Équilibre de Nash avec stratégies mixtes

Théorie des Jeux 2016-2017

06 Octobre 2016

Stratégies mixtes

Example

La Bataille de Sexes:

	σ_2	q	$1-q$
σ_1	Garcon/Fille	Cinema	Art
p	Cinema	$2, 1$	$0, 0$
$1-p$	Art	$0, 0$	$1, 2$

- Stratégie mixte pour Garcon: $\sigma_1 = (p, 1-p), p \in [0, 1]$
- Stratégie mixte pour Fille: $\sigma_2 = (q, 1-q), q \in [0, 1]$

Paiements esperées

- $\mathbb{E}[U_1(\sigma_1, \sigma_2)] = \mathbb{E}[U_1(p, 1-p), (q, 1-q))]$

  $= pqU_1(C, C) + p(1-q)U_1(C, A) + (1-p)qU_1(A, C) + (1-p)(1-q)U_1(A, A)$
  $= 2pq + 0 + 0 + 1(1-p)(1-q)$
  $= p(3q-1) + (1-q)$

- $\mathbb{E}[U_2(\sigma_1, \sigma_2)] = \mathbb{E}[U_2(p, 1-p), (q, 1-q))]$

  $= pqU_2(C, C) + p(1-q)U_2(C, A) + (1-p)qU_2(A, C) + (1-p)(1-q)U_2(A, A)$
  $= pq + 2(1-p)(1-q)$
  $= q(3p-2) + 2(1-p)$

Stratégies mixtes

- Soit $G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N} \rangle$ un jeu sous forme normale:
  - N - l'ensemble de joueurs
  - A_i - l'ensemble de stratégies de joueur i
  - U_i - ensemble/vector de paiements au i

Definition

Une stratégie mixte pour joueur i est une distribution (mesure) de probabilité sur A_i, i.e. une fonction

$$\sigma_i : A_i \to [0,1], \sum_{a_i \in A_i} \sigma_i(a_i) = 1.$$

- note: une stratégie "pure" a_i pour joueur i est une mesure de probabilité dégénéré: $\sigma_i(a_i) = 1, \sigma_i(a_j) = 0, (\forall)\ a_j \neq a_i$.

Stratégies mixtes

Definition

$\Delta(A_i)$ est l'ensemble de stratégies mixtes pour joueur i :

$$\Delta(A_i) = \{\sigma_{ij}, \sum_j \sigma_{ij} = 1\}$$

Definition

La extension mixte de jeu G est $\Gamma(G) = \langle N, (\Delta(A_i))_{i \in N}, (U_i)_{i \in N} \rangle$ ou, pour tous les joueurs $i \in N$, le profil de stratégies mixtes

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \in \Delta(A_1) \times \Delta(A_2) \times ... \times \Delta(A_n)$$

et la paiements esperées sont $U_i(\sigma) = U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$:

$$U_i(\sigma) = \mathbb{E}[u_i \mid \sigma] = \sum_{a \in A} \sigma_1(a_1)\sigma_2(a_2)...\sigma_n(a_n)u_i(a)$$

Meilleurs Réponses

- $B_1((q, 1-q))$:= meilleur réponse du joueur 1 au stratégie mixte $\sigma_2 = (q, 1-q)$ du joueur 2

- étant donné $\sigma_2 = (q, 1-q)$, J1 maximise:

$$\max_p U_1(p, 1-p), (q, 1-q)) = \max_p [p(3q-1) + (1-q)]$$

- meilleur réponse $B_1(\sigma_2)$:

$$B_1((q, 1-q)) = \left\{ \begin{array}{c} p = 0 \text{ if } q < \frac{1}{3} \\ (\forall) p \in [0, 1] \text{ if } q = \frac{1}{3} \\ p = 1 \text{ if } q > \frac{1}{3} \end{array} \right\}$$

- démonstration au CM

Meilleurs Réponses

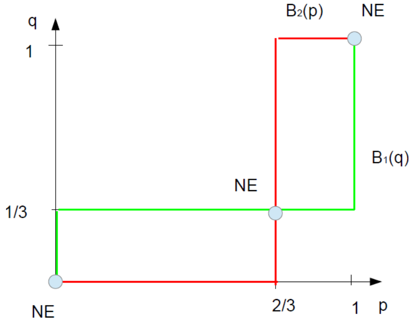
- $B_2((p, 1-p))$:= meilleur réponse du joueur 2 au stratégie mixte $\sigma_1 = (p, 1-p)$ du joueur 1
- étant donné $\sigma_1 = (p, 1-p)$, J2 maximise:

$$\max_q U_2(p, 1-p), (q, 1-q)) = \max_q [q(3p-2) + 2(1-p)]$$

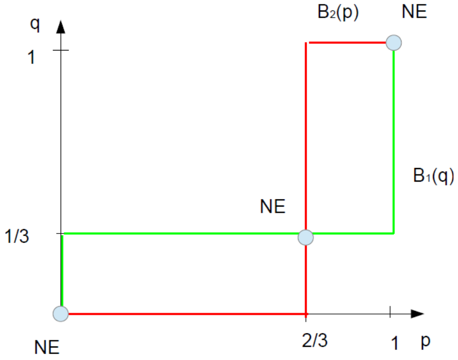
- meilleur réponse $B_2(\sigma_1)$:

$$B_2((p, 1-p)) = \left\{ \begin{array}{c} q = 0, \text{ if } p < \frac{2}{3} \\ (\forall) q \in [0, 1] \text{ if } p = \frac{2}{3} \\ q = 1, \text{ if } p > \frac{2}{3} \end{array} \right\}$$

