UNIVERSITÉ DE CERGY **Licence d'Économie Finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion **L1 - S2**

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

TEST - Février 2016 - 1h 30 min

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 7 points

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $3x + y = 0$. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathcal{P}$.
2. Justifier que le point $A(-1; 3; -2)$ appartient à $\mathcal{P}$.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et passant par A.
4. On considère la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation cartésienne est :

$$\begin{cases} 2x & -y & +z & -3 & = 0 \\ -x & +y & -2z & -4 & = 0 \end{cases}$$

   (a) Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ (on pourra prendre z comme paramètre et poser $z = t'$).

   (b) Justifier que $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{P}$ en un point B. Démontrer que $B\left(\frac{5}{3}; -5; \frac{-16}{3}\right)$.

   (c) Les droites D et Δ sont-elles parallèles ? sécantes ? Justifier.

   (d) Soit $C(5; 5; -2)$. On appelle distance du point C au plan $\mathcal{P}$ la distance CH, où H est le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$. Calculer cette distance.

Exercice 2 - 7 points

On considère la figure donnée en annexe page suivante.

1. Donner une équation réduite des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
2. Donner l'équation canonique de $\mathcal{H}$ sous la forme $\dfrac{(x-a)^2}{\alpha^2} - \dfrac{(y-b)^2}{\beta^2} = +1 \, (ou \; -1)$.
   Vous prendrez soin de détailler les étapes vous permettant d'obtenir cette équation.
3. Une équation cartésienne de $\mathcal{H}$ est : $4x^2 - 8x - y^2 - 4y + 4 = 0$.
   Retrouver l'équation canonique de $\mathcal{H}$.
4. Donner une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(1; -2)$ et de rayon 3. Tracer $\mathcal{C}$ sur l'annexe.
5. Déterminer par un calcul les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 3 - 6 points

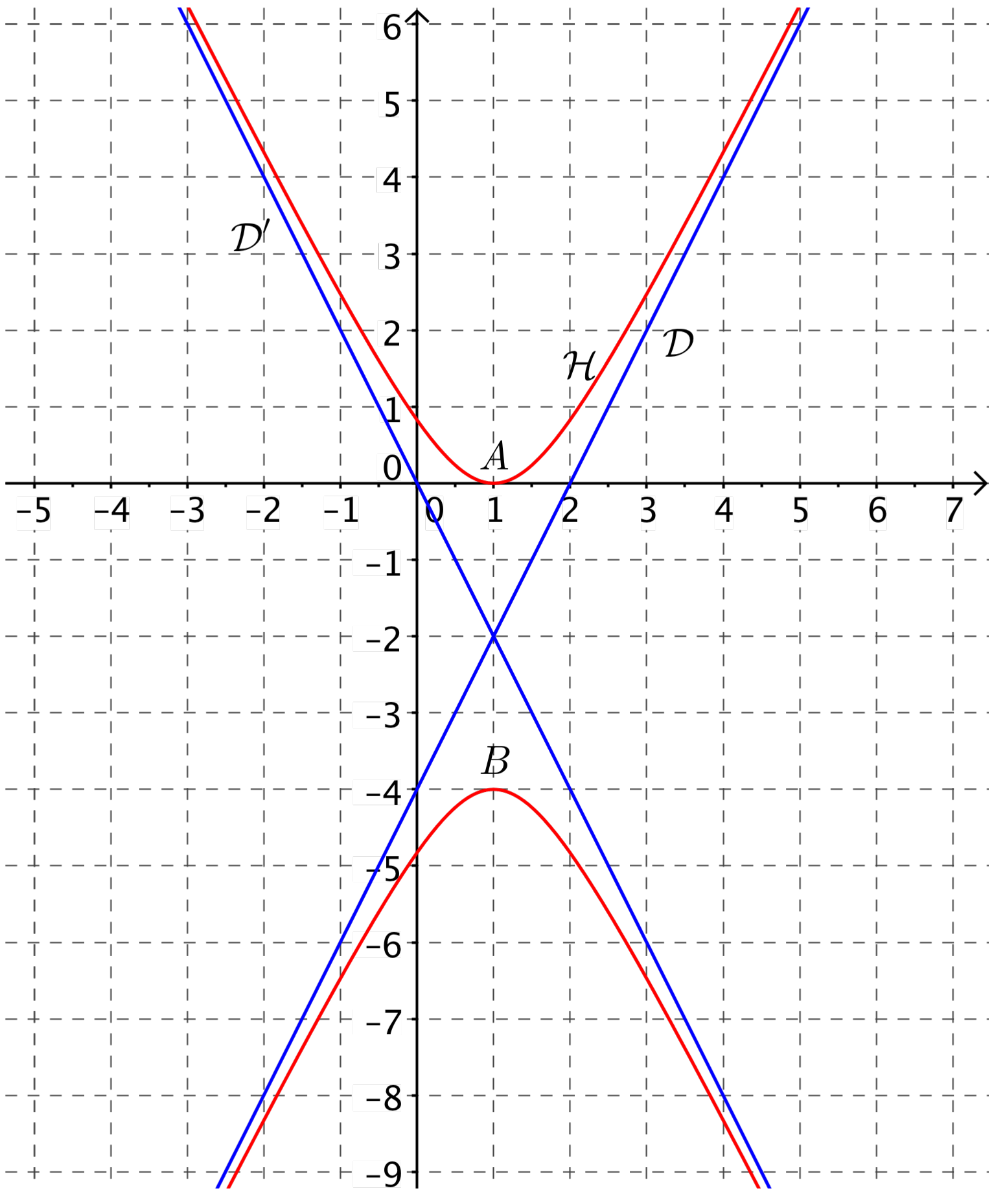
On considère la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \frac{x-2y}{y^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer puis représenter la courbe de niveau 1 de f.
3. Rappeler la définition d'une fonction homogène de degré $k \in \mathbb{R}$.
4. Montrer sur f est une fonction homogène dont vous préciserez le degré.

