UNIVERSITÉ DE CERGY **Licence d'Économie Finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion **L1 - S2**

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

TEST - Mars 2015 - 1h 30 min

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités
dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 9 points

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z + 3 = 0$, et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 2t-1 \\ y &= t+1\ , \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= -t \end{cases}$$

1. Soit $A(3; 3; -2)$. Montrer que A est un point de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$.
2. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$ orthogonale à $\mathcal{P}$ et passant par $B(3; -4; 5)$.
4. Déterminer une représentation cartésienne de $\mathcal{D}'$.
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection Ω de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}'$.
6. On considère la droite $\mathcal{D}''$ dont une représentation cartésienne est :

$$\begin{cases} x - y - z + 2 &= 0 \\ x + 2y \quad\quad - 1 &= 0 \end{cases}$$

   Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}''$ (on pourra choisir y pour paramètre)
7. Les droites $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont elles parallèles, sécantes ? Justifiez
8. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ sont elles parallèles, sécantes ? Justifiez

Exercice 2 - 4 points

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + 4y^2}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est homogène, vous préciserez le degré d'homogénéité de f.
3. Définir précisément les courbes de niveau 0 et 1 (notées respectivement L_0 et L_1).

Exercice 3 - 7 points

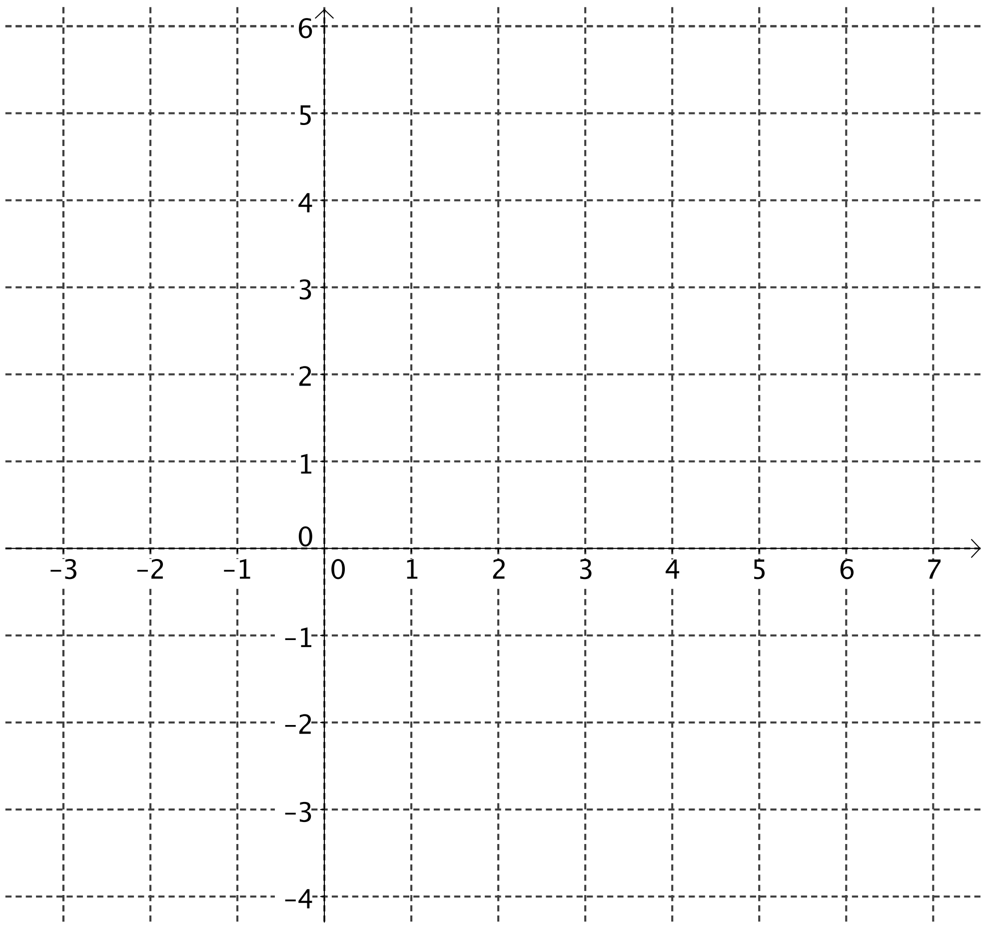
1. Soit $\mathcal{H}$ la courbe d'équation $x^2 - 4x - y^2 + 2y + 4 = 0$
   (a) Donner l'équation cartésienne de $\mathcal{H}$.
   (b) En déduire la nature de $\mathcal{H}$: vous donnerez les éléments caractéristiques suivants de $\mathcal{H}$: centre Ω, paramètres, asymptotes éventuelles, points d'intersection avec ses axes de symétrie.
2. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $I(2;0)$ et de rayon 2 : donner l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$.
4. Tracer sur la figure en annexe $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$.
5. **Question hors barème :** Soit f la fonction définie par

