Plan :

Introduction Générale

I. Présentation générale

A) Définition de la théorie des jeux.

Définition : Elle propose une description formelle de situations conflictuelles entre agents.

- Un ensemble de joueurs

→ Quels sont les agents-les joueurs impliqués dans le jeu

- Un ensemble de règles du jeu

→ Procédure à suivre et les possibilités d'actions offertes aux joueurs

- L'information dont disposent les joueurs

→ Nombre de joueurs, règles, références et autres informations

- Un ensemble d'issues

→ Chaque issue est la conséquence des actions prises par les joueurs.

→ Pour chaque ensemble possible d'actions des joueurs et de la nature, quel est le résultat du jeu ?

- Un ensemble de gains

→ Les issues déterminent des gains distribués aux joueurs

Remarque : Les joueurs ont des préférences sur les différentes actions et leurs issues.

B) Deux branches de la théorie des jeux.

1) Les jeux non coopératifs.

- Le pouvoir de décision est complétement transféré aux joueurs.
- L'étude est centrée sur les comportements décentralisés des joueurs et sur les mécanismes stratégiques et informationnels qui facilitent la coopération.
- La règle du jeu spécifie quand un joueur à la main, ce qu'il sait sur l'histoire du jeu à un moment précis et les actions mises à sa disposition.
- La combinaison des actions prises par les joueurs détermine une unique issue du jeu.
- Pour chaque issue possible, les noueurs perçoivent individuellement un gain.

Une solution pour une classe de jeux non coopératifs est une prédiction sur les choix stratégiques des joueurs dans chacun des jeux de cette classe.

2) Les jeux coopératifs.

- Le pouvoir de décision est transféré à la collectivité
- Les joueurs sont supposés coopérer malgré les conflits d'intérêt : La signature d'un contrat de coopération les engage définitivement.
- L'analyse est nettement orientée vers les accords de coopération que les joueurs peuvent signer et la manière dont la collectivité arbitre les conflits d'intérêt en redistribuant les gains issus de la coopération.
- La règle du jeu spécifie les types de joueurs- les coalitions qui ont la possibilité de signer des accords
- Une issue est le produit d'un accord de coopération entre les membres d'une coalition
- Enfin, les gains sont déterminés pour chaque coalition en fonction des issues associées à cette coalition

Une solution pour une classe de jeux coopératifs est une manière d'allouer les gains aux joueurs.

Remarque :

Dans les jeux non coopératifs il peut y avoir formation de coalition (lors d'une étape de communication) ; ces accords sont uniquement des accords de principe.

Une même situation conflictuelle peut être traitée soit sous l'angle des jeux coopératifs ou bien sous l'angle des jeux non coopératifs.

II. Premiers exemples.

A. Exemple 1.

1. Les joueurs : $N = \{1; 2\} = Deux\ enfants$
2. La règle du jeu : Les joueurs doivent se partager le gâteau.

Le premier enfant découpe le gâteau en deux parts puis laisse le deuxième enfant choisir son morceau

3. Actions possibles.

Deux actions possibles pour le joueur 1 :

Découper le gâteau en part égale.

Découper le gâteau en parts inégales.

Deux actions possibles pour le joueur 2 :

Choisir la plus grosse part.

Choisir la plus petite part.

Les préférences : Chaque enfant veut la plus grosse part possibles.

Hypothèse de base : Rationalité.

Les issues : Taille de la part de chaque agent

Rationalité : *Un joueur est dit rationnel si son objectif dans le jeu consiste à maximiser son gain et il n'y a que cela qui l'intéresse. La rationalité individuelle est un principe qui guide le choix d'une solution dans les « Jeux non coopératifs ».*

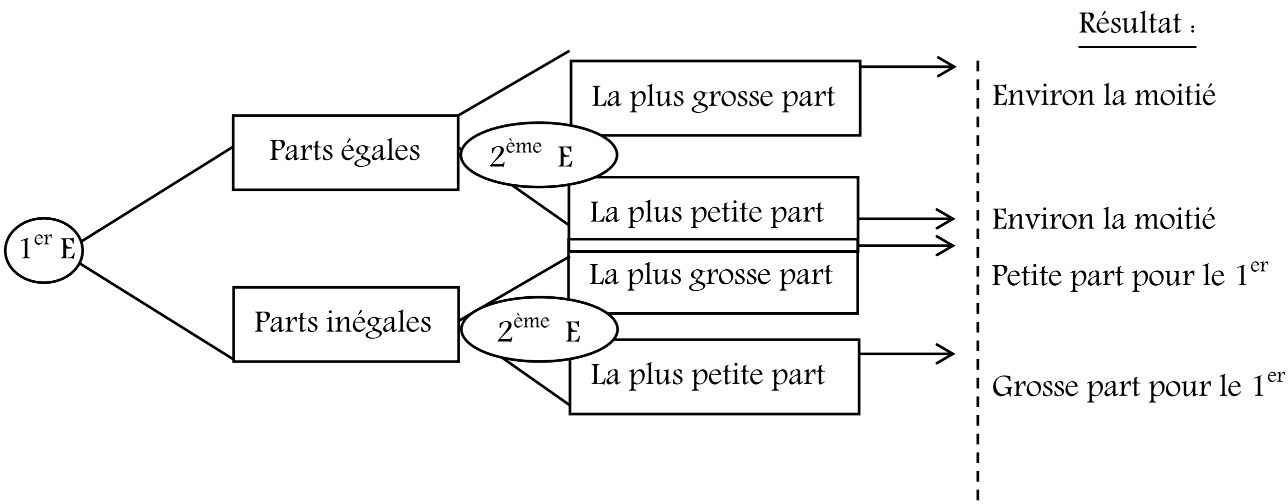
Question : Quelle est la meilleure stratégie pour le 1er enfant ?

Essayer de partager le gâteau de manière égale.

Solution équitable, mais ne doit rien à la générosité ou l'altruisme. Chacun poursuit rationnellement son intérêt personnel.

Une solution est une prédiction sur le comportement des joueurs.

Schéma : Jeux sous forme extensive (=arbre).



2ème forme : Jeux sous forme normale ou stratégique.

A. Stratégie pour le joueur 1 :

1) Découper le gâteau en parts égales (E).
2) Découper le gâteau en parts inégales (I).

B. Stratégie pour le joueur 2 :

1) Toujours prendre la plus grosse part (G).
2) Toujours prendre la plus petite part (P).
3) Prendre la plus grosse part seulement si les parts sont découpées de façon inégale (P/E, G/I).
4) Prendre la plus grosse part seulement si les parts sont égales (G/E, P/I).

