Equilibre de Nash Parfait en Sous-Jeu

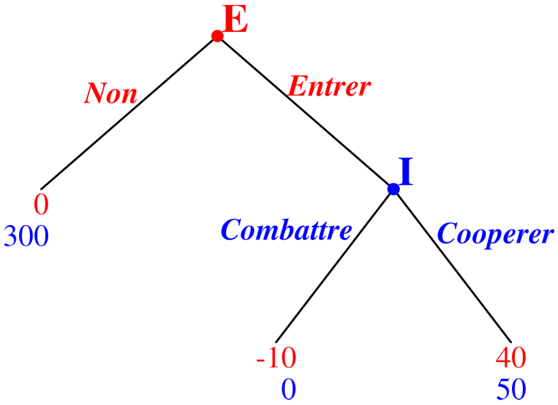
Théorie des Jeux 2016-2017

10 Novembre 2016

Example: Jeu d'entrée

- la problem de l'entrant potentiel d'une nouvelle firme sur un marché d'un monopole
- 2 joueurs: Entrant (E) et Firme Instalée (I)
- l'Entrant doit choisir entre: Entrer ou Ne Pas Entrer
- I peut choisir entre: Combattre (cassant les prix) et Cooperer (créer un monopole joint)
- Arbre du jeu?

Example: Jeu d'entrée



Jeu d'entrée: Forme Normale

E/I	Coopérer	Combattre
Entrer	$40, 50$	$-10, 0$
Non	$0, 300$	$0, 300$

- Equilibres Nash: (Entrer, Coopérer) et (Non, Combattre)
- l'équilibre (Non, Combattre) est basé sur la *menace* que l'entrée sera combattue si elle a lieu: $-10 < 0$
- *Combattre:* une menace *credible* ou pas?
  - est-ce que la firme installée (I) aurait choisi cette action de Combattre si elle devrait *effectivement faire face à l'entrée*?
  - $U_I(Entrer, Combattre) = 0 < U_I(Entrer, Cooper) = 50$

Jeu d'entrée: Menace non-credible

- donc, si l'entrée a lieu joueur I n'a aucun intérêt à combattre et sa menace ne serait pas executée
- il s'agit d'une *menace non-credible* et l'équilibre (Non, Combattre) est soutenu par cette menace non-credible
- faiblesse du concept d'équilibre de Nash: *plan d'actions vs. jeu effectif*
    - concept d'éq. de Nash est établi au niveau *des plans d'actions* defini sur le deroulement du jeu
    - pas de problem avec jeux simultanés!
    - mais, avec *séquentialité de decisions*, un jouer ne s'en tiendra à son plan d'action que *si et seulement si*, ce la *est optimal pour lui quand c'est son tour de jouer*.

Equilibre de Nash Parfait en Sous-Jeu

- generaliser cette approche: exige *l'optimalité des choix chaque fois qu'un joueur doit jouer*
    - optimalité des chois dans chaque *sous-jeu*
- équilibre de Nash *parfait en sous-jeu (ENPSJ)*: les équilibres qui satisfont cette condition d'optimalite dans chaque sous-jeu
- aussi une méthode d'*affiner* les équilibres de Nash: écarter le(s) équilibre(s) de Nash basé(s) sur des menaces non-credible

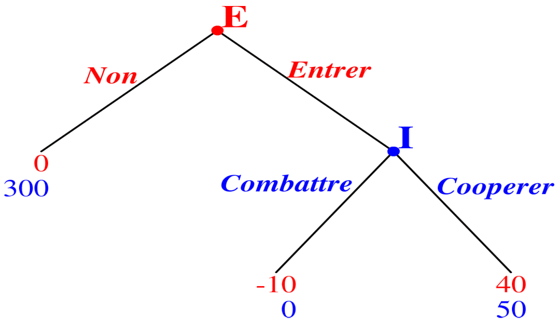
Concept de Sous-Jeu

Definition. Un *sous-jeu* d'un jeu en forme extensive J est constitue par*:*

1. un ensemble K de noeuds, comprenant un noeud de J et les noeuds consecutifs a celui ci, avec la proprieté suivante: si un noeud k de K appartient à un ensemble d'information h *non-singleton*, alors tous les noeuds de h appartient à sous-jeu $K(h \subset K)$.
2. l'ensemble des arcs/branches reliant les differentes noeuds de K
3. les gains/paiements terminaux de J correspondant aux noeuds terminaux de K