ANNEXE à L'EXERCICE 2

NOM & Groupe de TD :



UNIVERSITÉ DE CERGY **Licence d'Économie Finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion **L1 - S2**

Fonctions de plusieurs variables

Corrigé du TEST - Février 2016

Exercice 1 - 7 points

1. • **0,5 point** Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x+y=0$. Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$.
2. • **0,5 point** On a $3x_A+y_A=-3+3=0$, donc $A(-1;3;-2)$ appartient $\mathcal{P}$.
3. • **1 point** La droite Δ étant perpendiculaire à $\mathcal{P}$, un vecteur directeur de Δ est $\vec{n}$. De plus Δ passe par A, donc une représentation paramétrique possible de Δ est :

$$\left\{\begin{array}{rcrl} x & = & -1 & +3t \\ y & = & 3 & +t\,, \quad t\in\mathbb{R} \\ z & = & -2 & \end{array}\right.$$

4. On considère la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation cartésienne est :

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 2x & -y & +z & -3 & =0 \\ -x & +y & -2z & -4 & =0 \end{array}\right.$$

(a) • **1 point** Je choisis z comme paramètre pour donner une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 2x & -y & +z & -3 & =0 \\ -x & +y & -2z & -4 & =0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcl} & z=t'\in\mathbb{R} & & \\ 2x & -y & = & -t'+3 \\ -x & +y & = & 2t'+4 \end{array}\right.$$

En faisant la somme des deux lignes, on trouve $x=7+t'$, puis $y=x+2t'+4=11+3t'$

D'où : $\left\{\begin{array}{rcrl} x & = & 7 & +t' \\ y & = & 11 & +3t'\,, \quad t'\in\mathbb{R} \\ z & = & & t' \end{array}\right.$

(b) • **1,5 point**

(0,5 pt) Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{n}=6\neq 0$.

$\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux donc $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$. $\mathcal{D}$ coupe donc $\mathcal{P}$ en un point $B(x_B,y_B,z_B)$.

