**UNIVERSITÉ DE CERGY** **Licence d'Économie et Gestion**
**U.F.R. Economie et Gestion** **L1 - S2**

**FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES**

**TEST 1 - Février 2013 - 1h 30 min**

**Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.**
**Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.**
**CALCULATRICES INTERDITES**
**LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.**

## Questions de cours - 7 points

Les questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations réduites respectives $\mathcal{D}\ : y = 3x - 4$ et $\mathcal{D}'\ : y = \frac{-1}{3}x + 6$. Donner un vecteur directeur et un vecteur normal pour chacune de ces droites, puis justifier qu'elles sont perpendiculaires. Déterminer les coordonnées du point d'intersection $I$ de ces deux droites.
2. L'espace étant muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points $A(-5;2;4)$ et $B(3;2;-2)$.
   a) Calculer la distance $AB$.
   b) En déduire une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ de diamètre $[AB]$.
3. On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $x = y^2 + 6y + 5$
   a) Déterminer les éléments caractéristiques de $\mathcal{P}$ (orientation, axe de symétrie, sommet, intersections avec les deux axes du repère)
   b) Justifier que l'équation $(E)\ :\ F(x, y) = y^2 + 6y + 5 - x = 0$ ne permet pas de définir implicitement $y$ en fonction de $x$.

## Exercice 1 - 8 points

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé, on considère le point $N(1;1;1)$ et le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par $N$.
2. Donner une représentation cartésienne de l'axe $(Ox)$, puis justifier que le point $A$ intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe $(Ox)$ a pour coordonnées $(6;0;0)$.
   De même, soient $B(0;2;0)$ le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe $(Oy)$ et $C(0;0;3)$ le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec $(Oz)$.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur $\mathcal{P}_M$ au segment $[AB]$.
4. En déduire une représentation cartésienne de la médiatrice $\mathcal{M}$ à $[AB]$ dans le triangle $ABC$.

5. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{M}$.
6. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(BC)$, puis les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{M}$ et $(BC)$.

**Exercice 2 - 5 points**

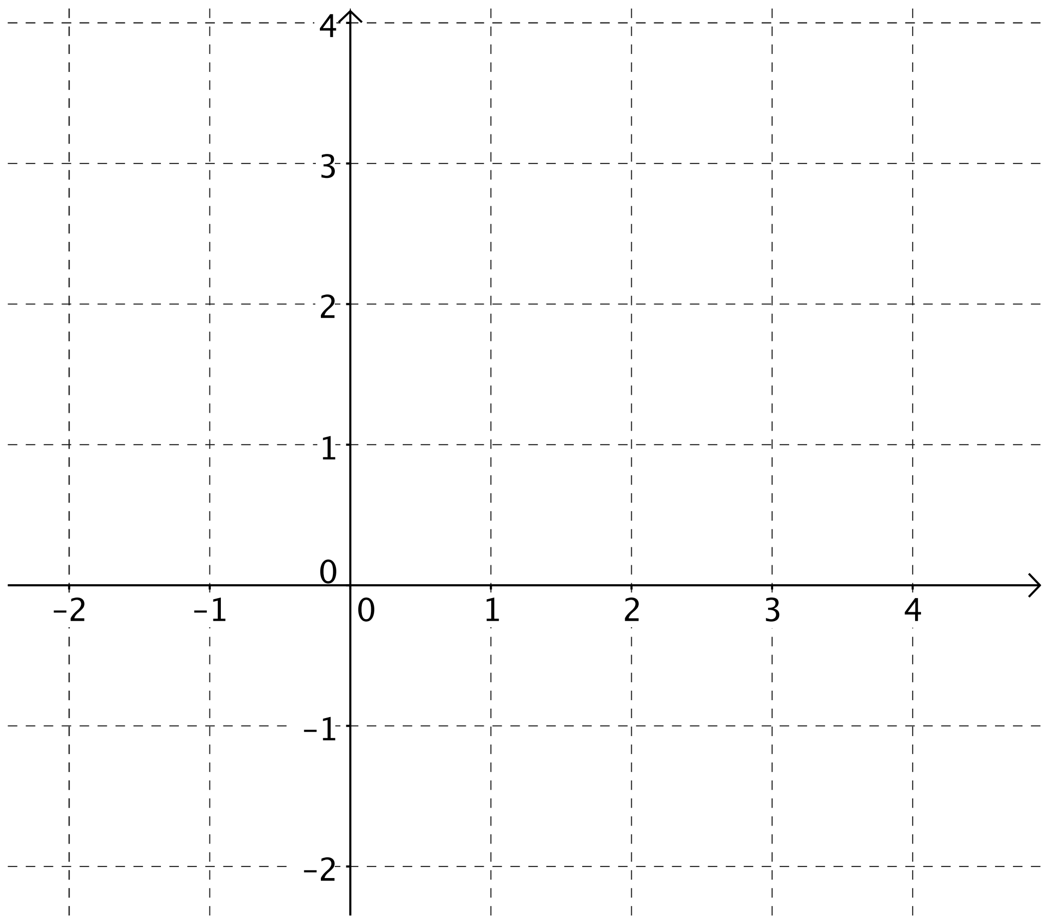
On considère la conique $\mathcal{E}$ d'équation $(E)\ :\ 4x^2 - 16x + y^2 - 2y + 13 = 0$