$$f(x;y) = \sqrt{4 - (x-2)^2 - y^2} + \ln\left(x^2 - 4x - y^2 + 2y + 4\right)$$

   Préciser le domaine de définition de f à l'aide d'inéquations. Représenter ce domaine sur la figure précédente (vous hachurerez ce qui **N'EST PAS** dans le domaine).

ANNEXE à L'EXERCICE 3

NOM & Groupe de TD :



UNIVERSITÉ DE CERGY **Licence d'Économie Finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion **L1 - S2**

Fonctions de plusieurs variables

Corrigé du TEST

Exercice 1 - 9 points

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z + 3 = 0$, et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 1 , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$$

1. **• 1 point** Soit $A(3; 3; -2)$. On vérifie que $2x_A - y_A + 3z_A + 3 = 6 - 3 - 6 + 3 = 0$ donc $A \in \mathcal{P}$.

   De plus, en prenant pour valeur du paramètre $t = 2$ dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$, on justifie que $A \in \mathcal{D}$.

2. **• 1 point** On peut refaire ce qui a été vérifié dans la question 1 avec un autre point A' de $\mathcal{D}$: par exemple avec $A'(-1; 1; 0)$ (déterminé pour $t = 0$), on vérifie que $A' \in \mathcal{P}$. Ainsi la droite $\mathcal{D}$ est confondue avec la droite (AA') : comme les deux points A et A' appartient à $\mathcal{P}$, la droite (AA') est incluse dans $\mathcal{P}$

   ou bien on peut aussi vérifier que pour tout point $M(x(t), y(t), z(t))$ de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire, pour tout réel t, on a : $2x(t) - y(t) + 3z(t) + 3 = 2(2t - 1) - (t + 1) + 3(-t) + 3 = ... = 0$ et $M \in \mathcal{P}$: donc $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$

3. **• 1 point** Tout vecteur normal à $\mathcal{P}$ est un vecteur directeur de de la droite $\mathcal{D}'$: par exemple $\overrightarrow{n} = (2; -1; 3)$. Ainsi une représentation paramétrique de $\mathcal{D}'$ est :

$$\begin{cases} x = 2t' + 3 \\ y = -t' - 4 , \quad t' \in \mathbb{R} \\ z = 3t' + 5 \end{cases}$$

4. **• 1 point** Pour déterminer une représentation cartésienne de $\mathcal{D}'$ à partir de la représentation précédente, on pose $t' = -y - 4$, et on obtient alors :

$$\begin{cases} x = 2(-y - 4) + 3 \\ z = 3(-y - 4) + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 5 = 0 \\ 3y + z + 7 = 0 \end{cases}$$

5. **• 1 point** Soit $\Omega(x, y, z)$ le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}'$. Les coordonnées de Ω vérifient :

$$\begin{cases} x = 2t' + 3 \\ y = -t' - 4 , \quad t' \in \mathbb{R} \\ z = 3t' + 5 \\ 2x - y + 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

   On substitue x, y et z dans la dernière équation, et on obtient : $2(2t' + 3) - (-t' - 4) + 3(3t' + 5) - 3 = 0 \iff 14t' + 28 = 0 \iff t' = -2$ que l'on utilise pour déterminer les coordonnées de $\Omega(-1; -2; -1)$

6. **• 1 point** On considère la droite $\mathcal{D}''$ dont une représentation cartésienne est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-y-z+2 & = & 0 \\ x+2y \quad\quad -1 & = & 0 \end{array}\right.$$

Pour déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}''$, on pose $y = t''$ et le système précédent devient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2t''+1 \\ y & = & t'', \quad t'' \in \mathbb{R} \\ z & = & x-y+2 = -3t''+3 \end{array}\right.$$