		Enfant 2			
Enfant 1		G	P	(P/E, E/I)	(G/E, P/I)
	E	≈ Moitié	≈ Moitié	≈ Moitié	≈ Moitié
	I	Grosse part	Petite part	Petite part	Grosse part

B) Exemple 2 : Bataille des sexes.

1) Jules et Roses sont amis et décident de se rencontrer au cinéma.
2) Ils n'ont pas convenu de l'heure et ne peuvent pas communiquer.
3) Jules désire voir un film d'action et Rose un film d'art.
4) Lorsque chacun a fait son choix les utilités sont $(2; 1)$ si chacun retient le film d'action, de $(1; 2)$ si chacun retient le film d'art et sinon $(0; 0)$.

		Rose	
		Action	Art
Jule	Action	$2; 1$	$0; 0$
	Art	$0; 0$	$1; 2$

Prise de décision simultanée, il s'agit donc d'un jeu simultané.

Jeu sous forme normale.

C) Exemple 3 : Dilemme du prisonnier.

1) Deux personnes qui ont commis un délit ensemble et sont interrogées dans deux pièces séparées.

2) Chaque prisonnier à le choix entre deux stratégie :

-Soit il avoue et implique l'autre.

-Soit il nie avoir participé au délit.

3) Si un seul avoue, il est libéré et l'autre est inculpé (6 mois).

4) Si les deux nient, ils passent tous les deux, 1 mois en prison.

5) Si les deux avouent, tous les deux passeront 3 mois en prison.

Prisonnier 1 \ Prisonnier 2	Avouer	Nier
Avouer	$-3;\ -3$	$0;\ -6$
Nier	$-6; 0$	$-1;\ -1$

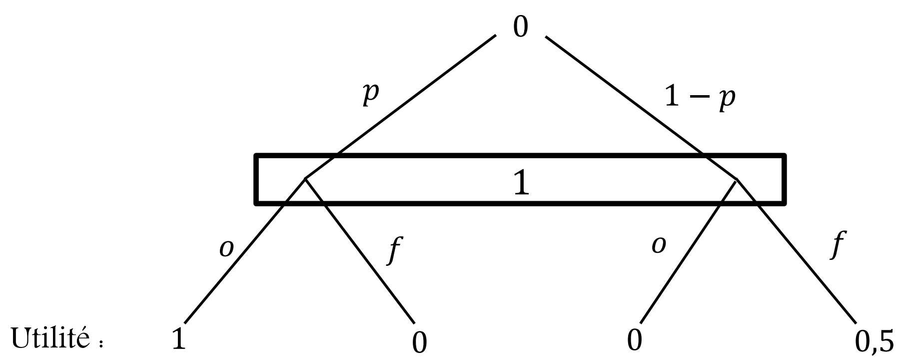
D) Exemple 4 : Hasard ou Nature.

*) Lorsque les actions dans un jeu sont impulsée par le hasard et non à l'initiative d'un jouer, on dit qu'il y a une intervention de la nature.

→ Distribution de probabilité sur les actions concernées.

1) Lors d'une exposition, l'organisateur doit tenir compte de la pluie lorsqu'il se décide à ouvrir ses portes (stratégie o) ou les fermer (stratégie f).

2) La pluie dépendant de la nature notée o, elle peut ne pas tomber avec une probabilité p ou tomber avec une probabilité de $1-p$.



Jeux simultanée car on décide que l'organisateur ouvre ses portes la veille.

Quand il prend sa décision il ne sait pas ce qu'a décidé dame nature.

→ Un jeu est dit à information parfaite si chaque joueur sait à quel nœud il se trouve à chaque fois qu'il doit jouer.

Chapitre 1 : Principes et concepts de base.

I. Jeux sous forme extensive.

A) Définition générale :

La forme extensive est une représentation d'un jeu non coopératif.

Elle précise :
-Le déroulement du jeu.
-Les circonstances dans lesquelles les joueurs sont appelés à jouer.
-L'information factuelle ainsi que les actions dont les joueurs disposent lorsque c'est à leur tour de jouer.
-Les issues qui découlent des actions prises par les joueurs.
-Les gains distribués sur chaque issue.
-Un ensemble fini de joueurs : $N = \{1,2, \dots, n\}$
-Le déroulement du jeu peut être décrit de façon séquentielle par un « arbre ».
-L'arbre du jeu :
Indique les positions de décision ou nœud (x) d'un joueur.
Précise le joueur qui en chaque nœud et les actions qui y sont disponibles.

1) Ensemble des nœuds de l'arbre $= X$
2) $L =$ Relation d'ordre partiel transitive et asymétrique :
$x < x'$ si et seulement si x précèdex'.
3) Chaque action est indiquée par une branche issue d'un nœud vers un autre.
4) L'ensemble des actions disponibles pour un joueur i est notéeA_i.
5) A chaque nœud de décision un joueur peut avoir la possibilité de choisir toutes ses actions disponibles ou pas (certaines sont imposées par le jeu).

1. L'arbre du jeu commence par un nœud initial (c'est un le seul nœud n'ayant pas de prédécesseurs) de sorte que chaque nœud est relié au nœud initial par un unique chemin.
2. Tous les autres nœuds ont un seul prédécesseur immédiat.
3. Nœuds de décision D : Nœuds non terminaux associés à un seul joueur (ni le 1er ni le dernier).
4. Nœuds terminaux T : Les paiements (ou les utilités) des différents joueurs sont connus : U_i avec $i \in N$.
5. Pour chaque intervention d'un joueur, l'information dont il dispose est précisée : H_i avec $i \in N$.
Partitions des nœuds de décision en ensemble d'information.
$R_i \in H_i$ Est un ensemble d'information.

Exemple 1 :

.Les joueurs : $N = \{1, 2\}$

.La règle :

.Les joueurs doivent se partager en 2.

-Le joueur 1 fait une offre au joueur 2 : 0, 1 ou 2 €.

-Le joueur 2 observe parfaitement l'offre du joueur 1 et peut soit accepter cette offre, action notée A. Soit la refuser, action notée R : $A_Z = \{A, R\}$

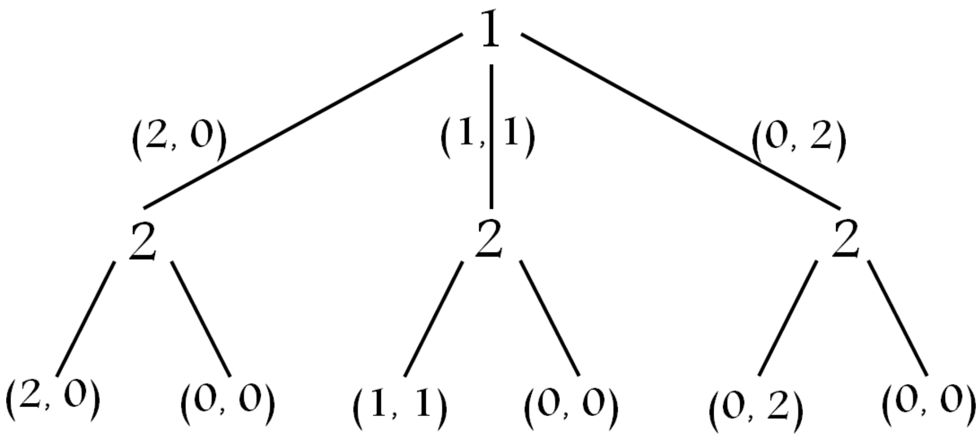
$A_1 = \{0, 1, 2\}$

.Les issues :

-Si le joueur 2 accepte l'offre du joueur 1, alors la négociation est un succès et chacun repart avec sa part.

