3 Régression Linéaire Simple II

Exercice 1
Montrez que sous les hypothèses classiques, les estimateurs des moindres carrés de la pente et de la constante d'un modèle de régression simple ne sont pas biaisés.

(a) Une régression linéaire donne $\hat{\beta}_1 = 0$. Montrez que $R^2 = 0$.

(b) Une régression linéaire donne $R^2 = 0$. Est-ce que cela implique que $\hat{\beta}_1 = 0$?

Exercice 2
Supposez que $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$, avec $\{X_i, U_i\}_{i=1}^n$ i.i.d. où X_i est une variable aléatoire qui suit une distribution Bernoulli avec $P(X_i = 1) = 0,2$. Nous savons que $U_i = Z_i(2 - X_i)$ avec Z_i une variable normale standard i.i.d., indépendante de $\{X_i, U_i\}_{i=1}^n$.

(a) Vérifiez si $E(U_i|X_i) = 0$ et $Var(U_i|X_i) = \sigma^2$ (une constante).

(b) Obtenez une expression de la variance de $\hat{\beta}_1$ pour grands échantillons.

(c) Montrez que le R^2 de la régression de Y sur X est la carré de la corrélation estimée entre X et Y:

(d) Montrez que le R^2 de la régression de Y sur X est le même que le R^2 de X sur Y.

(e) Montrez que $\hat{\beta}_1 = r_{xy}\frac{s_y}{s_x}$, où r_{xy} est la corrélation estimée entre X et Y, et s_y et s_x sont les écarts-types estimés de Y et X, respectivement.

Exercice 3
Montrez que la droite de régression estimée passe par le point $(\bar{X}, \bar{Y})$.

Exercice 4
Considérez le modèle de régression $Y_i = \beta X_i + U_i$, où U_i et X_i satisfont les hypothèses classiques. Soit $\bar{\beta} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$ un estimateur de β, avec $\bar{Y}$ et $\bar{X}$ les moyennes estimées de Y et X.

(a) Montrez que $\bar{\beta}$ est un estimateur linéaire (une combinaison linéaire des $\{Y_i\}_{i=1}^n$)

(b) Montrez que $\bar{\beta}$ est sans biais.

Exercice 5
Soit X_i une variable binaire. On considère la régression $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$. Soient $\bar{Y}_0$ et $\bar{Y}_1$, les moyennes de Y dans l'échantillon pour les observations avec $X_i = 0$ et $X_i = 1$, respectivement. Montrez que $\hat{\beta}_0 = \bar{Y}_0$ et $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 = \bar{Y}_1$, et que donc $\hat{\beta}_1 = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$.

Exercice 6
Considérez Y, les salaires et X, les années d'études d'une certaine population. Nous avons deux échantillons indépendants constitués à partir de la sous-population d'hommes, $\{Y_{hi}, X_{hi}\}_{i=1}^n$ et de femmes $\{Y_{fi}, X_{fi}\}_{i=1}^n$. Le modèle de régression pour les hommes est $Y_{hi} = \beta_{h0} + \beta_{h1}X_{hi} + U_{hi}$, et celui des femmes, $Y_{fi} = \beta_{f0} + \beta_{f1}X_{fi} + U_{fi}$. Soient $\hat{\beta}_{h1}$ et $\hat{\beta}_{f1}$ les estimateurs MCO de β_{h1} y β_{f1} obtenus avec les échantillons d'homes et de femmes, et $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{h1}}$ et $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{f1}}$ leurs écarts-types respectifs. Montrez que l'écart-type de $\beta_{h1} - \beta_{f1}$ est égal à $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{h1} - \hat{\beta}_{f1}} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_{h1}} + \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_{f1}}}$.