7. **• 1 point** Les droites $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ ont respectivement pour vecteurs directeurs $\vec{n'}(2;-1;3)$ et $\vec{n'}(-2;1;-3)$ qui sont clairement colinéaires : elles sont donc parallèles. On peut préciser qu'elles sont strictement parallèles car $E(3;-4;5) \in \mathcal{D}'$ (obtenu pour $t'=0$) mais E n'appartient pas à $\mathcal{D}''$ (les coordonnées de E ne vérifient pas la première équation de la représentation cartésienne de $\mathcal{D}''$)
8. **• 2 points** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ ne sont pas parallèles car si on prend $\vec{n} = (2;1.-1)$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{n''} = (2;-1;3)$ vecteur directeur de $\mathcal{D}''$ il est évident qu'il n'existe pas $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{n''} = k\vec{n}$
Pour vérifier si elle sont sécantes, on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2t-1 & = & -2t''+1 \\ t+1 & = & t'' \\ -t & = & -3t''+3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} t & = & -t''+1 \\ t & = & t''-1 \\ t & = & 3t''-3 \end{array}\right.$$

Les deux premières équations donnent immédiatement $t=0$, puis $t''=1$. Alors la troisième équation est bien vérifiée : les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ sont sécantes en $C'(-1;1;0)$

Exercice 2 - 4 points

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+4y^2}$

1. **• 1 point** f est définie en (x,y) si et seulement si $x^2+4y^2 \neq 0 \Longleftrightarrow (x,y) \neq (0;0)$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$
2. **• 1 point** Soient $(x,y) \in \mathcal{D}_f$ et $t>0$, alors $(x,y) \neq (0;0)$ et $(tx,ty) \neq (0;0)$, donc $(tx,ty) \in \mathcal{D}_f$ et $f(tx,ty) = \dfrac{2tx}{(tx)^2+4(ty)^2} = \dfrac{2tx}{t^2(x^2+4y^2)} = \dfrac{1}{t}\dfrac{2x}{x^2+4y^2} = t^{-1}f(x,y)$. f est donc homogène de degré -1.
3. **• 2 points**
(0,5 point) • Ligne de niveau 0
On résout $f(x,y)=0$ et $(x,y) \neq (0,0) \Longleftrightarrow x=0$ et $(x,y) \neq (0,0)$
L_0 est donc l'axe des ordonnées privé du point O.
(1,5 point) • Ligne de niveau 1
On résout

$$\begin{array}{rcl} & f(x,y)=1 & \text{et } (x,y)\neq(0,0) \\ \Longleftrightarrow & 2x = x^2+4y^2 & \text{et } (x,y)\neq(0,0) \\ \Longleftrightarrow & x^2-2x+4y^2=0 & \text{et } (x,y)\neq(0,0) \\ \Longleftrightarrow & (x-1)^2+4y^2=1 & \text{et } (x,y)\neq(0,0) \end{array}$$

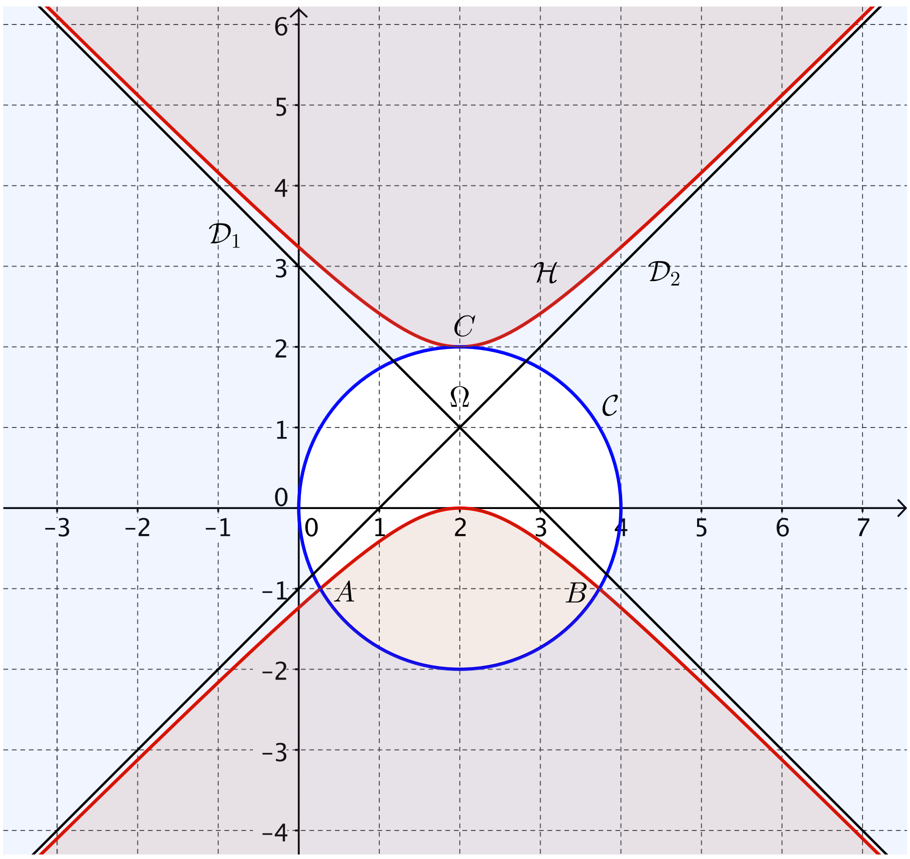
Ainsi L_1 est l'ellipse de centre $(1;0)$ et de coefficients $\alpha=1$ et $\beta=\dfrac{1}{2}$ privée du point O.
(-0,5 pt si l'étudiant oublie d'enlever 0 de la courbe de niveau)

