UNIVERSITÉ DE CERGY **Licence d'Économie Finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion **L1 - S2**

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

TEST 1 - Février 2014 - 1h 30 min

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Questions diverses - 8 points

Les questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ suivantes :
   - $\mathcal{D}_1$ passe par $A(3;5)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
   - $\mathcal{D}_2$ a pour équation réduite : $y = 2x + 5$.
   - $\mathcal{D}_3$ a pour équation cartésienne : $x + 2y + 3 = 0$.

   (a) Déterminer un vecteur normal puis une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$.

   (b) Déterminer un vecteur directeur et un vecteur normal de $\mathcal{D}_2$ et de $\mathcal{D}_3$.

   (c) Justifier que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles et que $\mathcal{D}_3$ est orthogonale à ces deux droites.

   (d) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, déterminer une représentation paramétrique de la médiatrice Δ de $[AB]$ où $A(3;-1)$ et $B(1;-5)$
3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$, où $A(-2;1;-1)$ et $B(4;4;1)$.
4. On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $F(x,y) = 2x(y^2+1) - 3 = 0$
   Préciser si la relation $F(x,y) = 0$ permet de définir implicitement y en fonction de x ou x en fonction de y.

Exercice 1 - 5 points

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + 2y - z - 1 = 0$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P}$ et passant par $F(-7;0;4)$.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection Ω de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$
3. Calculer la distance $F\Omega$
4. On considère la droite $\mathcal{D}'$ dont une représentation cartésienne est :
$$\begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}$$
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$
5. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont elles parallèles, sécantes ?

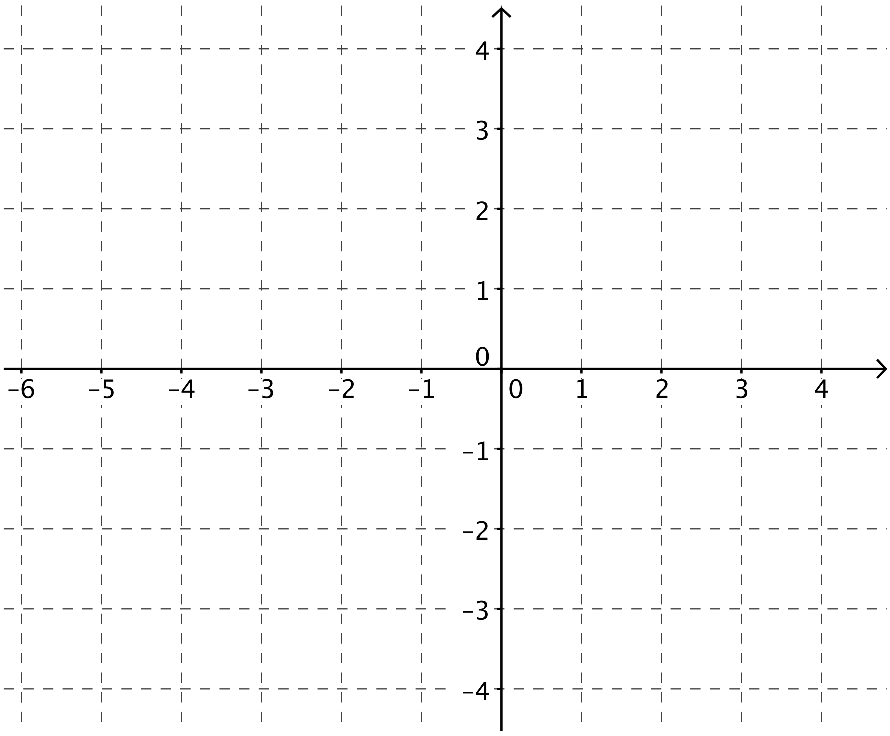
Exercice 2 - 7 points

Soit $\mathcal{H}$ la conique d'équation $(E)\ :\ x^2 + 2x - y^2 = 0$

1. Déterminer l'équation canonique de $\mathcal{H}$, puis préciser sa nature, son centre, ses paramètres et ses asymptotes D_1 et D_2.
2. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $I(-2; 0)$ et de rayon 2 : donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$
3. Tracer D_1, D_2, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ dans le repère joint en annexe : vous préciserez les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{H}$ avec ses axes de symétrie.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$

ANNEXE à L'EXERCICE 2

NOM & Groupe de TD :



UNIVERSITÉ DE CERGY **Licence d'Économie Finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion **L1 - S2**

Fonctions de plusieurs variables

Corrigé du TEST 1
Questions diverses - 8,5 points

1. • **4 points**
   - $\mathcal{D}_1$ passe par $A(3;5)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
   - $\mathcal{D}_2$ a pour équation réduite : $y = 2x + 5$.
   - $\mathcal{D}_3$ a pour équation cartésienne : $x + 2y + 3 = 0$.

