Équilibre de Nash avec stratégies pures

Théorie des Jeux, L3

22 Septembre 2016

Meilleurs Réponses

- les meilleurs réponses d'un joueur par rapport aux strategies des autres joueurs sont les stratégies qui maximisent son utilité.
- un équilibre est un profil de stratégies (une stratégie pour chaque joueur) dans laquelle chaque joueur joue une de ses meilleurs réponses aux stratégies des autres joueurs
- donc, à l'équilibre, aucun jouer ne peut augmenter son utilité/paiement en changeant sa stratégie.
  - il n'y a pas des déviations *unilatérales* profitables
- l'équilibre est une situation ou aucun joueur a l'intérêt à modifier sa stratégie.

Meilleurs Réponses

Remarque. L'équilibre est un concept strategique et non pas morale. Il decrit ce que les joueurs font et non pas ce qu'ils doivent faire.

Example

Le Dilemme du Prisonnier

D.O\T	Dénoncer	Ne Pas Dénoncer
Dénoncer	$-10, -10$	$-1, -25$
Ne Pas Dénoncer	$-25, -1$	$-3, -3$

L'équilibre de Nash

Definition

Soit $G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N} \rangle$ un jeu sous forme normale (matricielle). Le profil de strategies (actions) $\mathbf{a}^*$ (une action pour chaque joueur) est un equilibre de Nash du G si

$$U_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq U_i(a_i, a_{-i}^*) \text{ pour } (\forall)\ a_i \in A_i \text{ et } (\forall)\ i \in N.$$

- interpretation:
  - les actions d'équilibre d'un joueur sont optimales contre les actions d'équilibre des autres joueurs.
  - une *déviation unilatérale* de l'eq Nash n'est pas profitable!

L'équilibre de Nash

Example

La Bataille de Sexes:

Garcon/Fille	Cinema	Art
Cinema	$1, 2$	$0, 0$
Art	$0, 0$	$2, 1$

- les deux préfèrent faire le même choix que l'autre plutôt qu'un choix different (il y a une incitation a coordoner sur art/cinema)
- le garçon préfère aller avec la fille au Art (qu'au cinema) et la fille préfère aller au cinema avec le garçon
- strategies dominées? strategies dominantes?
- équilibre(s)? pour chaque profil d'actions rechercher une deviation profitable pour un joueur

L'équilibre de Nash

Garcon/Fille	Cinema	Art
Cinema	$1,2$	$0,0$
Art	$0,0$	$2,1$

- Profil (C, C) :

$$\begin{aligned} U_1(C, C) &= 1 \geq 0 = U_1(\mathbf{A}, C) \\ U_2(C, C) &= 2 \geq 0 = U_2(C, \mathbf{A}) \end{aligned}$$

- Garçon: pas de déviation profitable à A, Fille pas de déviation profitable à A
- Donc, (Cinema,Cinema) est un équilibre de Nash avec stratégies pures du jeu G

L'équilibre de Nash

Garcon/Fille	Cinema	Art
Cinema	$1, 2$	$0, 0$
Art	$0, 0$	$2, 1$

- Profil (A, A) :

$$\begin{aligned} U_1(A, A) &= 2 \geq 0 = U_1(\mathbf{C}, A) \\ U_2(A, A) &= 1 \geq 0 = U_2(A, \mathbf{C}) \end{aligned}$$

- pas des déviations profitables pour G et F, alors (A, A) est aussi un eq. de Nash du jeu G

L'équilibre de Nash

Garcon/Fille	Cinema	Art
Cinema	$1, 2$	$0, 0$
Art	$0, 0$	$2, 1$

- Profil (C, A) :

$$\begin{aligned} U_1(C, A) &= 0 \leq 2 = U_1(\mathbf{A}, A) \\ U_2(C, A) &= 0 \leq 2 = U_2(C, \mathbf{C}) \end{aligned}$$

- G va dévier à A(rt) et F va dévier à C(inema)
- donc, (C, A) est pas un équilibre de Nash

Note: trouver une deviation profitable est suffisant pour invalider un profil candidat au équilibre de Nash!

Meilleurs Réponses

Definition

$a_i \in A_i$ est une meilleure réponse au $a_{-i} \in A_{-i}$ si

$$U_i(a_i, a_{-i}) \geq U_i(a_i^{'}, a_{-i}) \text{ pour } (\forall)\ a_i^{'} \in A_i\ .$$

- on peut avoir plusieurs meilleurs réponses au stratégie de l'adversaire (le meilleure réponse n'est pas unique) et on va définir:

$$B_i(a_{-i}) := \{a_i \in A_i :\ a_i \text{ est une meilleure réponse au } a_{-i}\}$$

Definition

(Équilibre de Nash). Un profil $\mathbf{a}^*$ appartient à l'ensemble $NE(G)$ des équilibres Nash du jeu G , $\mathbf{a}^* \in NE(G) \Longleftrightarrow a_i^* \in B_i(a_{-i}^*)$ pour $(\forall)\ i \in N$.

