UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Economie et Gestion

Licence d'Économie et Gestion
L1 - S2

**FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES**

**TEST 1 - Février 2012 - 1h 30 min**

**Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.**
**Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.**
**CALCULATRICES INTERDITES**
**LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.**

**Exercice 1 - 6 points**

Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 2t-2 \\ z & = & -t+2 \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}$$

1. Justifier que la point $A(1;0;1)$ appartient à $\mathcal{D}$.
2. Donner l'équation du plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ et passant par $A$.
3. Soit $\mathcal{D}'$ La droite dont une représentation cartésienne est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} -2x+y+z+2 & = & 0 \\ 3x-y+z-4 & = & 0 \end{array}\right.$$

   Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{D}'$.
4. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles parallèles ? sécantes ? Justifiez !

**Exercice 2 - 5 points**

Soit $\mathcal{H}$ la conique d'équation cartésienne : $x^2 - y^2 + 4y - 3 = 0$

1. Justifiez $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont vous donnerez le centre $\Omega$, les coefficients $\alpha$ et $\beta$, et les asymptotes.
2. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $I(0;3)$ et de rayon 2. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$.

**Exercice 3 - 3 points**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$

1. Déterminer le domaine de définition de $f$.
2. Démontrer que $f$ est une fonction homogène dont vous préciserez le degré.
3. Définir et décrire la ligne de niveau 2.

**NOM - Prénom :**

**Groupe de T.D. :**

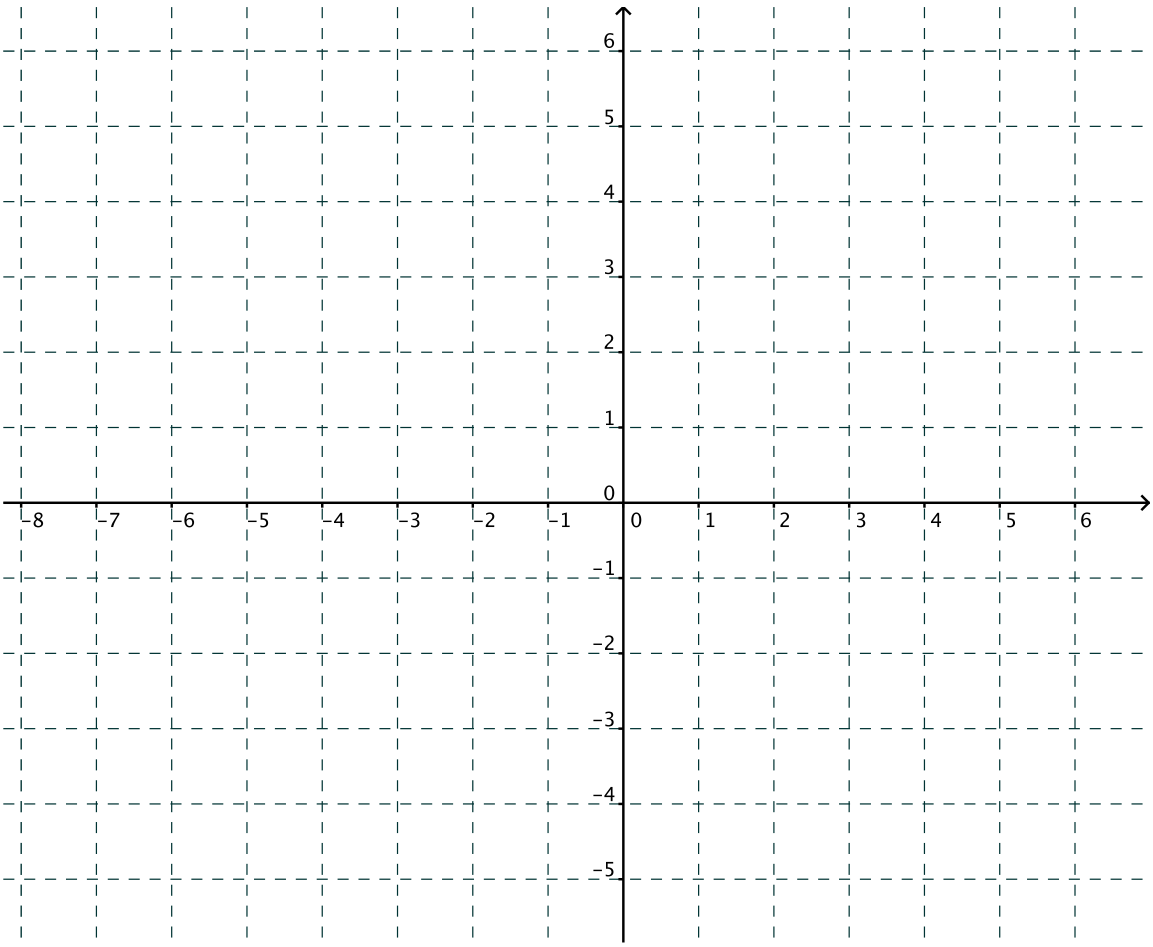
### Exercice 4 - 6 points

Soit $f$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \sqrt{2x+y+1} + \ln(-x-y^2+2y+3)$$