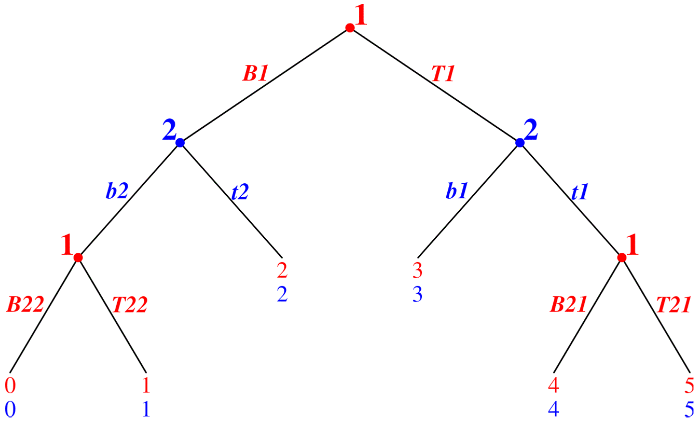
Definition. Quand un sous-jeu est different du jeu original, on l'appele un sous-jeu *propre*.

Example 1: Jeu d'entrée



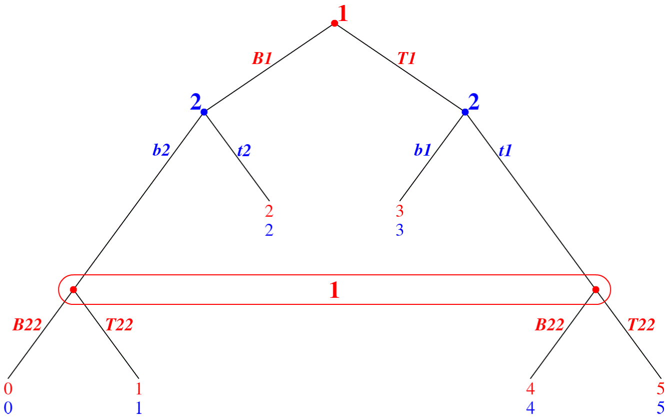
- Combien des sous-jeux?
  1. le jeu original
  2. un sous-jeux propre qui commence au noeud I

Example 2



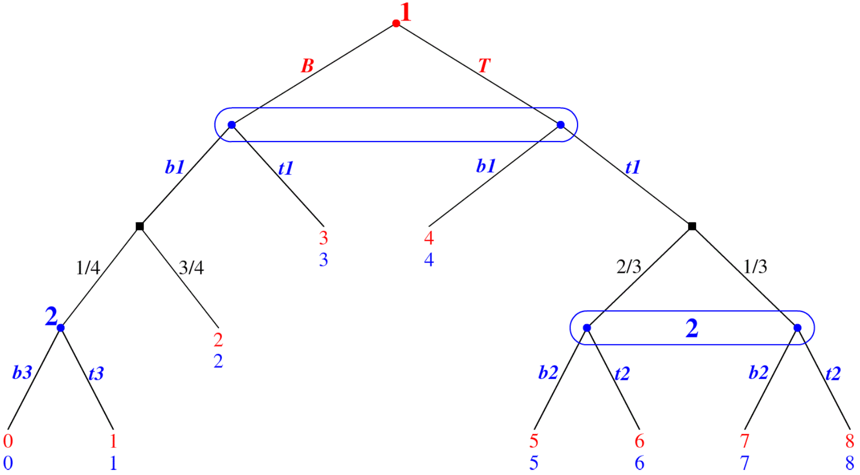
- Question: # Sous-Jeux?

Example 3



- Question: # Sous-Jeux?

Example 4



- Question: # Sous-Jeux?

Equilibre de Nash Parfait en Sous-Jeu

- utilise le concept de sous-jeu propre pour affiner le concept de équilibre de Nash, de maniere à eliminer les menaces non-credible.

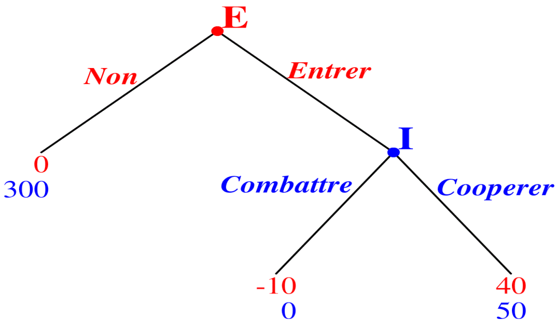
Definition

[Selten (1975)]. Un profil de stratégies du jeu J est un équilibre (de Nash) parfait en sous-jeu (ENPSJ) s'il correspond à un équilibre de Nash dans *chaque sous-jeu* du J.