- la même idée que au équilibre de Nash avec stratégies pures:
  - chercher *les intersections des fonctions des meilleurs réponses* $B_1(q) \cap B_2(p)$



L'équilibre de Nash



- Equilibres de Nash:
  1. $(p = 0, q = 0)$: équilibre pure (A,A)
  2. $(p = 1, q = 1)$: équilibre pure (C,C)
  3. $(p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3})$: équilibre mixte ou J1 randomise $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ et J2 randomise $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

Equilibre de Nash avec stratégies mixtes

Definition

(Equilibre de Nash avec stratégies mixtes). Le profil $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_n^*) \in NE(\Gamma(G)) \Leftrightarrow$ pour $(\forall)$ $i \in N$, $U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$ pour $(\forall)$ $\sigma_i \in \Delta(A_i)$

Definition

Soit un jeu G avex extension mixte $\Gamma(G)$. Pour $\sigma_{-i} \in \Delta(A_{-i})$ nous definissons :

$$B_i(\sigma_{-i}) := \{\sigma_i \in \Delta(A_i) : U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq U_i(\sigma_i', \sigma_{-i}), \text{ pour } (\forall)\ \sigma_i' \in \Delta(A_i)\}$$

Alors, un profil mixte σ^* appartient à l'ensemble $NE(\Gamma(G))$ des equilibres Nash du jeu G, $\sigma^* \in NE(\Gamma(G)) \Leftrightarrow \sigma^* \in B(\sigma^*)$.

Courbes de réaction avec stratégies mixtes

- Pile ou Face

	σ_2	q	$1-q$
σ_1	I/II	Pile (A)	Face (B)
p	Pile (A)	$-1, +1$	$1, -1$
$1-p$	Face (B)	$1, -1$	$-1, +1$

- stratégie mixte J1: $\sigma_1 = (p, 1-p)$
- strategie mixte J2: $\sigma_2 = (q, 1-q)$
- calculer les courbes des meilleurs réponses...

Courbes de réaction avec stratégies mixtes

- Si J2 choisit une stratégie mixte $\sigma_2 = (q, 1-q)$ le meilleur réponse du J1 est:
  - stratégie pure $Pile = (1, 0)$ si
  $$\mathbb{E}[U_1(Pile, (q, 1-q))] > \mathbb{E}[U_1(Face, (q, 1-q))]$$
  - stratégie pure $Face = (0, 1)$ si
  $$\mathbb{E}[U_1(Face, (q, 1-q))] > \mathbb{E}[U_1(Pile, (q, 1-q))]$$
  - *toute* stratégie mixte $(p, 1-p)$ si
  $$\mathbb{E}[U_1(Pile, (q, 1-q))] = \mathbb{E}[U_1(Face, (q, 1-q))]$$

Courbes de réaction avec stratégies mixtes

- Donc, J1 *correspondance* de meilleur réponse, $B_1(q) : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ est donné par:

$$B_1(q) = \left\{ \begin{array}{c} p = 1 \text{ if } q < \frac{1}{2} \\ (\forall) p \in [0,1] \text{ if } q = \frac{1}{2} \\ p = 0 \text{ if } q > \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

- Similaire, J2 correspondance de meilleur réponse, $B_2(p) : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ est donné par:

$$B_2(p) = \left\{ \begin{array}{c} q = 0 \text{ if } p < \frac{1}{2} \\ (\forall) q \in [0,1] \text{ if } p = \frac{1}{2} \\ q = 1 \text{ if } p > \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

- Equilibres de Nash: les courbes de réaction se croisent $\Longrightarrow$ equilibre unique $(p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2})$

Trouver un équilibre mixte sans construire les courbes de MRs?

- Oui, utiliser l'idée d'*indifference* entre les actions pures
- J1 cherche la strategie mixte $(p, 1-p)$ qui rend le joueur 2 *indifferent* entre ses actions pures
- J2 cherche la strategie mixte $(q, 1-q)$ qui rend le joueur 1 *indifferent* entre ses actions pures
- example: Poule Mouillée

I/II	Faire Ecart (F.E)	Droit Devant (D.D)
Faire Ecart (F.E)	$1, 1$	$0, 2$
Droit Devant (D.D)	$2, 0$	$-1, -1$

Trouver un équilibre mixte

- J1 choisit p:

$$\mathbb{E}[U_2(F.E, (p, 1-p))] = \mathbb{E}[U_2(D.D., (p, 1-p))]$$

- or, $p = \frac{1}{2}$
- J2 choisit q :

$$\mathbb{E}[U_1(F.E, (q, 1-q))] = \mathbb{E}[U_1(D.D., (q, 1-q))]$$

- or, $q = \frac{1}{2}$
- Unique équilibre mixte: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$