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f$ et le représenter avec soin dans le repère orthonormé fourni ci-dessous (hachurer la partie du plan qui **N'est PAS** dans le domaine)

Vous devez expliquer précisément la construction des deux « courbes » qui bordent le domaine et vous préciserez les coordonnées des points d'intersection de ces deux courbes.



**Fonctions de plusieurs variables**

**Corrigé du TEST 1**

## Exercice 1 - 6 points

1. **0,5 point** $A \in \mathcal{D}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{ccc} t & = & 1 \\ 2t-2 & = & 0 \\ -t+2 & = & 1 \end{array}\right.$$

On vérifie aisément que ce système possède la solution $t = 1$. Donc $A(1;0;1)$ appartient à $\mathcal{D}$.

2. **1,5 point** Le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ donc un vecteur normal à $\mathcal{P}$ : donc $\mathcal{P}$ a une équation du type : $x + 2y - z + d = 0$. De plus $A(1;0;1) \in \mathcal{P}$, donc $d = 0$ et une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est : $x + 2y - z = 0$.

3. **1,5 points**

$$\left\{\begin{array}{ll} -2x+y+z+2 & = 0 \\ 3x-y+z-4 & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cl} t \in \mathbb{R} & \\ z & = t \\ -2x+y & = -t-2 \\ 3x-y & = -t+4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t \in \mathbb{R} \\ x = -2t+2 \\ y = -5t+2 \\ z = t \end{array}\right.$$

4. **2,5 points** Un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est $\overrightarrow{u'} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas colinéaires : donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.
On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} t & = & -2t'+2 \\ 2t-2 & = & -5t'+2 \\ -t+2 & = & t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} t & = & -2t'+2 \\ 2(-2t'+2)-2 & = & -5t'+2 \\ -t+2 & = & t' \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} t & = & -2t'+2 \\ t' & = & 0 \\ -t+2 & = & t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = 2 \\ t' = 0 \end{array}\right.$$

Donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en $B(2;2;0)$ correspondant aux paramètres $t = 2$ (ou $t' = 0$)

## Exercice 2 - 5 points

1. **2 points** On a l'équivalence $x^2 - y^2 + 4y - 3 = 0 \iff x^2 - (y-2)^2 = -1$ : $\mathcal{H}$ est donc une hyperbole ouverte vers le haut de coefficients $\alpha = \beta = 1$, de centre $\Omega(0;2)$ et d'asymptotes $D_1 \ : \ x - y + 2 = 0$ et $D_2 \ : \ x + y - 2 = 0$.
2. **0,5 point** $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne : $x^2 + (y-3)^2 = 4$
3. **2,5 point** On résout le système

$$\left\{\begin{array}{ll} x^2 + (y-3)^2 & = 4 \\ x^2 - (y-2)^2 & = -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cl} x^2 + (y-3)^2 & = 4 \\ (y-3)^2 + (y-2)^2 & = 5 \end{array}\right.$$

On développe la seconde équation : $(y-3)^2 + (y-2)^2 = 5 \iff 2y^2 - 10y + 8 = 0 \iff y^2 - 5y + 4 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$, donc possède deux solutions $y_1 = 1$ et $y_2 = 4$
Si $y = 1$ alors la première équation $(x^2 + (y-3)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 4 = 4)$ implique $x = 0$ : il y a un point d'intersection : $A(0;1)$.
Si $y = 4$, alors $x^2 + (y-3)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 1 = 4)$ implique $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ : il y a deux points d'intersection : $B(\sqrt{3};4)$ et $C(-\sqrt{3};4)$

## Exercice 3 - 3 points

Soit $f$ la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$

1. **0,5 point** $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq x\right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, où $\Delta$ est la droite d'équation $y = x$.
2. **1 point** Soit $t > 0$ et $(x,y) \in D_f$, alors $(tx,ty) \in D_f$ et $f(tx,ty) = \dfrac{t^2x^2 + t^2y^2}{tx - ty} = tf(x,y)$. $f$ est homogène de degré 1.
3. **1,5 point** Pour étudier $I_2$, on résout $\dfrac{x^2 + y^2}{x - y} = 2$ sur $D_f$
$\iff x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ et $y \neq x$
$\iff (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ et $y \neq x$
$I_2$ est le cercle de centre $\Omega(1;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$, **privé du point $O$ !**