(1 pt) Les coordonnées de B vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_B & = & 7+t' \\ y_B & = & 11+3t' \\ z_B & = & t' \\ y_B & = & -3x_B \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_B & = & 7+t' \\ y_B & = & 11+3t' \\ z_B & = & t' \\ 11+3t' & = & -3(7+t') \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t' & = & \dfrac{-16}{3} \\ x_B & = & \dfrac{5}{3} \\ y_B & = & -5 \\ z_B & = & \dfrac{-16}{3} \end{array}\right.$$

Donc $B\left(\dfrac{5}{3};-5;\dfrac{-16}{3}\right)$

(c) • **1,5 point**

(0,5 pt) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{D}$ et Δ ne sont pas parallèles.

(1 pt) Pour étudier l'éventuelle intersection de $\mathcal{D}$ et Δ, on résout le système :

$$\begin{cases} -1+3t &= 7+t' \ (L_1) \\ 3+t &= 11+3t' \ (L_2) \\ -2 &= t' \ \ (L_3) \end{cases}$$

(L_3) donne $t' = -2$, puis (L_2) donne $t = 2$, enfin (L_1) est vérifiée avec ces valeurs des paramètres.

Donc $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes en $C(5; 5. -2)$

(d) • **1 point** D'après la construction : le projeté orthogonal du point C sur $\mathcal{P}$ est le point A car $\Delta = (AC)$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ en A : donc la distance du point C au plan $\mathcal{P}$ est la distance AC. On a $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $AC = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$.