Exercice 3 - 8,5 points

1. Soit $\mathcal{H}$ la courbe d'équation $x^2-4x-y^2+2y+4=0$
   (a) • **1 point** $x^2-4x-y^2+2y+4=0 \Longleftrightarrow (x-2)^2-4-\left((y-1)^2-1\right)+4=0 \Longleftrightarrow (x-2)^2-(y-1)^2=-1$
   (b) • **1,5 point** $\mathcal{H}$ est donc une hyperbole de centre $\Omega(2;1)$ et de paramètres $\alpha=\beta=1$. $\mathcal{H}$ est ouverte vers le haut et le bas. Ses asymptotes sont D_1 d'équation $y=-x+3$ et D_2 d'équation $y=x-1$. Enfin $\mathcal{H}$ et la droite d'équation $x=2$ ont deux points d'intersection $(2;0)$ et $(2;2)$.
2. • **0,5 point** Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $I(2;0)$ et de rayon 2 : $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne $(x-2)^2+y^2=4$
3. • **2 points** Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$, on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{lcll}(x-2)^2-(y-1)^2 & = & -1 & (L_1)\\ (x-2)^2+y^2 & = & 4 & (L_2)\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcll}(x-2)^2+y^2 & = & 4 & (L_2)\\ y^2+(y-1)^2 & = & 5 & (L_2)-(L_1)\end{array}\right.$$

   La seconde équation de ce système donne $2y^2-2y+1=5 \Longleftrightarrow y^2-y-2=0$, équation du second degré qui a deux solutions $y=-1$ et $y=2$
   • Si $y=-1$, la première équation du système, donne $(x-2)^2=3 \Longleftrightarrow x=2-\sqrt{3}$ ou $x=2+\sqrt{3}$
   • Si $y=2$; la première équation donne $(x-2)^2=0 \Longleftrightarrow x=2$
   Ainsi $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ se coupent en trois points $A(2-\sqrt{3};-1)$ $B(2+\sqrt{3};-1)$ et $C(2;2)$
4. • **Figure 2 points :** 0,5 point pour $\mathcal{C}$ et 1,5 point pour $\mathcal{H}$



5. • **1,5 point :** 1 point pour définir $\mathcal{D}$ et 0,5 point pour le représenter.
Soit f la fonction définie par $f(x;y)=\sqrt{4-(x-2)^2-y^2}+\ln\left(x^2-4x-y^2+2y+4\right)$
f est définie en $(x;y)$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4-(x-2)^2-y^2 & \geq & 0 \\ x^2-4x-y^2+2y+4 & > & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} (x-2)^2+y^2 & \leq & 4 \\ x^2-4x-y^2+2y+4 & > & 0 \end{array}\right.$$

Le domaine de définition de f est donc à l'intersection de l'intérieur du cercle et de la partie comprise entre les deux branches de l'hyperbole, le bord du cercle étant inclus, le bord de l'hyperbole est lui exclu.