0 \in \mathbb{R}$ **(0,25 pt)**, on peut donc prolonger g par continuité en $M_0(0; 0)$ par : **(0,75 pt)**

$$\tilde{g} \text{ définie par } \begin{cases} \tilde{g}(x, y) = g(x, y) = \dfrac{2xy(\sqrt{1+xy} - 1)}{\ln(1 + x^2y)} & \text{si} \quad (x; y) \in \mathcal{D}_g \\ \tilde{g}(x, y) = 0 & \text{si} \quad (x; y) = (0; 0) \end{cases}$$