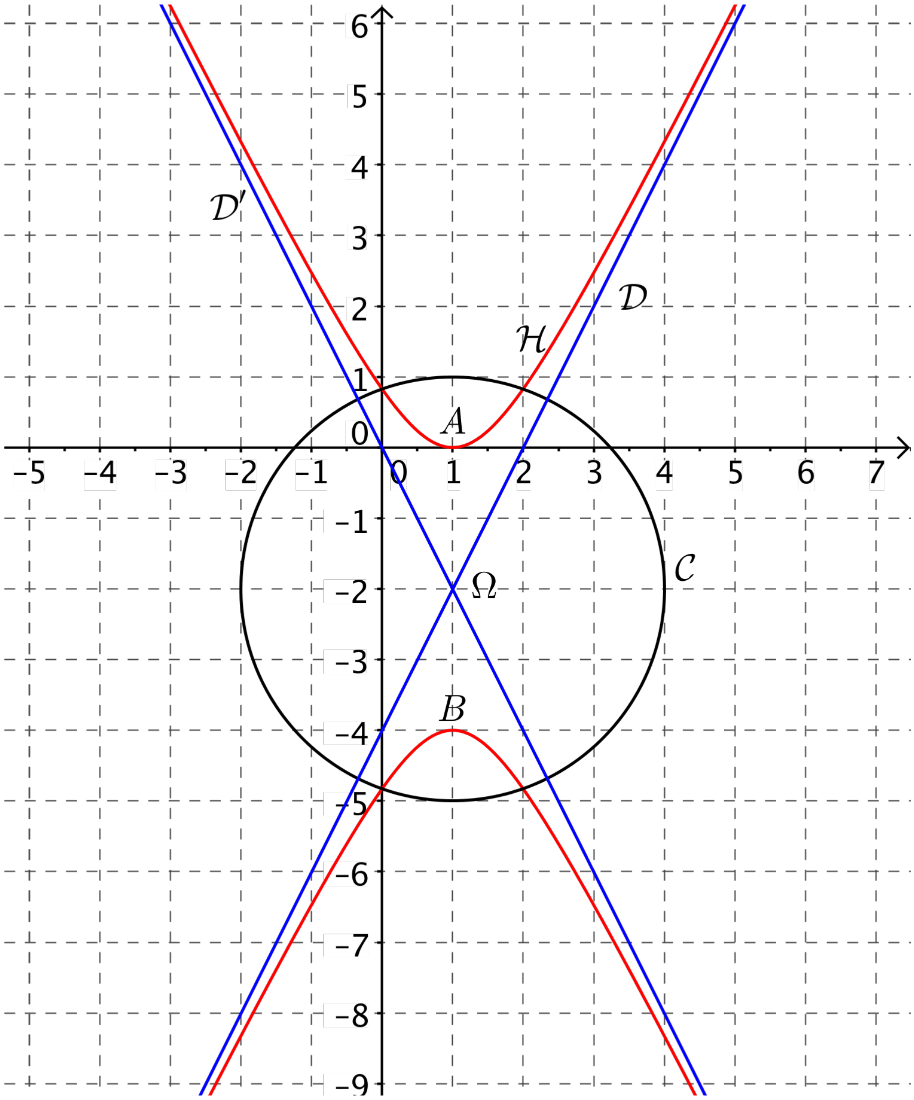
Exercice 2 - 7 points

1. • **1 point** $\mathcal{D}$ passe par $A_1(0; -4)$ et $B_1(2; 0)$ donc l'équation réduite de $\mathcal{D}$ est : $y = 2x-4$.
De même $\mathcal{D}'$ passe par O et $\Omega(1; -2)$ donc l'équation réduite de $\mathcal{D}'$ est : $y = -2x$

2. • **2 points**
(1 pt) $\mathcal{H}$ a pour centre $\Omega(1; -2)$ et est ouverte vers le haut et le bas, donc son équation canonique est du type :
$$\frac{(x-1)^2}{\alpha^2} - \frac{(y+2)^2}{\beta^2} = -1 \quad (*)$$
(0,5 pt) De plus $A(1; 0) \in \mathcal{H}$ donc ses coordonnées vérifient $(*)$
et $0 - \frac{(2)^2}{\beta^2} = -1 \iff \beta = 2$
(0,5 pt) Pour déterminer α on utilise l'équation de $\mathcal{D}$: on sait qu'elle est du type $\frac{(x-1)}{\alpha} - \frac{(y+2)}{2} = 0 \iff y = \frac{2(x-1)}{\alpha} - 1$
Par identification des coefficients directeurs déterminés, on a $\frac{2}{\alpha} = 2 \iff \alpha = 1$
Ainsi l'équation cherchée est :
$$(x-1)^2 - \frac{(y+2)^2}{4} = -1$$

3. • **1 point**
$4x^2 - 8x - y^2 - 4y + 4 = 0 \iff 4(x^2-2x) - (y^2+4y) + 4 = 0$
$\iff 4\Big((x-1)^2 - 1\Big) - \Big((y+2)^2 - 4\Big) + 4 = 0 \iff 4(x-1)^2 - (y+2)^2 = -4$
$\iff (x-1)^2 - \frac{(y+2)^2}{4} = -1$

4. • **0,5 point + 0,5 point figure** $\mathcal{C}$ a pour équation $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$



5. ● **2 points** Pour déterminer les points d'intersection de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ on résout :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcll}(x-1)^2-\dfrac{(y+2)^2}{4} & = & -1 & (E_1)\\ (x-1)^2+(y+2)^2 & = & 9 & (E_2)\end{array}\right.$$

Première méthode : On soustrait membres à membres (E_1) à (E_2) pour obtenir :

(E) : $\dfrac{5(y+2)^2}{4}=10 \Longleftrightarrow (y+2)^2=8 \Longleftrightarrow y+2=\sqrt{8}$ ou $y+2=-\sqrt{8}$
$\Longleftrightarrow y=-2+2\sqrt{2}$ ou $y=-2-2\sqrt{2}$
De plus, sachant que $(y+2)^2=8$, (E_2) donne : $(x-1)^2+8=9 \Longleftrightarrow (x-1)^2=1$
$\Longleftrightarrow x-1=-1$ ou $x-1=1 \Longleftrightarrow x=0$ ou $x=2$
$\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ ont donc quatre points d'intersection :

$$(0;-2+2\sqrt{2}),\ (0;-2-2\sqrt{2}),\ (2;-2+2\sqrt{2}),\ (2;-2+2\sqrt{2})$$

Seconde méthode : $(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll}4(x-1)^2-(y+2)^2 & = & -4 & (E_1)\\ (x-1)^2+(y+2)^2 & = & 9 & (E_2)\end{array}\right.$ On additionne membres à membres (E_1) et (E_2) pour obtenir (E) : $5(x-1)^2=5$