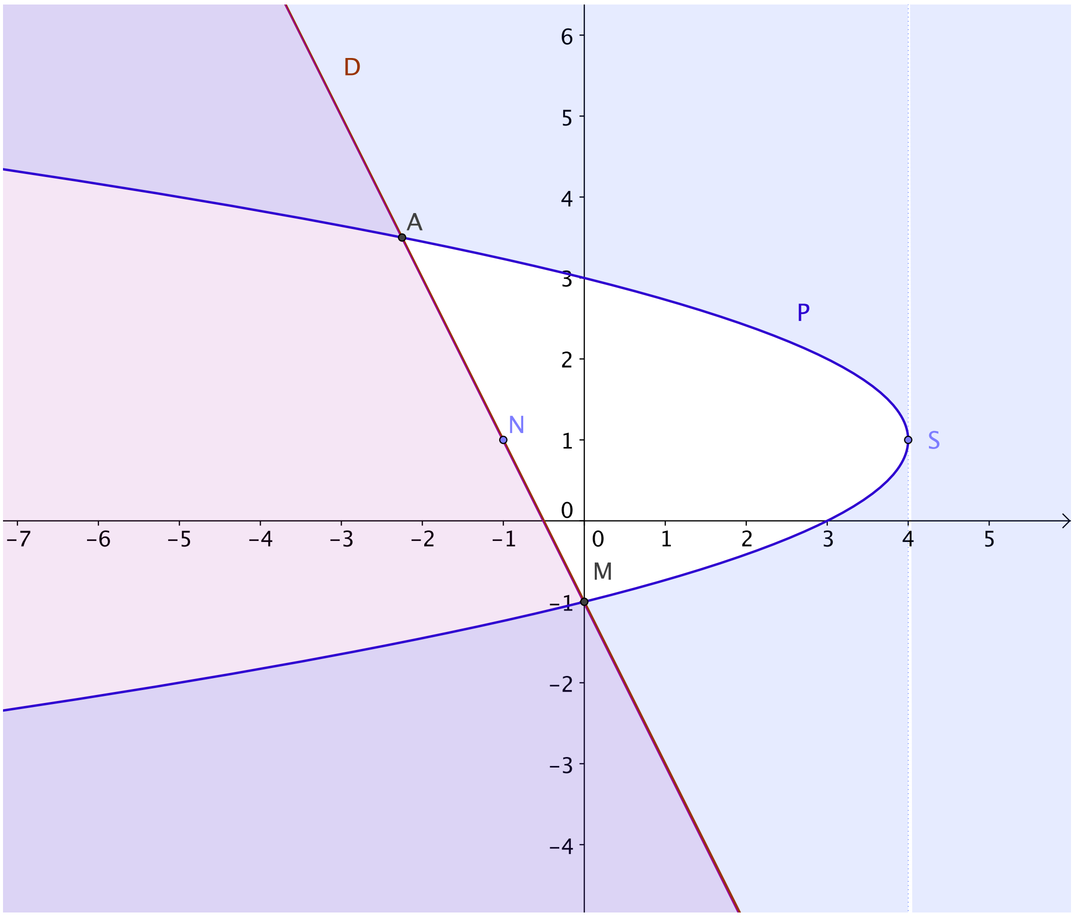
## Exercice 4 - 5 points

$f$ est définie en $(x,y)$ si et seulement si $2x + y + 1 \geq 0$ et $-x - y^2 + 2y + 3 > 0$

**0,5 point** On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $2x + y + 1 = 0$ : cette droite passe par $M(0;-1)$ et $N(-1;1)$.

**2,5 points** On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x = -y^2 + 2y + 3$ cette parabole a la droite d'équation $y = 1$ pour axe de symétrie, elle est ouverte vers la gauche et a pour sommet $S(1;4)$. Elle coupe l'axe des abscisse en $(3;0)$ et l'axe des ordonnées en $(0;-1)$ et $(0;3)$.

**0,5 point** Le domaine de définition de $f$ est illustré ci-dessous :




**0,5 point** Le domaine est la partie non colorée, segment de droite inclus et portion de parabole exclue.

**2 point** Pour déterminer les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$, on résout l'équation :

$$\frac{-y}{2} - \frac{1}{2} = -y^2 + 2y + 3 \Longleftrightarrow 2y^2 - 5y - 7 = 0$$

équation de déterminant $\Delta = 81$ et qui possède deux solutions $y_1 = -1$ et $y_2 = \frac{7}{2}$ .

On utilise l'égalité : $x = -\frac{y}{2} - \frac{1}{2}$ pour déterminer les abscisses des points d'intersection.

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ se coupent en $M(0; -1)$ et $A\left(\frac{-9}{4}; \frac{7}{2}\right)$.