-Sinon, la négociation a échouée et aucun des 2 n'approprie une part du bien.

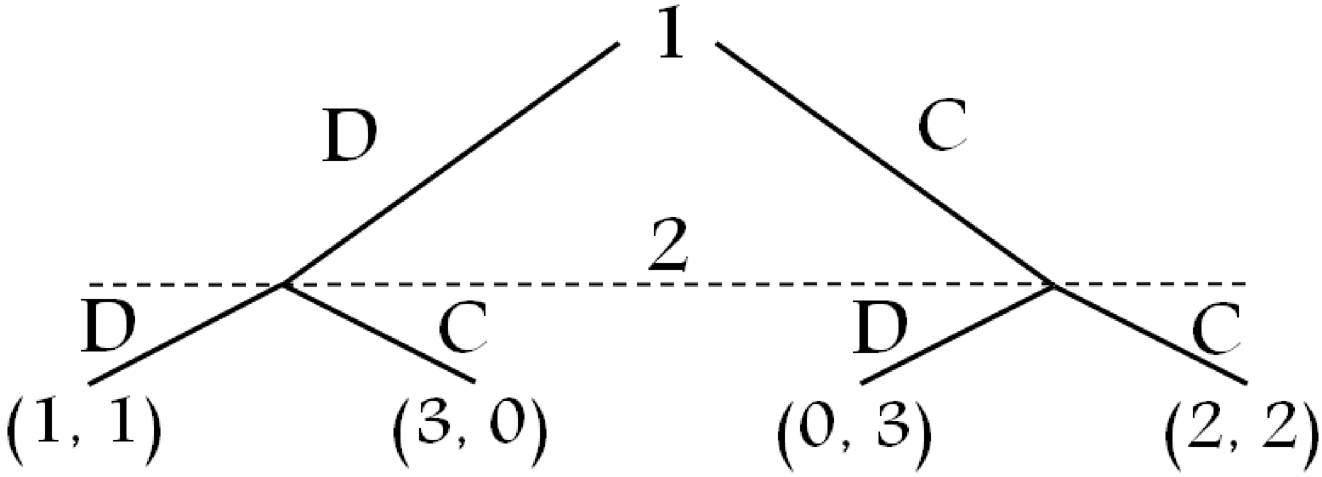
Jeux de l'ultimatum fini.



Exemple 2 : Dilemme des prisonniers.

Il s'agit d'un jeu simultané.

C : Coopération *D : Défection* *Tirets : Montre que le J2 ne sait pas où il se trouve.*



Exemple 3 :

Les joueurs : Une entreprise (joueur I) et son concurrent potentiel (joueur E).

La règle du jeu se décompose en 2 étapes :

Première étape :

Initialement le joueur I est en position de monopole sur un marché. Le joueur E est un concurrent potentiel, susceptible d'entrer sur le marché lors de la première étape. Le joueur E peut décider ou pas de rentrer sur le marché.

-S'il décide de ne pas entrer, le jeu se termine.

-S'il décide de rentrer, dans ce cas, les 2 joueurs se livrent une concurrence à la seconde étape.

Deuxième étape :

Si le jeu se poursuit à la seconde étape, le joueur I sait si E est entré ou non.

Si ce dernier est entré sur le marché, le joueur I possède deux manières de réagir :

-1ère réaction, agressive : Casser les prix.

-2ème réaction, moins agressive : S'accommoder de la présence du joueur E, en partage.

Chacune des r »actions de I clôt le jeu.

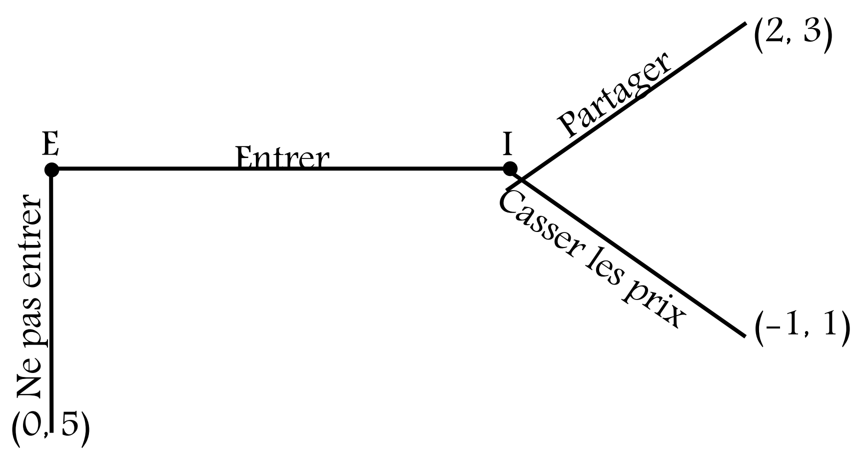
Les issues :

Si le j E décide de ne pas rentrer sur le marché, le j I conserve son pouvoir de monopole.

Si le j E entre et que le j I réagit de manière agressive alors les 2 réalisent des pertes, mais plus pour le j E.

S'ils se partagent, avec un bénéfice pour le j I déjà présent.

Jeu d'entrée sur un marché :



B) Notion d'information.

Jusqu'à présent, nous avons presque toujours fait l'hypothèse que sur chaque nœud de décisions, le joueur appelé à faire un choix observe parfaitement et garde en mémoire les coups des joueurs qui le précèdent dans l'arbre enraciné.

Dans nombre de situations conflictuelles, les joueurs ne sont pas toujours capables d'analyser précisément une circonstance et de ce fait, peuvent assimiler plusieurs circonstances pour distinctes.

A chaque nœud de décision on associe unique ensemble d'information tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

-Chaque nœud de décision d'un joueur appartient à un seul ensemble d'information. Du point de vue d'un joueur, les nœuds de décisions appartenant à un même ensemble d'informations sont équivalents.
-Les joueurs n'oublient pas ce qu'ils ont joué en amont de l'arbre.
-Un joueur peut utiliser exactement les mêmes actions sur chaque nœud de décisions d'un ensemble d'informations.