Example: La poule mouillée

- jeu de automobile popularisé par cinema
- deux adolescents démarrent des deux extremités opposées d'une route et foncent droit l'un vers l'autre
- le premier qui fait un ecart perd la face (l'autre crie "chicken")
- si aucun ne fait une écart c'est la collision
- matrice du jeu:

I/II	Faire Ecart (F.E)	Droit Devant (D.D)
Faire Ecart (F.E)	$0, 0$	$-1, 1$
Droit Devant (D.D)	$1, -1$	$-2, -2$

- les jouers préfèrent faire des choses differentes que faire la même chose: Anti-Coordination vs. Coordination (la Bataille de Sexes)

Example: La poule mouillée

- calculer les meilleures réponses
- meilleur réponse du joueur I:

$$B_1(a_2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{(D.D) si } a_2 = \text{(F.E)} \\ \text{(F.E) si } a_2 = \text{(D.D)} \end{array} \right\}$$

- meilleur réponse du joueur II:

$$B_2(a_1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{(D.D) si } a_1 = \text{(F.E)} \\ \text{(F.E) si } a_1 = \text{(D.D)} \end{array} \right\}$$

- quelle est la *meilleure réponse* du joueur 1 *à la meilleure réponse* du joueur 2?

$$B_1(B_2(a_1)) = ?$$

Example: La poule mouillée

- quelle est la meilleure réponse du joueur 1 à la meilleure réponse du joueur 2?

$$B_1(B_2(a_1)) = \left\{ \begin{array}{l} \text{si } a_1 = \text{(F.E): } B_1(B_2(\text{F.E})) = B_1((\text{D.D})) = \text{(F.E)} = a_1 \\ \text{si } a_1 = \text{(D.D): } B_1(B_2(\text{D.D})) = B_1((\text{F.E})) = \text{(D.D)} = a_1 \end{array} \right\}$$

- donc, $B_1(B_2(a_1)) = a_1$
- similaire, $B_2(B_1(a_2)) = a_2$
- stratégies (actions) pures sont meilleures réponses les unes aux autres
- 2 équilibres de Nash avec stratégies pures: ((D.D),(F.E)) et ((F.E),(D.D))

Example: La poule mouillée

- joueur I préfère l'equilibre ((D.D),(F.E)) et joueur II l'eq. ((F.E),(D.D))
- chaque joueur sait que s'il peut contraindre lui même à foncer droit devant, l'autre fera un ecart (il serait stupide de faire une collision!)
- comment un joueur peut-il s'assurer que l'equilibre qu'il préfère se realisera?
    - un stratégie possible: contraindre, d'une manière crédible, à ne pas changer son comportament
    - supposons que joueur ligne (I) bloque ostensiblement le volant de sa voiture avant de demarrer
    - joueur colonne (II) en constantant que ligne n'a pas d'autre choix que de foncer droit devant, decidera de faire un ecart
    - si les deux joueurs bloquent leur volant le resultat sera désastreux...
    - ne pas essayer cette stratégie vous-mêmes!

La poule mouillée - Stratégie du bord de l'abîme

- (anglais) Brinkmanship Game
- poursuivre une action dangereuse dans le but de faire reculer un adversaire et atteindre le resultat le plus avantageux possible pour soi
    - politique internationale
    - negociations
    - relations industrielles (grèves)

Example 2: L'appariement des sous

- (anglais): Matching Pennies
- deux joueurs doivent placer simultanement une pièce de monnaie sur la table
  - soit coté Pile: strategie A
  - soit coté Face: strategie B
- lorsque les deux pièces sont retournées sur la même coté (toutes les deux Pile ou toutes les deux Face) le jouer 2 garde le deux pièces
- (il recupere sa pièce et gagne celle de son partenaire, ce qui lui donne un gain de 1 cent correspondant à la perte du joueur 1)
- si les deux pièces ne sont retournées du même coté (une Pile, une Face) c'est le joueur 1 qui empoche les deux pièces et gagne donc 1 cent au detriment du joueur 2

Example 2: L'appariement des sous

I/II	Pile (A)	Face (B)
Pile (A)	$-1, +1$	$1, -1$
Face (B)	$1, -1$	$-1, +1$

- joueur 1 gagne: anti-appariement (A,B) et (B,A)
- joueur 2 gagne: appariement (A,A) et (B,B)

- existe-il un équilibre de Nash avec strategies pures? Non!

L'appariement des sous: meilleures réponses

- joueur I:

$$
\begin{aligned}
I &: \quad A \Rightarrow B_2(A) = A \Rightarrow B_1(B_2(A)) = B_1(A) = B \\
I &: \quad B \Rightarrow B_2(B) = B \Rightarrow B_1(B_2(B)) = B_1(B) = A
\end{aligned}
$$

alors $A \neq B_1(B_2(A))$ et $B \neq B_1(B_2(B))$

- similaire pour Joueur II:

$$
\begin{aligned}
II &: \quad A \Rightarrow B_1(A) = B \Rightarrow B_2(B_1(A)) = B_2(B) = B \\
II &: \quad B \Rightarrow B_1(B) = A \Rightarrow B_2(B_1(B)) = B_2(A) = A
\end{aligned}
$$

Donc $A \neq B_2(B_1(A))$ et $B \neq B_2(B_1(B))$

- pas des équilibres de Nash avec strategies pures!
- strategies mixtés...