Trouver ENPSJ: Induction à rebours

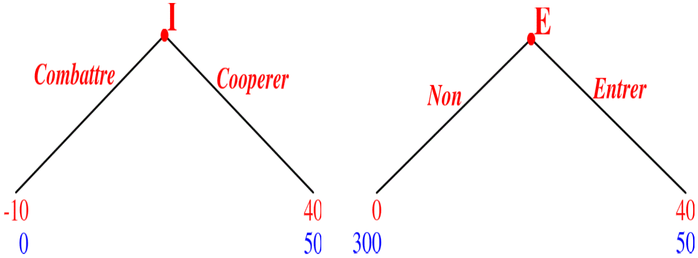
- on commence par chercher les équilibres de Nash des sous-jeux les plus proche des noeuds terminaux et on remplace ces sous-jeux par les resultats/paiements d'équilibre correspondants
- on remonte vers les sous-jeux qui contiennent ces sous-jeux terminaux et on les remplace par les paiements d'équilibre
- on répète cette procédure jusqu'à ce que on atteint l'équilibre de Nash du jeu initial
- ENPSJ: l'équilibre qui survit cette procedure de induction à rebours (retroduction)

Example 1: Jeu d'entrée



- ENPSJ?

Induction a rebours: Jeu d'entrée

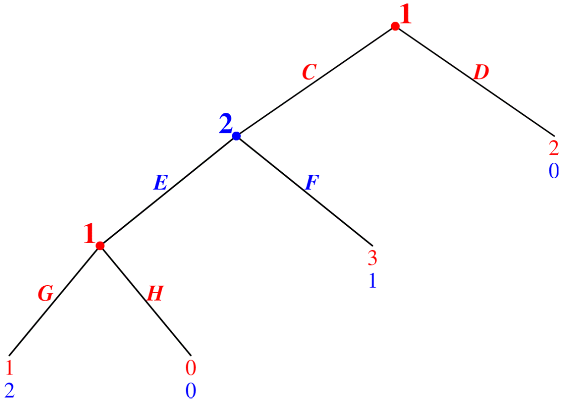


(a) sous-jeu propre: MR_I: $\{Cooperer\}$

(b) sous-jeu: MR_E: $\{Entrer\}$

- *ENPSJ* unique : $(Entrer, Cooperer)$
- comment: $(Non, Combattre)$ n'est pas un *ENPSJ* car il n'a pas induit un équilibre de Nash dans sous-jeu (a)

Induction a rebours: Example



- Déterminer le(s) équilibre(s) de Nash
- Déterminer ENPSJ

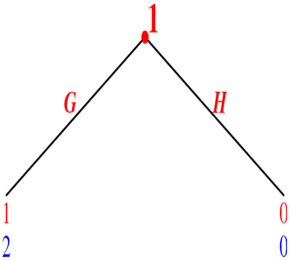
Induction a rebours: example

- forme normale:

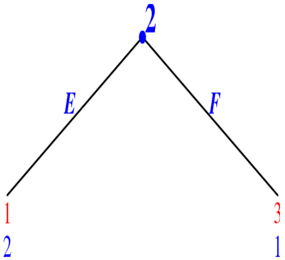
$1/2$	E	F
CG	$1,2$	$3,1$
CH	$0,0$	$3,1$
DG	$2,0$	$2,0$
DH	$2,0$	$2,0$

- éq. Nash: $\{(CH, F); (DG, E); (DH, E)\}$

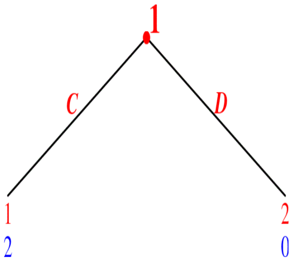
Induction a rebours: example



sous-jeu 1: MR_1: $\{G\}$



sous-jeu 2: MR_2: $\{E\}$



sous-jeu 3: MR_1: $\{D\}$

- ENPSJ: (DG, E)