Information Parfaite≠ Imparfaite :
Si tous les ensembles d'informations du jeu sont réduits à des singletons (un et un seul nœud dans chaque ensemble) alors chaque joueur, lors de sa prise de décision :
-Connait tous les évènements passés.
-Sait ce que les autres ont joué auparavant.
-Personne ne joue simultanément.

Un jeu est dit à information parfaite si chaque joueur sait à quel nœud il se trouve lorsqu'il doit jouer.
-Jeu est à information parfaite, jeu de l'ultimatum, jeu d'échec, morpion, duopole de Stacklberg, jeu de l'entrée.
-Si non le jeu est à information imparfaite (poker, dilemme des prisonniers, pile ou face contre la nature).

Information complète/incomplète :
Si certains joueurs ne connaissent pas la structure du jeu comme :
-Les préférences des joueurs.
-Les actions disponibles.
-L'identité ou le nombre de joueurs.
-L'ordre des décisions.

→ Le jeu est dit à information incomplète.

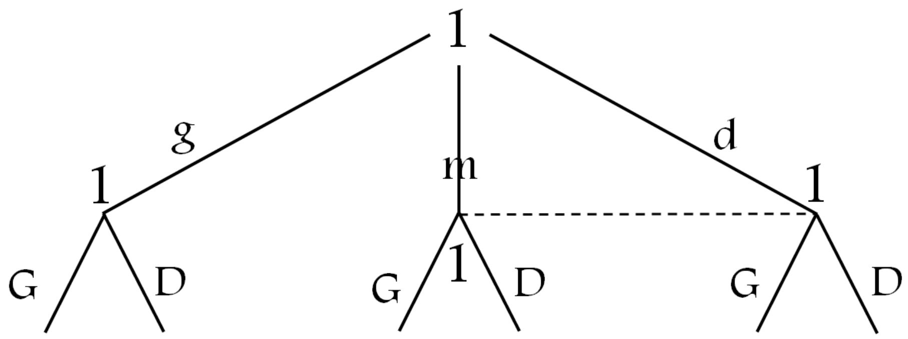
Dans les 3 premiers chapitres il n'y aura que des jeux à information complète.

Remarque :

.La nature parfaite ou imparfaite a trait aux informations factuelles.
.La nature complète ou incomplète de l'information a trait à la connaissance de la règle du jeu.
.Lorsque la structure d'information est parfaite, chaque joueur sait exactement om il est dans l'arbre et est capable de retracer l'historique des actions.
Dès qu'il existe un joueur qui possède un ensemble d'information contenant plus d'un nœud de décisions, alors la structure de l'information est imparfaite.
→ Ne sait pas distinguer au moins 2 nœuds de décisions ; il n'est donc pas capable de retracer l'enchainement des actions de la racine jusqu'à cet ensemble d'informations.

Jeux à mémoire parfaite et imparfaite :

Un jeu est à mémoire parfaite si chaque joueur se souvient de ce qu'il a joué avant (qui a été joué avant ?).



II. Stratégie dans un jeu.

A) Définition générale

Dans un jeu, une stratégie d'un joueur est un plan d'action (ou une feuille de route) qui précise le comportement de ce joueur dans toutes les positions de décisions où il est appelé à choisir une action i.e à chacun de ses ensembles d'informations (atteints ou non).
Une stratégie est un plan d'actions, décidé au début du jeu qui précise le choix de chaque joueur à chacun de ces ensembles d'information.

Une stratégie est donc constitué d'une séquences d'actions, ne par ensemble d'informations.
Une stratégie du joueur i est une fonction :

$$S_i: h_i \to A_i$$
$$h_i \to a_i \in A(h_i)$$

Qui associe à chaque ensemble d'information $h_i \in H_i$ une unique action $a_i \in A(h_i)$ où $A(h_i)$ est l'ensemble des actions disponibles à l'ensemble d'informations h_i

S_i Est l'ensemble des stratégies pures du joueur i.

Un profil de stratégie.
$s = (s_i)\ \ i \in N$, est une liste de stratégies s_i pour chaque joueur i dans le jeu. On parle de profil de stratégies ou de résultat ou d'issue. Chaque profil de stratégies induit une unique histoire (complète) de la racine de l'arbre à nœud terminal. En désignant par S l'ensemble de tous les profils (de stratégies), la fonction d'utilité d'un joueur i est une fonction qui à tout profil $s \in S$ associe $u_i(s)$ du joueur i sur$s$.

$$u_i: S \to R$$

L'utilité du joueur i dépend à la fois de sa stratégie et des stratégies des autres ; ses préférences sont définies sur S et non surS_i.

Exemple : Jeu de l'ultimatum fini.
-Information parfaite car le joueur 1 a un ensemble d'information et les joueurs 2 à 3 ont un ensemble d'information.

Le joueur 1 est affecté uniquement à la racine de l'arbre.
-Cette racine constitue son unique ensemble d'information.
.Une stratégie pour le joueur 1 consiste donc à sélectionner une action dans l'ensemble :

$$A_1 = \{(2,0); (1,1); (0,2)\}$$

.Sans risque de confusion, l'ensemble des stratégies S_1 est assimilé à l'ensemble desA_1.

Le joueur 2 observe parfaitement la stratégie$s_1 \in S_1$.
.Il possède donc autant d'ensembles d'informations qu'il existe de valeur possibles pours_1.
.En conséquence : $S_2 = \{(A,A,A); (A,A,R); (A,R,A); (A,R,R); (R,A,A); (R,A,R); (R,R,A); (R,R,R)\}$

Stratégie pure :

Les types de stratégie des joueurs vont se distinguer les uns des autres suivant le comportement attendu d'un joueur en chaque position de décision :

Il peut par exemple choisir directement une action à mener (stratégie pure).

Où décider plutôt d'une distribution de probabilité sur les actions disponibles (stratégie mixte ou comportementale).

B) Les stratégies mixtes.

Une stratégie pure : Souvent insuffisante pour décrire le comportement d'un joueur dans un jeu.

Comment écrire formellement qu'un joueur à tendance à joueur plus souvent pierre que ciseaux ?

→ Meilleure réponse de l'autre joueur plus souvent feuille.

→ Le premier joueur va jouer plus souvent ciseaux.

Il faut définir des stratégies aléatoires :

-Ruse.

-Secret.

-Bluff.

Exemple : Tir au but, poker, pierre-feuille-ciseaux, inspection des impôts, etc…

Définition : Une stratégie mixte d'un joueur i.

C'est une distribution de probabilité sur l'ensemble S_i des stratégies pures du joueur i.

