UNIVERSITÉ DE CERGY — **Licence d'Économie et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion — **L1 - S2**

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

TEST 2 - Mars 2012 - 1h 30 min

Les exercices sont indépendants
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 6,5 points

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2+2x}{4y^2}$

1. Déterminer et représenter le domaine de définition de f. (Unité graphique : 2 cm ou 2 grands carreau)
2. Définir et représenter sur le graphique de **1.** les courbes de niveau 0 et -1 (notées respectivement L_0 et L_{-1}).
3. Étudier la limite de f lorsque (x,y) tend vers $O(0;0)$ en parcourant L_0, puis L_{-1}.
4. f admet-elle une limite en $O(0,0)$? Justifier.

Exercice 2 - 6,5 points

Donner un équivalent simple des fonctions suivantes au point M_0 indiqué, puis déterminer leur limite éventuelle en M_0.

$f_1 \;:\; f_1(x,y) = \dfrac{(x^2+2x)(e^{xy}-1)}{xy}$ en $M_0(0,0)$

$f_2 \;:\; f_2(x,y) = \dfrac{(\sqrt{1+x^2y}-1)}{2x\ln(1+xy)}$ en $M_0(0,0)$

$f_3 \;:\; f_3(x,y) = \dfrac{(x^2+x+1)\ln(y)}{1-y^2}$ en $M_0(0;1)$

Exercice 3 - 3 points

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

1. Définir le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est une fonction homogène dont vous préciserez le degré.
3. Vérifier l'égalité d'Euler pour cette fonction.

Exercice 4 - 4 points

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = x^2+y^2+e^{x-y}$

1. Déterminer le vecteur gradient de f au point $M_0(1;1)$.
2. On note L la ligne de niveau contenant M_0. Déterminer l'équation de la tangente à la ligne de niveau L au point M_0.
3. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe $\mathcal{G}_f$ de f, au point $M_0'(1;1;3)$.

UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Economie et Gestion

Licence d'Économie et Gestion
L1 - S2

Fonctions de plusieurs variables

Corrigé du TEST 2

Exercice 1 - 6,5 points

1. • **0,5 point** La fonction f est définie en (x,y) si et seulement si $4y^2 \neq 0$, i.e. $y \neq 0$. Donc $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus (Ox)$

2. • **1,5 point** $L_0 = \left\{(x,y) \in D_f /\ f(x,y) = 0\right\}$. Donc

$$\begin{aligned} (x,y) \in L_0 &\iff \frac{x^2+2x}{4y^2} = 0 \text{ et } y \neq 0 \\ &\iff x^2+2x = 0 \text{ et } y \neq 0 \\ &\iff x(x+2) = 0 \text{ et } y \neq 0 \\ &\iff x = -2 \text{ ou } \ x = 0 \text{ et } y \neq 0 \end{aligned}$$

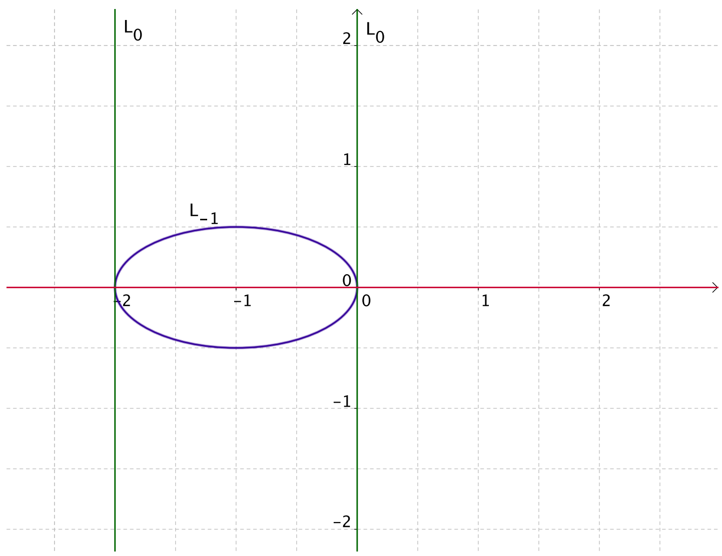
L_0 est donc l'union des deux droites D_1 et D_2 d'équations respectives $x = -2$ et $x = 0$ privées respectivement de $(-2;0)$ et $(0;0)$.

• **2 points** $L_{-1} = \left\{(x,y) \in D_f /\ f(x,y) = -1\right\}$. Donc

$$\begin{aligned} (x,y) \in L_{-1} &\iff \frac{x^2+2x}{4y^2} = -1 \text{ et } y \neq 0 \\ &\iff x^2+2x = -4y^2 \text{ et } y \neq 0 \\ &\iff x^2+2x+4y^2 = 0 \text{ et } y \neq 0 \\ &\iff (x+1)^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \text{ et } y \neq 0 \end{aligned}$$

L_{-1} est donc l'ellipse de centre $\Omega(-1;0)$, de coefficients $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{2}$, privée des points $(-2;0)$ et $(0;0)$

• **Figure 1 point**



3. • **Bonus 0,5 point** On remarque tout d'abord que le point $M_0(0;0)$ est un point d'accumulation pour les deux lignes de niveaux L_0 et L_{-1} : le calcul de la limite de $f(x;y)$ lorsque $(x;y)$ tend vers M_0 en parcourant L_0 (respectivement L_{-1}) est donc raisonnable.