$(E) \Longleftrightarrow (x-1)^2=1 \Longleftrightarrow x-1=-1$ ou $x-1=1 \Longleftrightarrow x=0$ ou $x=2$

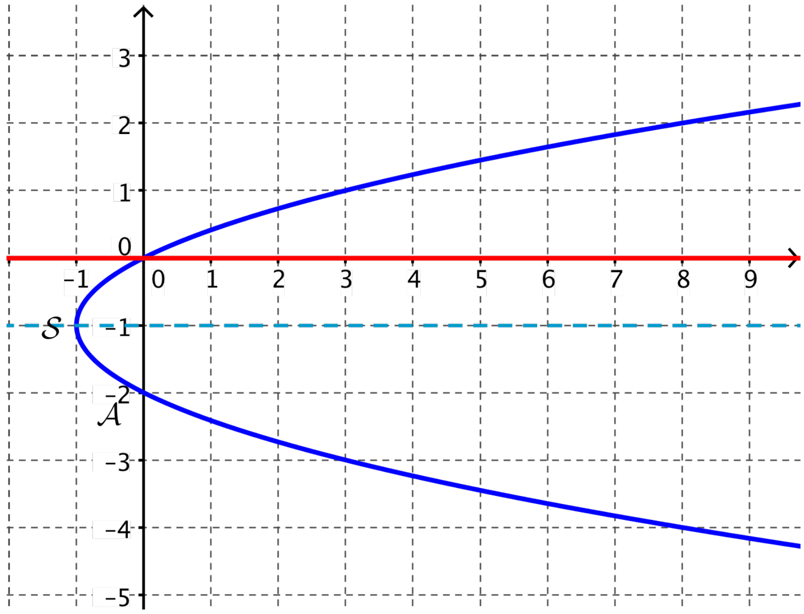
De plus, sachant que $(x-1)^2 = 1$, (E_2) donne : $1 + (y+2)^2 = 9 \iff (y+2)^2 = 8$
$\iff y + 2 = \sqrt{8}$ ou $y + 2 = -\sqrt{8} \iff y = -2 + 2\sqrt{2}$ ou $y = -2 - 2\sqrt{2}$
On retrouve les quatre points d'intersection de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$:

$$(0; -2+2\sqrt{2}),\ (0; -2-2\sqrt{2}),\ (2; -2+2\sqrt{2}),\ (2; -2+2\sqrt{2})$$

Exercice 3 - 6 points

On considère la fonction f définie par : $f(x, y) = \dfrac{x-2y}{y^2}$

1. • **1 point** f est définie en (x, y) si et seulement si $y^2 \neq 0 \iff y \neq 0$.
   Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus (Ox)$
2. • **3 points**
   (0,5 pt) On a : $f(x, y) = 1 \iff \dfrac{x-2y}{y^2} = 1 \iff x - 2y = y^2$ et $y \neq 0$
   $\iff x = y^2 + 2y$ et $y \neq 0$
   (1 pt) Pour définir L_1, ligne de niveau 1 de f, on considère la parabole horizontale $\mathcal{P}$, ouverte vers la droite, d'axe de symétrie la droite d'équation $y = -1$, de sommet $S(-1; -1)$, coupant l'axe (Ox) en O, et l'axe (Oy) en O et $A(0; -2)$.
   (0,5 pt) Alors L_1 est la parabole $\mathcal{P}$ **privée du point O.**
   (Figure : 1 pt)



3. • **1 point** La fonction de deux variables réelles f est dite **homogène de degré** k (où k est un réel) si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f, \forall t > 0, (tx, ty) \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(tx, ty) = t^k f(x, y)$$

4. • **1 point** **(0,5 pt)** Soient $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ et $t > 0$. On a donc $y \neq 0$ et donc $ty \neq 0$; ainsi $(tx, ty) \in \mathcal{D}_f$.
   (0,5 pt) De plus $f(tx, ty) = \dfrac{tx - 2ty}{(ty)^2} = \dfrac{t(x-2y)}{t^2y^2} = \dfrac{x-2y}{ty^2} = \dfrac{1}{t} f(x, y)$. f est donc homogène de degré -1.