   (a) • **1 point** $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_1$: l'équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$ est donc de la forme : $2x - y + c = 0$: comme $A(3;5) \in \mathcal{D}_1$, $c = -1$, et une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$ est : $2x - y - 1 = 0$

   (b) • **1 point** $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}_2$.
   $\overrightarrow{n_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal et $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_3$.

   (c) • **1 point** $\overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{u_2}$: les vecteurs directeurs sont colinéaires, les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles.
   $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} = 0$: les vecteurs directeurs sont orthogonaux et les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont perpendiculaires. Par conséquent $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont perpendiculaires.

   (d) • **1 point** On résout le système :
   $$\begin{cases} y &= 2x+5 \\ x+2y+3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 2x+5 \\ x+2(2x+5) &= -3 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 2x+5 \\ 5x &= -13 \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} x &= \dfrac{-13}{5} \\ y &= \dfrac{-1}{5} \end{cases} \quad \text{Donc } I\left(\frac{-13}{5}, \frac{-1}{5}\right)$$

2. • **1,5 point** La médiatrice de [AB] passe par le milieu $I(2;-3)$ de [AB] et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$: un vecteur directeur de Δ est $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$: une représentation paramétrique de Δ (en utilisant le point I) est :
   $$\begin{cases} x &= 2+4t \\ y &= -3-2t \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

3. • **1 point** $M(x;y;z)$ appartient à la sphère de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
   $$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -2-x \\ 1-y \\ -1-z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4-x \\ 4-y \\ 1-z \end{pmatrix} = (-2-x)(4-x)+(1-y)(4-y)+(-1-z)(1-z)$$
   $$= x^2 - 2x + y^2 - 5y + z^2 - 5 = 0$$

Une autre méthode est de préciser que cette sphère est de centre $\Omega(1;\dfrac{5}{2};0)$ milieu de $[AB]$ et de rayon $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}{2}=\dfrac{7}{2}$ et une équation cartésienne de la sphère est

$$(x-1)^2+(y-\frac{5}{2})^2+z^2=\frac{49}{4}$$

4. • **2 points** On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $F(x,y)=2x(y^2+1)-3=0$

   • Résolution en y : on a , pour tout $x\neq 0$, $F(x,y)=0\iff y^2=\dfrac{3}{2x}-1$

   Si $\dfrac{3}{2x}-1\geq 0\iff 0<x\leq\dfrac{3}{2}$, alors $y=\sqrt{\dfrac{3}{2x}-1}$ ou $y=-\sqrt{\dfrac{3}{2x}-1}$

   La relation $F(x,y)=0$ ne permet pas de définir implicitement y en fonction de x

   • Résolution en x : on a $F(x,y)=0\iff x=\dfrac{3}{2(y^2+1)}$: La relation $F(x,y)=0$ permet de définir implicitement x en fonction de y.

Exercice 1 - 5,5 points

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x+2y-z-1=0$

1. • **1 point** $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, donc un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x&=&-7+t\\y&=&2t\ ,\quad t\in\mathbb{R}\\z&=&4-t\end{array}\right.$$

2. • **1 point** Les coordonnées du point d'intersection $\Omega(x,y,z)$ de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ vérifient

$$\text{le système}\left\{\begin{array}{lcl}x&=&-7+t\\y&=&2t\ ,\quad t\in\mathbb{R}\\z&=&4-t\\&&x+2y-z-1=0\end{array}\right.$$

   On résout ce système par substitution : (L_4) donne $(-7+t)+2(2t)-(4-t)-1=0\iff t=2$, puis on remplace cette valeur de t dans les 3 première lignes, et $\Omega(-5;4;2)$

3. • **0,5 point** La distance $F\Omega=\sqrt{(-5+7)^2+(4-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

   Remarque : Cette distance est la distance du point F au plan $\mathcal{P}$

4. • **1 point** $\mathcal{D}'$: $\left\{\begin{array}{rcl}x+y-z+5&=&0\\y+z-4&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}z&=&t'\\x+y&=&t'-5\\y&=&-t'+4\end{array}\right.$

$$\iff\left\{\begin{array}{lcl}z&=&t'\\y&=&-t'+4\\x&=&-y+t'-5=2t'-9\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}x&=&-9+2t'\\y&=&4-t'\ ,\quad t'\in\mathbb{R}\\z&=&t'\end{array}\right.$$

5. • **2 points** Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est $\overrightarrow{u}'=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ ces vecteurs sont clairement non colinéaires : les droites ne sont pas parallèles.