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ : vous préciserez alors sa nature, son centre et ses coefficients.
2. Tracez $\mathcal{E}$ dans le repère joint en annexe.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation réduite $y = 2x - 1$ : tracez $\mathcal{D}$ dans le repère.
4. Déterminer par un calcul les coordonnées des points d'intersections de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$.

---

**ANNEXE à L'EXERCICE 2**

**NOM & Groupe de TD :**



**UNIVERSITÉ DE CERGY** **Licence d'Économie et Gestion**
**U.F.R. Economie et Gestion** **L1 - S2**

**Fonctions de plusieurs variables**

**Corrigé du TEST 1**

**Questions de cours - 8 points**

1. • **2,5 points**

   Si une droite a une équation réduite du type $y = mx + p$, alors $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $D$ et $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal .

   **(0,5 point)** Ici, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

   **(0,5 point)** $\overrightarrow{u}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ et $\overrightarrow{n}' = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

   **(0,5 point)** On remarque que le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}' = 0$ : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc perpendiculaires en $I(x_I, y_I)$ tel que :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} y_I & = & 3x_I - 4 \\ y_I & = & \dfrac{-1}{3}x_I + 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y_I & = & 3x_I - 4 \\ 3x_I - 4 & = & \dfrac{-1}{3}x_I + 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{10}{3}x_I & = & 10 \\ y_I & = & 3x_I - 4 \end{array}\right. .$$

   **(1 point)** Soit $I(3; 5)$

2. • **2 points**

   L'espace étant muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points $A(-5; 2; 4)$ et $B(3; 2; -2)$

   a) **(0,5 point)** $AB = \sqrt{(3-(-5))^2 + (2-2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{64+0+36} = 10$

   b) **(1 point)** La sphère $\mathcal{S}$ de diamètre $[AB]$ a pour centre $\Omega(-1; 2; 1)$ le milieu de $[AB]$ et a pour rayon $\dfrac{AB}{2} = 5$.

   **(0,5 point)** Une équation cartésienne de $\mathcal{S}$ est donc

   $$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$$

3. • **3,5 points**

   a) **(0,25 point)** $\mathcal{P}$ est une parabole ouverte vers la droite
   **(0,25 point)** d'axe de symétrie d'équation $y = -3$
   **(0,5 point)** et de sommet $S(-4; -3)$ ;
   **(0,5 point)** d'intersection avec $(0x)$ le point $A(5; 0)$.
   **(1 point)** et avec l'axe $(0y)$ les points $B(0; -1)$ et $C(0; -5)$

   b) • **1 point** On remarque que pour $x = 0$, il y a deux valeurs de $y$ telles que $F(0; y) = 0$ (ce sont $y = -1$ et $y = -5$) : partant de l'équation $F(x, y) = 0$, si on cherche à résoudre **en y** cette équation avec $x = 0$, on trouvera donc les deux solutions $-1$ et $-5$ : on ne peut donc pas définir implicitement $y$ en fonction de $x$ .
   Nota : Une simple remarque graphique suffisait.

## Exercice 1 - 8 points

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé, on considère le point $N(1;1;1)$ et le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. **• 1 point** $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne du type $x+3y+2z+d=0$ et $N(1;1;1)$ appartient à $\mathcal{P}$, donc $1+3+2+d=0$ et $d=-6$. $\mathcal{P}$ a donc pour équation $x+3y+2z-6=0$.
2. **• 1 point**

   **(0,5 point)** Une représentation paramétrique de l'axe $(Ox)$ est $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ car $(Ox)$ est la droite d'intersection des deux plans de bases $(x0z)$ et $(xOy)$.

   **(0,5 point)** Ainsi les coordonnées du point $A$ sont les solutions du système :
   $\begin{cases} x+3y+2z-6 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ d'où $A(6;0;0)$
3. **• 2 points**

   **(1 point)** Le plan médiateur $\mathcal{P}_M$ au segment $[AB]$ passe par $I(3;1;0)$ milieu de $[AB]$ et a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   **(1 point)** $\mathcal{P}_M$ a donc une équation cartésienne du type $-6x+2y+0z+d=0$, comme $I$ appartient à ce plan, $-6x_I+2y_I+d=0 \iff d=16$ et $\mathcal{P}_M$ a pour équation $-6x+2y+16=0$.
4. **• 1 point** Une représentation cartésienne de la médiatrice $\mathcal{M}$ à $[AB]$ dans le triangle $ABC$ est donnée par le système des équations des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_M$ :
   $$\begin{cases} x+3y+2z-6 = 0 \\ -6x+2y+16 = 0 \end{cases}$$
5. **• 1 point** Dans le système précédent, on choisit $x$ pour paramètre, on a donc :
   $$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 3y+2z = -x+6 \\ y = 3x-8 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x-8 \\ z = -5x+15 \end{cases}$$
6. **• 2 points**

