UNIVERSITÉ DE CERGY — **Licence d'Économie et Gestion**

U.F.R. Economie et Gestion — **L1 - S2**

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

TEST 2 - Mars 2013 - 1h 30 min

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Questions de cours - 8 points

Les 4 parties qui suivent sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$.

   a. Donner la définition de la courbe de niveau $k \in \mathbb{R}$ de f.

   b. On considère la fonction f définie par :
   $$f(x,y) = \frac{2x^2+2x}{x^2-y^2}$$
   Définir puis représenter l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f (le plan étant muni d'un repère orthonormé d'unité 2 cm (ou 2 carreaux))

   Définir précisément la courbe de niveau 1, notée L_1, puis représenter L_1 sur le graphique précédent.

2. Soit f la fonction définie par :
   $$f(x,y) = x - y + 3x^2y - e^{2x-3y} - 5$$
   Définir les fonctions partielles de f au point $M_0(2;-3)$.

3. On considère la fonction f définie par :
   $$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$
   (f est définie sur le même ensemble que la fonction de la question 1b.)

   Montrer que f n'admet pas de limite en $O(0;0)$ en étudiant la limite de f lorsque (x,y) tend vers O en parcourant les droites de $\mathcal{D}_f$ passant par l'origine.

4. En utilisant des équivalents, donner une valeur approchée de $A = \dfrac{\ln(0,98)}{(e^{0,1}-1)^2}$

Exercice 1 - 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{ (Ox), (Oy)\}$ par :

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + 2x)\ln(1 + 2y^2)}{e^{xy} - 1}$$

1. Donner un équivalent simple de $f(x, y)$ au voisinage de $O(0; 0)$
2. Peut-on prolonger f par continuité en $(0, 0)$? Si oui, définir le prolongement de f.
3. f admet-elle une limite réelle lorsque (x, y) tend vers $(0; 1)$?

Exercice 2 - 4 points

Soient f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$ et k un nombre réel.

1. Donner la définition de f est homogène de degré k.
2. Donner l'expression de l'identité d'Euler pour une telle fonction f homogène de degré k.
3. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ par $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.
   Montrer que f est homogène, puis vérifier l'identité d'Euler pour la fonction f.

Exercice 3 - 3 points

1. Donner la définition du vecteur gradient au point $M_0(x_0, y_0)$ (que l'on note $\overrightarrow{grad\ f}(M_0)$)
2. Donner un vecteur normal au plan tangent au graphe $\mathcal{G}_f$ de f au point $M_0'(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, puis une équation cartésienne de ce plan tangent.
3. On considère la fonction f définie par : $f(x, y) = x^2 e^{x-y}$
   Donner une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{G}_f$ au point $M_0'(1; 1; 1)$

UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Economie et Gestion

Licence d'Économie et Gestion
L1 - S2

Fonctions de plusieurs variables

Corrigé du TEST 1

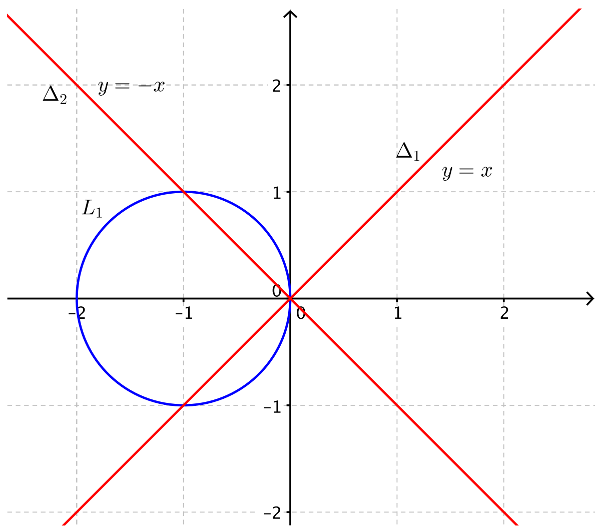
Questions de cours - (3,5+1+2+1,5 =) 8 points

1. a. • **0,5 point** Notons L_k la ligne de niveau k de f :

$$L_k = \{(x, y) \in D_f / \ f(x, y) = k\}$$

b. • **3 points** Soit f définie par $\dfrac{2x^2 + 2x}{y^2 - x^2}$

($\mathbf{D_f}$: 1 point) $(x, y) \in D_f \iff x^2 - y^2 \neq 0 \iff (x - y)(x + y) \neq 0 \iff y \neq \pm x$
$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{\Delta_1; \Delta_2\}$, où Δ_1 et Δ_2 sont les deux bissectrices du repère.
(Figure : 0,5 point)



($\mathbf{L_1}$: 1,5 point, dont 0,5 point pour préciser les 3 points exclus)

$L_1 = \{(x, y) \in D_f / \dfrac{2x^2 + 2x}{x^2 - y^2} = 1\}$

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - y^2} = 1 &\iff 2x^2 + 2x = x^2 - y^2 \text{ et } (x, y) \in D_f \\ &\iff x^2 + 2x + y^2 = 0 \text{ et } (x, y) \in D_f \\ &\iff (x + 1)^2 + y^2 = 1 \text{ et } (x, y) \in D_f \end{aligned}$$

L_1 est donc le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon 1, privé des points O, $(-1; -1)$ et $(-1; 1)$.