On note :

$$\sum_i = \Delta(S_i) = \{ p \in R^{|S_i|} : p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1 \}$$

L'ensemble des stratégies mixte du joueur i et $\theta_i = \big(\theta_i(s_i)\big)\ s_i \in S_i$ un élément de $\sum$.

.Une stratégie mixte θ_i est dite parfaitement mixte si $\theta_i(s_i) > 0$ pour tout $s_i \in S_i$

.Une stratégie mixte θ_i est dite non dégénérée si elle n'assigne pas une probabilité de 1 à une des stratégies pures.

.Toute stratégie pure s_i est une stratégie mixte de i correspondant à une distribution de probabilités dite dégénérée en ce sens qu'elle donne une probabilité 1 à s_i et 0 à toute autre stratégie t_i de i autre que s_i.

Dans les jeux sous forme extensive on peut définir :

-Un équilibre de Nash, en stratégie pure ou en stratégie mixtes.

Idem pour les jeux sous forme normale.

III. Jeu sous forme normale.

A) Définition générale.

Forme extensive :

1. Dans un jeu sous forme extensive, une stratégie est un comportement qui spécifie l'action de ce joueur à chaque circonstance qu'il distingue.
2. Les circonstances qu'il peut distinguer sont représentées par les ensembles d'informations.
3. Une stratégie est un plan d'actions, décidés au début du jeu qui précise le choix du joueur à chacun de ses ensembles d'informations.

Forme normale :

1. La forme stratégique, déduite de la forme extensive comprend les joueurs, les stratégies de chaque joueur, et les fonctions de gain.
2. L'information sur l'ordre des décisions et les ensembles d'informations est condensée dans les stratégies des joueurs.
3. La forme stratégique condense donc tous les détails que la forme extensive explicite à travers l'arbre enraciné, la fonction d'affectation, les ensembles d'informations et les actions disponibles.

*On note un profil de stratégies :

$$s = (s_1 \dots s_n) \in S = S_1 \times \dots \times S_n$$

Ou s_i est une stratégie choisie par un joueur i.

Un jeu sous forme normale s'écrit donc :

$$(N, (S_i)\ \ i \in N, \qquad (u_i)\ \ i \in N)$$

Représentation d'un jeu fini à 2 joueurs, 2 stratégies par joueur :

	S_2	S_2'
S_1	$u_1(s_1; s_2); u_2(s_1; s_2)$	$u_1(s_1; s'_2); u_2(s_1; s'_2)$
S_1'	$u_1(s'_1; s_2); u_2(s'_1; s_2)$	$u_1(s'_1; s'_2); u_2(s'_1; s'_2)$

En règle générale : La stratégie du joueur 1 en ligne, et celle du joueur 2 en colonne.

Exemple : Dilemme du prisonnier :

$$N = \{1; 2\}$$

1) $S_1 = S_2 = \{D, C\}$

2) $S' = \{(D, D), (D, C), (C, D), (C, C)\}$

		Prisonnier 2	
		D	C
Prisonnier 1	D	$(1, 1)$	$(3, 0)$
	C	$(0, 3)$	$(2, 2)$

$$s = (prisonnier\ 1, prisonnier\ 2)$$

$s = (D, D)$ $\quad$ $s' = (C, C)$

.Sous-entendu du modèle :

-Décisions des joueurs indépendantes.

-Deux joueurs connaissent le jeu.

B) Passage de la forme extensive à la forme normale.

→ Profil de stratégie + Distribution de probabilité.

→ Distribution de probabilité selon les nœuds terminaux.

→ Utilités (espérée) associée à chaque profil de stratégies.

- Jeu sous forme normale.

Exemple : Jeu de l'ultimatum.

s_1: {0, 1, 2}

s_2: 8 stratégies : 2^3 (2 actions × 3 nœuds).

Joueur 2

Joueur 1	AAA	RAA	ARA	AAR	RRA	RAR	ARR	RRR
(2, 0)	(2, 0)	(0, 0)	(2, 0)	(2, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(2, 0)	(0, 0)
(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(0, 0)	(0, 0)
(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 0)	(0, 2)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)

(1, 1)→ Stratégie du joueur 1 = Offrir 1€

Stratégie du joueur 2 = Accepter si 0 }
Accepter si 1 } AAR
Refuser si 2 }

Résultat → Le joueur 2 accepte 1€.

Exemple : Jeu d'entrée sur le marché.

$S_E = \{e, ne\}$ *Entrer/ Ne pas entrer*

$S_I = \{p, cp\}$ *Partager/ Casser les prix*

Entreprise I

Entreprise E	Partager	Casser les prix
Entrer	$(2, 3)$	$(-1, 1)$
Ne pas entrer	$(0, 5)$	$(0, 5)$

C) Jeux à somme nulle.

Définition : Un jeu sous forme normale à 2 joueurs est appelé un jeu à somme nulle ou un jeu strictement compétitif si les joueurs ont des préférences diamétralement opposées :

$$\rightarrow u_1 = u$$
$$\rightarrow u_2 = -u$$

Remarque : Tout résultat est évidemment pareto optimal.

1) « Pierre, feuille, ciseaux » : Jeu à somme nulle.

	P	F	C
P	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
F	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
C	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

2) « Cache-bouton ».

	Gauche	Droite
Gauche	(-1, 1)	(1, -1)
Droite	(1, -1)	(-1, 1)

D) Représentation stratégie mixte.

.Hypothèse de VNM (auteurs) sur les préférences :

Un profil de stratégies mixtes $\theta = (\theta_i)\ i \in N$ est évalué par le joueur i à l'aide de l'utilité espérée :

$$u_i : \sum \rightarrow R$$

$$u_i\ (\theta) = \sum_{s \in S} \theta(s)\,.\,u_i(s)$$

$\theta(s)$ est la probabilité que le profil de stratégie pure s soit joué étant donné θ.

.Jeu à deux joueurs et deux stratégies $S_1 = S_2 = \{a, b\}$

$p = \theta_1(a)$ et $q = \theta_2(a)$ $1 - p = \theta_1(b)$

	a	b	
a	$u_i(a, a)$	$u_i(a, b)$	p
b	$u_i(b, a)$	$u_i(b, b)$	$(1 - p)$
	q	$(1 - q)$	

Utilité espérée :

$$u_i(\theta) = p.q.u_i(a, a) + p(1 - p)u_i(a, b) + (1 - p)q.u_i(b, a) + (1 - p)(1 - q)u_i(b, b)$$

Définition : Le jeu sous forme normale $(N, (S_i)_i, (u_i)_i)$

$\rightarrow u_i(S_i, \theta_{-i}) =$ utilité espérée du joueur i lorsqu'il joue la stratégie pure s_i et lorsque les autres joueurs jouent le profil de stratégies mixtes θ_{-i}.

IV. Exemples économiques.

A) Duopole de Cournot.