   **(1 point)** Une représentation paramétrique de $(BC)$ (en utilisant le vecteur $\overrightarrow{BC} = (0;-2;3)$ et le point $B(0;2;0)$) est :
   $$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2t'+2 \\ z = 3t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}$$

   **(1 point)** Puis on résout le système :
   $$\begin{cases} t = 0 \\ 3t-8 = -2t'+2 \\ -5t+15 = 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ t' = 5 \\ -5t+15 = 3t' \end{cases}$$

   La troisième équation est vérifiée ...$\mathcal{M}$ et $(BC)$ ont pour point d'intersection le point de coordonnées $(0;-8;15)$

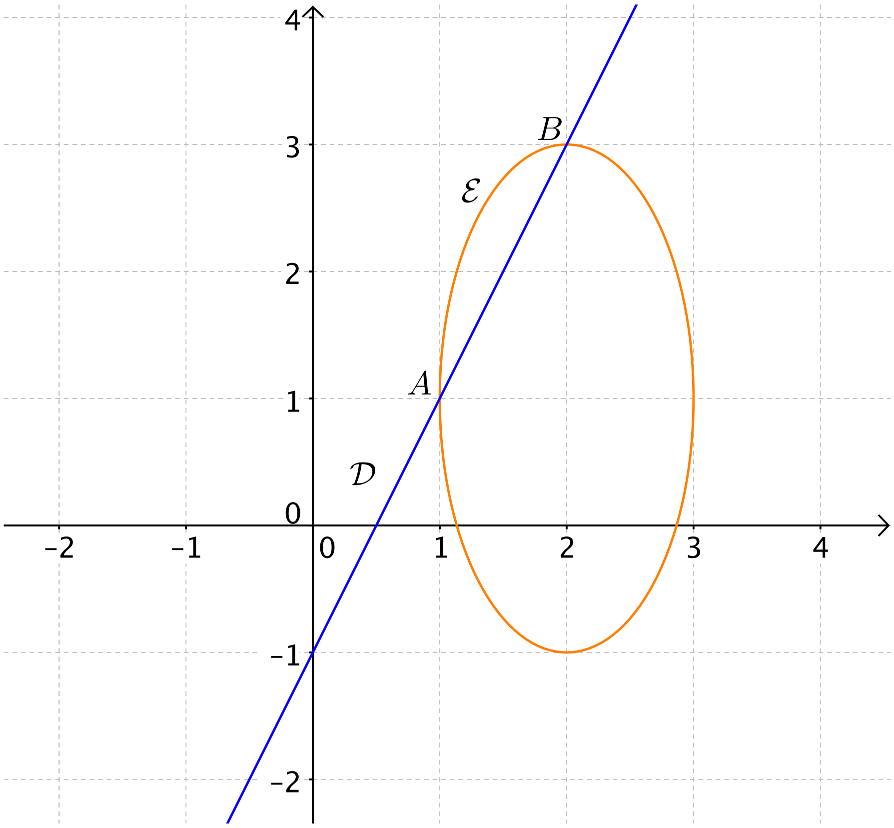
**Exercice 2 - 6 points**

1. • **2 points**

$$\begin{array}{rcc} (E) & : & 4x^2 - 16x + y^2 - 2y + 13 = 0 \\ & \iff & 4(x^2 - 4x) + y^2 - 2y = -13 \\ \textbf{(1,5 point)} & \iff & 4\Big((x-2)^2 - 4\Big) + \Big((y-1)^2 - 1\Big) = -13 \\ & \iff & 4(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \\ & \iff & (x-2)^2 + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1 \end{array}$$

**(0,5 point)** $\mathcal{E}$ est une ellipse de centre $\Omega(2;1)$ et de coefficients $\alpha = 1$ et $\beta = 2$

2. Figure : • **1,5 point (0,5 point pour $\mathcal{D}$ et 1 point pour $\mathcal{E}$)**




3. • **2,5 points** On résout le système (par substitution)

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x-2)^2 + \dfrac{(y-1)^2}{4} & = & 1 \\ y & = & 2x-1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-1 \\ x^2 - 4x + 4 + \dfrac{(2x-2)^2}{4} & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-1 \\ x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-1 \\ 2x^2 - 6x + 4 & = & 0 \end{array}\right.$$

L'équation $2x^2 - 6x + 4 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 4$ et possède donc deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

Conclusion : $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$ possèdent deux points d'intersection $A(1;1)$ et $B(2;3)$