   • **0,5 point** $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\(x,y)\in L_0}} f(x;y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\(x,y)\in L_0}} 0 = 0$ par définition de la ligne de niveau L_0

   • **0,5 point** De même $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\(x,y)\in L_{-1}}} f(x;y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\(x,y)\in L_{-1}}} -1 = -1$

4. • **0,5 point** D'après la question 3, on a trouvé deux limites différentes lorsque $(x;y)$ tend vers M_0 en parcourant deux chemins différents : f n'a donc pas de limite en $M_0(0;0)$.

Exercice 2 - 6,5 points

1. • **2 points** $f_1(x,y) = \dfrac{(x^2+2x)(e^{xy}-1)}{xy}$ en $(0;0)$

   • $x^2 + 2x \underset{0}{\sim} 2x$

   • Posons $u(x,y) = xy$ alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} u(x,y) = 0$. De plus $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$, donc par changement de variable : $e^{xy} - 1 \underset{(0;0)}{\sim} xy$

   Conclusion : par quotient, $f_1(x,y) \underset{(0,0)}{\sim} \dfrac{2x.xy}{xy}$ i.e. $f_1(x,y) \underset{(0,0)}{\sim} 2x$

   Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} 2x = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} f_1(x,y) = 0$

2. • **2 points** $f_2(x,y) = \dfrac{(\sqrt{1+x^2y}-1)}{2x\ln(1+xy)}$ en $M_0(0,0)$

   • Posons $v(x,y) = x^2y$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} v(x,y) = 0$. De plus $\sqrt{1+v}-1 \underset{0}{\sim} \dfrac{v}{2}$, donc par changement de variable : $\sqrt{1+x^2y}-1 \underset{(0;0)}{\sim} \dfrac{x^2y}{2}$

   • Posons $u(x,y) = xy$ alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} u(x,y) = 0$. De plus $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, donc par changement de variable : $\ln(1+xy) \underset{(0;0)}{\sim} xy$.

   Conclusion : $f_2(x,y) \underset{(0,0)}{\sim} \dfrac{\frac{x^2y}{2}}{2x.xy}$ i.e. $f_2(x,y) \underset{(0,0)}{\sim} \dfrac{1}{4}$ et donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} f_2(x,y) = \dfrac{1}{4}$

3. • **2,5 points** $f_3(x,y) = \dfrac{(x^2+x+1)\ln(y)}{1-y^2}$ en $M_0(0;1)$

   • $x^2 + x + 1 \underset{0}{\sim} 1$

   • On a $\ln(y) = \ln(1+y-1)$. Posons $u(y) = y-1$ alors $\lim\limits_{y\to 1} u(y) = 0$. De plus $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, donc par changement de variable : $\ln(y) \underset{1}{\sim} y-1$

   • On a $1 - y^2 = (1-y)(1+y)$

   Conclusion : Par quotient, $f_3(x,y) \underset{(0,1)}{\sim} \dfrac{y-1}{(1-y)(1+y)}$ i.e. $f_3(x,y) \underset{(0,0)}{\sim} \dfrac{-1}{1+y}$

   Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0;1)} \dfrac{-1}{1+y} = \dfrac{-1}{2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0;1)} f_3(x,y) = \dfrac{-1}{2}$

Exercice 3 - 3 points

Soit f définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$

1. **• 0,5 point** f est définie en (x,y) si et seulement si $xy \neq 0 \iff x \neq 0$ et $y \neq 0$
   Donc $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0x) \cup (Oy)\}$
2. **• 1 point** $\forall t > 0, \forall (x,y) \in D_f, (tx,ty) \in D_f$ et
$$f(tx,ty) = \frac{(tx)^2+(ty)^2}{tx.ty} = \frac{t^2(x^2+y^2)}{t^2.xy} = f(x,y)$$
   f est donc homogène de degré 0.
3. **• 1,5 point** f est une fonction rationnelle dérivable sur son ensemble de définition.
   et $\forall (x,y) \in D_f, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x(xy) - y(x^2+y^2)}{(xy)^2} = \dfrac{x^2y - y^3}{(xy)^2}$
   et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y(xy) - x(x^2+y^2)}{(xy)^2} = \dfrac{xy^2 - x^3}{(xy)^2}$
   D'où
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x.\frac{x^2y-y^3}{(xy)^2} + y.\frac{xy^2-x^3}{(xy)^2} = \frac{x^3y - xy^3 + xy^3 - yx^3}{(xy)^2} = 0$$

Exercice 4 - 4 points

Soit f définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 + e^{x-y}$

1. **• 1,25 point** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + e^{x-y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - e^{x-y}$
   donc $\overrightarrow{grad\ f}(1;1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. **• 1,5 point** On a $f(1,1) = 3$, donc L est la ligne de niveau 3 et $\overrightarrow{grad\ f}(1;1)$ est un vecteur normal à la tangente Δ à L au point M_0. Δ a donc une équation de la forme $3x + y + c = 0$: de plus $M_0(1;1) \in \Delta$ donc $c = -4$ et Δ a pour équation : $3x + y - 4 = 0$.
3. **• 1,25 point** Soit $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan tangent $\mathcal{P}$ à $\mathcal{G}_f$ au point $M'_0(1;1.3)$ donc $\mathcal{P}$ a une équation de la forme : $3x + y - z + d = 0$; de plus $M'_0(1;1;3) \in \mathcal{P}$ donc $d = -1$ et $\mathcal{P}$ a pour équation : $3x + y - z - 1 = 0$.