1) Deux firmes : $i = 1, 2$ qui produisent chacune une quantité q_i du même bien.
2) La firme 1 produit q_1, la firme 2 q_2.
On suppose que les quantités produites sont continues entre $[0, 1]$.
→ Coûts fixes nuls.
→ Coûts marginaux contant : $c > 0$.
3) Demande inverse linéaire : $p(q_1, q_2) = a - (q_1 + q_2)$.
4) Profit de chaque firme i :

$$\begin{aligned}\pi_i &= p(q_1, q_2)q_i - c.q_i \\ &= q_i(a - q_1 - q_2 - c)\end{aligned}$$

Le duopole de Cournot est un jeu qui se fait en quantité. Les stratégies seront de choisir une quantité. Il se joue simultanément. Chacun choisit une quantité → profit → équilibre.

*$N = \{1, 2\}$

$$S_1 = S_2 = [0, 1] \rightarrow \quad s = \{q_1, q_2\}$$

Gain = Profit de chaque firme.

$$u_1(q_1, q_2) = \pi_1 \ ; \quad u_2(q_1, q_2) = \pi_2$$

B) Duopole de Stacklberg.

Même données que pour le duopole de Cournot (1+2+3+4).
Les stratégies seront aussi des quantités.
La firme 1 (leader) choisit q_1 puis la firme 2 (follower) choisit q_2 en connaissant le choix de la firme 1, q_1.
→ Stratégie de firme 1 : Choix d'une quantité q_1.
→ Stratégie de firme 2 : Fonction qui associe à chaque niveau de production q_1 un niveau $q_2^*(q_1)$ pour la firme 2.

Décisions séquentielles.
La firme 1 (leader) choisit (de manière irréversible q_1 puis la firme 2 (follower) choisit q_2 en connaissant le niveau choisit par la firme 1.
1. Stratégie de la firme 1 : Choix d'une quantité q_1 (comme le modèle de COrnot).
2. Stratégie de la firme 2 : Fonction qui associe à chaque niveau de production q, un niveau de production $q_2^*(q_1)$ pour la firme 2.1

Chapitre 2 : Concept de solutions.

I. Stratégies dominées – stratégies dominantes.

A) Dominance.

Définition (1) :

La stratégie s_i du j_i domine faiblement la stratégie s_i' du j_i si :

1. $\forall s_{-i} \in S_{-i}, u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$

2. $\exists s_{-i} \in S_{-i}, u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})$

1. La stratégie s_i domine faiblement la stratégie s_i' si quoi que fasse les autres joueurs, s_i procure une unit supérieure ou égale à celle que lui procure $s'i$.

.Cette comparaison étant stricte au moins dans un cas.

2. La stratégie s_i est faiblement dominée s'il existe une stratégie s_i' qui domine faiblement s_i.

Définition (2) :

2. La stratégie s_i domine strictement la stratégie s_i' si, quoi que fassent les autres joueurs, s_i procure au joueur i une utilité supérieure à celle que lui procures_i'.

3. La stratégie s_i est strictement dominée s'il existe une stratégie s_i' qui domine strictement s_i.

Définition (3) :

1. La stratégie s_i d'un joueur i est équivalente à la stratégie s_i' du joueur i si :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i', s_{-i})$$

2. Deux stratégies s_i et s_i' du joueur i sont équivalentes si, quoi que fassent les autres, s_i et s_i' procurent au joueur i des utilités égales.

Définition (4) :

On dira qu'une stratégie est strictement ou faiblement dominante si elle domine strictement ou faiblement toutes les autres stratégies.

Ne pas confondre je domine (comparaison entre 2), et dominante (bat toutes les autres).

On va appliquer ces définitions à un exemple :

Jeu classique avec deux joueurs, le joueur 1 à 3 stratégies : H, M B et le joueur 2, 2 stratégies : G, D

	G	D
H	(2,0)	(1, 0)
M	(2, 2)	(0, 0)
B	(1, 0)	(0, 2)

On va comparer toutes les stratégies des joueurs entre elles et voir si y en a qui domine faiblement, ou strictement, etc…
Conseil : Commencer par un joueur, généralement le 1.

Le joueur 1 à 3 stratégies et on va essayer de les comparer entre elles. Pour les comparer entre elle je dois tenir compte de ce que fait l'autre joueur.
Brouillon
On va les comparer quand le joueur 2 fixe G :
$H = M$ $H > B$ $M > B$

Supposons que le joueur 2 joue D :
$H > M$ $H > B$ $M = B$

1er résultat : H domine faiblement M car dans un cas il est égale et l'autre supérieure. En gros quel que soit la stratégie du joueur 2, le joueur 1 obtient une utilité supérieure ou égale en jouant H. Ce qui implique M est faiblement dominé par H.

2ème résultat : H domine strictement B car quel que soit la stratégie du joueur 2 ; H rapporte des gains supérieurs à ceux de B.

3ème résultat : M domine faiblement B.

On passe maintenant au joueur 2.

Si le joueur 1 joue H.
$G = D$
Si le joueur 1 joue M : $G > D$
Si le joueur 1 joue B : $D > G$

On ne peut donc rien dire.

Conclusion :
1. H domine faiblement M, M domine faiblement B et H domine strictement B. H est faiblement dominante.
2. Aucun ordre de dominance ne peut être établi pour le joueur 2.

B) Solution par éliminations successives des stratégies strictement dominées.

1. Chaque joueur peut faire une analyse individuelle sur ses actions et sur celles des autres.
2. Il va donc éliminer toutes ses stratégies strictement dominées.
3. L'analyse peut être poussée si on suppose que chacun sait que chacun est rationnel et va éliminer ses stratégies strictement dominées.
4. Après chaque élimination, un nouveau croisement des stratégies est observé et on recherche à nouveau des stratégies strictement dominées.
5. Le même raisonnement est appliqué pour éliminer les nouvelles stratégies strictement dominées et ainsi de suite jusqu'à ce qu'aucune élimination ne soit plus possible.
6. Ce comportement est connu sous le nom de comportement sophistiqué de Farquharson.

Définition :

Résoudre un jeu par élimination successive va consister à déterminer tous les profils stratégiques obtenus par application du principe d'élimination successive des stratégies strictement dominées (sous l'hypothèse du comportement sophistiqué).

Méthode :

Etape 1 : Elimine la stratégie dominée d'un des joueurs.

Etape 2 : On élimine la stratégie dominée d'un autre joueur.

Etape 3 : Le profil de stratégie obtenu (s'il existe) est l'équilibre en stratégie dominante du jeu.

Reprenons le dilemme du prisonnier et on va appliquer la méthode.