Pour étudier l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ on résout le système :

$$\begin{cases} -7+t &= -9+2t' \\ 2t &= 4-t' \\ 4-t &= t' \end{cases} \iff \begin{cases} t-2t' &= -2 \\ 2t+t' &= 4 \\ t+t' &= 4 \end{cases}$$

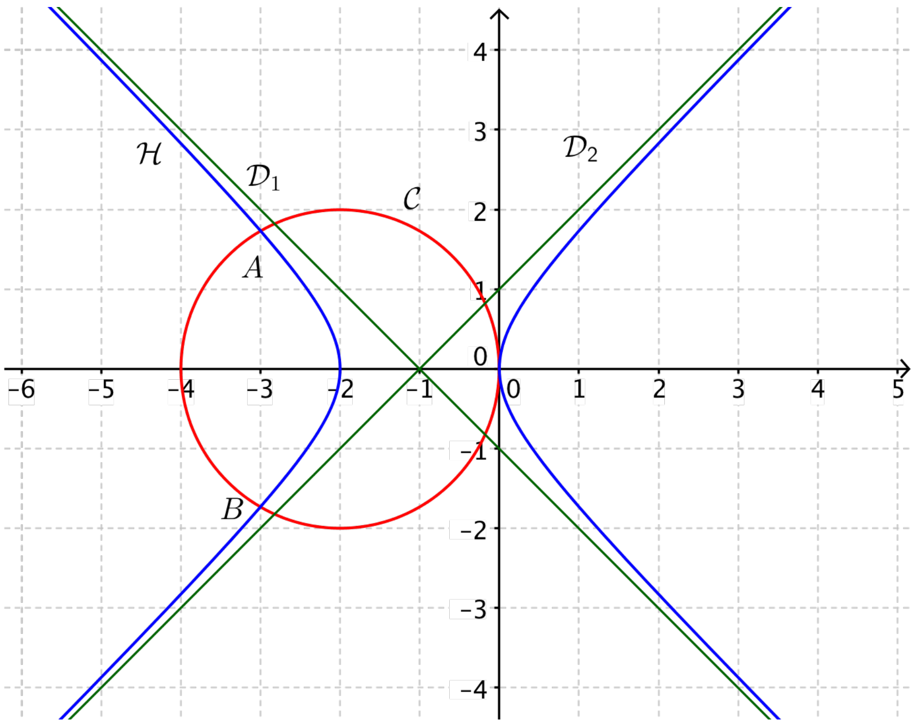
En utilisant la première et la troisième équation, on trouve $t = 2$ et $t' = 2$, mais la seconde équation n'est alors pas vérifiée. Le système n'a pas de solution et les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas sécantes.

Exercice 2 - 7 points

Soit $\mathcal{H}$ la conique d'équation $(E)\ :\ x^2 + 2x - y^2 = 0$

1. • **2 points** On a l'équivalence $(E)\ :\ x^2+2x-y^2 = 0 \iff (x+1)^2 - y^2 = 1$: $\mathcal{H}$ est donc l'hyperbole de centre $\Omega(-1;0)$ de coefficients $\alpha = \beta = 1$ et d'asymptotes D_1 d'équation $y = -x-1$ et D_2 d'équation $y = x+1$.
2. • **0,5 point** Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(-2;0)$ et de rayon 2 a pour équation cartésienne $(x+2)^2 + y^2 = 4$
3. • **0,5 point** $\mathcal{H}$ et l'axe (Ox) ont deux points d'intersection O et $O'(-2;0)$

   • **Figure : 2 points** : 1,5 point pour $\mathcal{H}$ et ses asymptotes et 0,5 point pour $\mathcal{C}$



4. • **2 points** On résout le système :

$$\begin{cases} (x+1)^2 - y^2 &= 1 \quad (L_1) \\ (x+2)^2 + y^2 &= 4 \quad (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} (x+1)^2 - y^2 &= 1 \\ (x+1)^2 + (x+2)^2 &= 5 \quad (L_1)+(L_2) \end{cases}$$

La seconde équation donne : $2x^2 + 6x + 5 = 5 \iff 2x(x+3) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -3$

• Si $x = 0$ la première équation devient : $1 - y^2 = 1 \iff y^2 = 0 \iff y = 0$: il y a un point d'intersection $O(0;0)$

• Si $x = -3$ la première équation devient $4 - y^2 = 1 \iff y^2 = 3 \iff y = \sqrt{3}$ ou $y = -\sqrt{3}$: il y a deux points d'intersection $A(-3;\sqrt{3})$ et $B(-3;-\sqrt{3})$