2. • **1 point** Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x - y + 3x^2y - e^{2x-3y} - 5$. Fonctions partielles de f au point $M_0(2; -3)$
F_1 est définie par $F_1(x) = f(x; -3) = x + 3 - 9x^2 - e^{2x+9} - 5 = -9x^2 + x - 2 - e^{2x+9}$
et F_2 est définie par $F_2(y) = f(2; y) = 2 - y + 12y - e^{4-3y} - 5 = 11y - 3 - e^{4-3y}$

3. **• 2 points** On considère la fonction f définie sur $D_f = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\Delta_1; \Delta_2\}$ par

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

(0,5 point) Soit Δ_m la droite d'équation $y = mx$, $m \neq \pm 1$: Remarquons tout d'abord que O est un point d'accumulation de toutes ces droites car $O \in \Delta_m$

(1 point) On a $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\ y=mx}} \dfrac{2x \cdot mx}{x^2 - m^2x^2} = \dfrac{2m}{1-m^2}$

(0,5 point) Ainsi, par exemple $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\ y=2x}} f(x,y) = \dfrac{-4}{3} \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\ y=3x}} f(x,y) = \dfrac{-6}{8}$: on a trouvé deux valeurs différentes pour la limite de f lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ en parcourant deux chemins différents, f n'admet donc pas de limite en $O(0,0)$.

Remarque : 1 point (/ 1,5) pour l'étudiant qui étudie seulement deux droites.

4. **1,5 point** On utilise $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, donc $\ln 0,98 = \ln(1-0,02) \approx -0,02$

   et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, donc $e^{0,1} - 1 \approx 0,1$ et $\left(e^{0,1} - 1\right)^2 \approx 0,01$

   D'où $A \approx \dfrac{-0,02}{0,01}$, i.e. $A \approx -2$ (La calculatrice donne $A \approx -1,83...$)

Exercice 1 - 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\ (Ox), (Oy)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{(x^2+2x)\ln(1+2y^2)}{e^{xy} - 1}$$

1. **• 2,5 points** • Numérateur : **(0,25 point)** on a $x^2 + 2x \underset{0}{\sim} 2x$

   (0,75 point) Posons $u(y) = 2y^2$, alors $\lim\limits_{y\to 0} u(y) = 0$

   De plus $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, donc par changement de variable, $\ln(1+2y^2) \underset{0}{\sim} 2y^2$

   • Dénominateur : **(1 point)** Posons $v(x,y) = xy$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) = 0$

   Comme $e^v - 1 \underset{0}{\sim} v$, on a $e^{xy} - 1 \underset{(0,0)}{\sim} xy$

   (0,5 point) Par quotient $f(x,y) \underset{(0,0)}{\sim} \dfrac{2x \cdot 2y^2}{xy}$ soit $f(x,y) \underset{(0,0)}{\sim} 4y$

2. **• 1 point** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 4y = 0$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. On peut donc prolonger f par continuité en $O(0;0)$ par $\tilde{f}$ définie par $\begin{cases} \tilde{f}(x,y) = f(x,y) & \text{si} \quad (x;y) \in D_f \\ \tilde{f}(x,y) = 0 & \text{si} \quad (x;y) = (0;0) \end{cases}$

3. **• 1,5 point** Comme au 1., on a $x^2+2x \underset{0}{\sim} 2x$ et $e^{xy}-1 \underset{(0,0)}{\sim} xy$, de plus $\lim\limits_{y\to 1} \ln(1+2y^2) = \ln 3$

   Donc, par quotient $f(x,y) \underset{(0,1)}{\sim} \dfrac{2x\ln 3}{xy}$ soit $f(x,y) \underset{(0,1)}{\sim} \dfrac{2\ln 3}{y}$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0;1)} \dfrac{2\ln 3}{y} = 2\ln 3$, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0;1)} f(x,y) = 2\ln 3$

Exercice 2 - 4 points

1. • **1 point** f définie sur D_f est homogène de degré k si et seulement si
$$\forall t > 0, \forall (x,y) \in D_f,\ (tx,ty) \in D_f \text{ et } f(tx,ty) = t^k f(x,y)$$
2. • **0,5 point** Si f est homogène de degré k, pour tout $(x,y) \in D_f$,
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = k.f(x,y)$$
3. • **2,5 points** Soit f définie par $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$:

   (1 point) Soit $t > 0$, $f(tx,ty) = \dfrac{tx}{(tx)^2+(ty)^2} = \dfrac{tx}{t^2(x^2+y^2)} = \dfrac{x}{t(x^2+y^2)} = t^{-1}\ f(x,y)$: f est donc homogène de degré $k = -1$

   (1 point)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

   (0,5 point) d'où :
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^3+xy^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = -f(x,y)$$

Exercice 3 - 3 points

1. • **0,5 point** $\overrightarrow{grad\ f}(M_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$
2. • **1 point**

   (0,5 point) Un vecteur normal au plan tangent au graphe $\mathcal{G}_f$ de f au point $M_0'(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ est : $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$

   (0,5 point) Une équation cartésienne de ce plan tangent est :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) - (z - f(x_0,y_0)) = 0$$
3. • **1,5 point** Soit f la fonction définie par $f(x,y) = x^2e^{x-y}$

   (0,5 point) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{x-y} + x^2e^{x-y}$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1;1) = 3$

   (0,5 point) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2e^{x-y}$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1;1) = -1$

   (0,5 point) Donc le plan tangent a pour équation : $3(x-1)-(y-1)-(z-1) = 0$, soit
$$3x - y - z - 1 = 0$$