(On suppose que c'est des utilités et pas des mois de prisons)

Prisonnier 1 \ Prisonnier 2	D	C
D	$(1,1)$	$(3,0)$
C	$(0,3)$	$(2,2)$

1. Si le joueur 2 joue D. D domine C donc il jouera D.

$$2 \rightarrow D, D > C$$
$$2 \rightarrow C, D > C$$

1^er résultat : Le joueur 1 ne jouera pas la stratégie C, elle est strictement dominée.

On peut donc l'éliminer, nouveau tableau :

	D	C
D	$(1,1)$	$(3,0)$

(On raisonne par rapport à la 2eme matrice)

On va faire la même chose pour le joueur 2.

$1 \rightarrow D, D > C$

D domine C.

On finit avec une seule stratégie

Conclusion :

. Il existe un équilibre en stratégie dominante $(D, D) \rightarrow (1, 1)$

. Cette équilibre est dominé au sens de Pareto par le couple (C, C).

Autres exemple :

	D	E	F
A	(3, 0)	(0, -5)	(0, -4)
B	(1, -1)	(3, -3)	(-2, -4)
C	(2, 4)	(4, 1)	(-1, 8)

Joueur 1 :

On va comparer ses stratégies B & C. Si le joueur 2 joue D, je préfère A.

Pareil s'il joue E ou F, on voit directement que B est strictement dominé

(compare B & C et A & C

	D	E	F
A	(3, 0)	(0, -5)	(0, -4)
C	(2, 4)	(4, 1)	(-1, 8)

On peut rien dire entre A & C.

Joueur 2 :

On va comparer, D , E & F.

Si le joueur 1 joue A le joueur 2 préfère D à E.

Si le joueur 1 joue C, il préfère toujours D à E.

Conclusion : E est strictement dominée.

	D	F
A	(3, 0)	(0, -4)
C	(2, 4)	(-1, 8)

Entre D & F je ne peux rien dire.

On reprend le joueur 1 :

Si le joueur 2 joue D, A>C. Idem si il joue F

Donc C est strictement dominé par A.

	D
A	(3, 0)

On repasse au joueur 2 :

Entre D & F le joueur 2 préfère D.

L'équilibre du jeu sera : 1 joue A et 2 joue D.

	D
A	(3, 0)

On reprend la bataille du sexe :

		Rose	
		Action	Art
Jule	Action	2;1	0;0
	Art	0;0	1;2

Jule entre Action & Art.

On ne peut rien dire pour lui, pareil pour Rose avec cette méthode.

Défaut de la méthode : Peut-être pareto dominé et parfois il n'y a pas de solution

Remarque 1 :

L'ordre d'élimination des stratégies strictement dominées n'affecte pas le résultat final.

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final.

Remarque 2 :

. Les stratégies dominantes n'existent pas toujours et même le comportement sophistiqué ne permet pas toujours de réduire un jeu à un seul profil et donc prévoir le comportement des joueurs.

	G	D
H	(5, 1)	(4, 0)
M	(6, 0)	(3, 1)
B	(6, 4)	(4, 4)

. Comment procède-t-on alors ?

→ Lorsqu'un joueur ne peut disposer d'une stratégie strictement dominante, il peut examiner chaque situation et choisir une « meilleure réponse » pour chaque situation à laquelle il fait face (Equilibre de Nash.

II. Equilibre de Nash.

A) Définition.

Dans un jeu $\langle N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ une stratégie s_i^* du joueur i est une meilleur réponse au choix stratégique s_{-i} des aitres joueurs si :

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}), \forall\, s_i' \in S_i, \forall\, i \in N$$

Tant que les autres joueurs ont pour profil de stratégiess_{-i}, l'utilité que procure s_i^* au joueur i est maximale.s

2 choses différentes : Ici je fixe la stratégie des autres joueurs s_{-i} alors que pour une stratégie strictement ou faiblement dominé, etc ç a devait être vrai pour toutes les stratégies des autres joueurs. C'est une meilleure réponse si l'utilité que j'obtiens est supérieure ou égal à toutes mes autres stratégies.
« L'autre joueur joue ça, quel est ma meilleure réponse)

Définition (2) :
L'ensemble des profils stratégiques (s_i^*, s_{-i}) où s_i^* est une meilleure réponse à s_{-i} est la « courbe » des meilleures réponses du joueur i aux stratégies possibles des autres.
Autrement dit, la courbe des meilleures réponses du joueur i est l'ensemble des profils $s = (s_i^*, s_{-i})$ tels que s_i^* est une meilleure réponse à s_{-i}.

Définition (3) :
. Il est naturel que de croire que si un joueur rationnel sait ce que font les autres en termes de stratégies, sa réponse consiste à choisir une meilleure réponse ce choix.
. L'ensemble des meilleures réponses possibles à s_{-i} sera noté $MR_i(S_{-i})$
.Plus formellement :

$$s_i^* \in MR_i(S_{-i}) \leftrightarrow \forall s_i' \in S_i\colon u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$$

Remarque : La notion de meilleure réponse du joueur i permet de définir une fonction particulière MR_i sur S_{-i} vers l'ensemble des parties de S_i : on dit que c'est une correspondance de S_{-i} vers S_i.

Définition (4) :
On appelle équilibre de Nash, tout profil s de stratégies où aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie (pendant que les autres conservent leurs stratégies respectives).
En d'autres termes, la stratégie de chaque joueur est une meilleure réponse aux stratégies adoptées par les autres.

Définition (5) :

Un équilibre de Nash en stratégies pures d'un jeu sous forme normale $\langle N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ est un profil de stratégie $s^* = (s_1^*, \dots, S_n^*) \in S$ tel que la stratégie de chaque joueur est une meilleure réponse aux stratégies choisies par les autres joueurs, c'est à dire que :

$\forall i \in N: s_i^* \in MR_i(s_{-i}^*)$ où

$$\forall i \backslash N : u_i(s_i^*, s_{-1}^*) \geq u_i(s_i', s_{-i}^*), \forall\, s_i' \in S_i$$

Si de plus chaque joueur i préfère strictement jouer la stratégie s_i^*, c'est à dire :

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) > u_i(s_i', s_{-1}^*), \forall\, s_i' \neq s_i^* \in S_i, \forall i \in N$$

Alors s^* est un équilibre de Nash strict (quand y a « > »).

Remarque :

.Pour rechercher les équilibres de Nash d'un jeu, on peut procéder comme suit :

1. Déterminer la courbe des meilleures réponses de chaque joueur.
2. Les équilibres de Nash sont alors donnés par l'intersection de toutes les courbes des meilleures réponses.

Exemples 1 :

. Deux joueurs peuvent se partager 2€.

. Ils annoncent simultanément une quantité demandée, s_1 et s_2 où $S_1, s_2 \in [0,2]$.

. Si $s_1 + s_2 \leq 2$ alors chaque joueur i reçoit la quantité s_i qu'il a demandé.

. Si au contraire $s_1 + s_2 > 2$ alors ils ne reçoivent rien.

Déterminer les équilibres de Nash de ce jeu :

1. On va commencer par écrire les fonctions d'utilités (de paiement).

Les fonctions d'utilités u_i des joueurs $i \in \{1,2\}$ sont définies sur $[0,2]^2$ par :

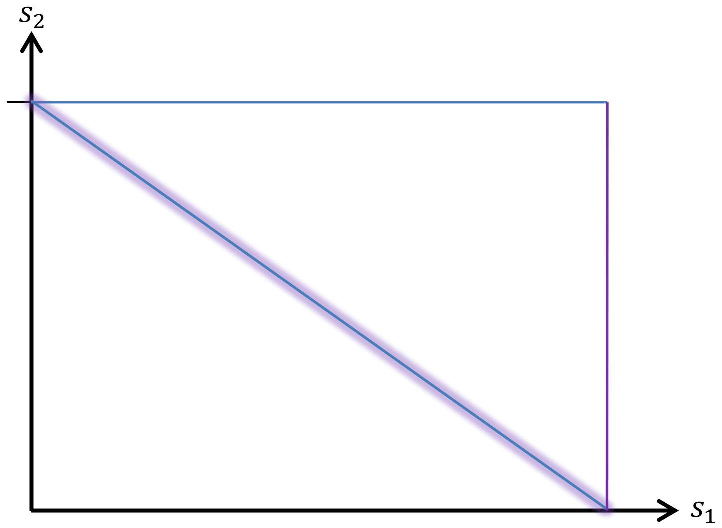
$$u_i(s_1,\, s_2) = \begin{cases} s_i\ si\ s_1 + s_2 \geq 2 \\ 0\ sinon \end{cases}$$

2. Pour une demande $s_2 \in [0, 2@$ du joueur 2, le joueur 1 reçoit s_1 s'il déclare une demande s_1 telle que $s_1 + s_2 \leq 2$. C'est à dire telle que $0 \leq s_1 \leq 2 - s_2$

Sinon il reçoit0. Sa meilleure réponse à la demande s_2 est alors $2 - s_2$ si $2 - s_2 > 0$ et toute demande $s_1 \in [0,2]$ si $2 - s_2 = 0$

1. $MR_1(s_2) = \begin{cases} 2 - s_2\ si\ s_2 \in [0,2[\\ [0,2] sinon \end{cases}$
2. De même $MR_2(s_1) = \begin{cases} 2 - s_1\ si\ s_1 \in [0,2] \\ [0,2] sinon \end{cases}$

Comment on représente graphiquement les meilleures réponses :



1. L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures est l'ensemble des couples $(s_1, s_2) \in [0, 2]^2$ tels que $s_1 + s_2 = 2$, et le couple $(s_1, s_2) = (2, 2)$
2. Ce point est Pareto dominé, ils peuvent gagner mieux tous deux en se coordonnant.

Définition :

Un profil stratégique $s = (s_i)$ du jeu est dit pareto dominé s'il existe un autre profil stratégique $s'(s_i')$ tel que $\forall i \in N: U_i(s') > u_i(s)$

Un profil non Pareto dominé est dit Pareto optimal.

Exemple 2 :

Soit deux joueurs, 1 & 2 qui doivent chacun choisir un nombre dans $[0; 2]$.
Lorsque 1 choisit x et 2 choisit y, le joueur 1 reçoit par paiement $x(1-y)$ tandis que le joueur 2 reçoit par paiement $y(1-x)$.

1) Déterminer la correspondance MR_1
2) Déterminer la correspondance MR_2
3) Déterminer les courbes MR
4) Trouver l'équilibre de Nash

Les fonctions d'utilité u_i des $J_i \in \{1; 2\}$ sont définies sur $[0; 2]^2$ par :

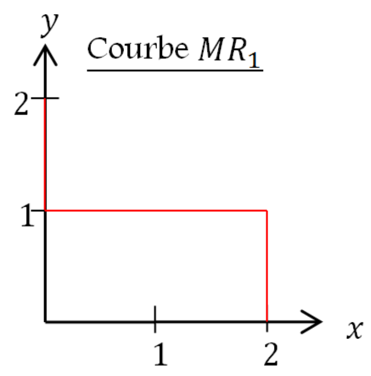
$$u_1(x, y) = x(1-y)$$
$$u_2(x, y) = y(1-x)$$

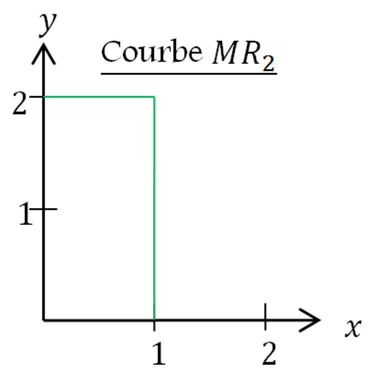
1 & 2) Pour une stratégie y du joueur 2, la meilleure réponse du joueur 1 dépend du signe de $1 - y$.

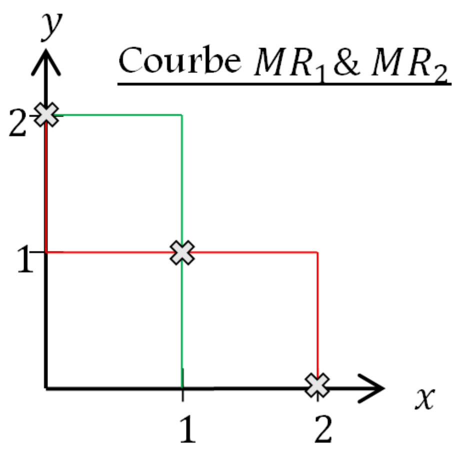
$$MR_1 : \begin{cases} \{2\} si\ y \in [0;1[\ \ si\ 1-y>0 \\ [0;2] si\ y=1 \quad u_1=0 \\ \{0\} si\ y \in]1;2]\ \ u\_1=0 \quad 1-y<0 \end{cases}$$

$$MR_2 : \begin{cases} \{2\}\ si\ x \in [0;1[\\ [0;2]\ si\ x=1 \\ \{0\}\ \ si\ x \in\ ]1;2] \end{cases}$$

3)







B) Equilibres de Nash dans un jeu sous forme normale.

Procédure :

Pour chaque joueur, et pour toute contingences$s_{-i} \in S_i$, marquer d'une étoile toutes les cases correspondant aux stratégies s_i^* de i qui maximisent les gains de i. C'est à dire marquer les meilleurs réponses s_i^* de i à la stratégie s_{-i} de ses adversaires, c'est à dire telles que :

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i', s_{-i}^*), \forall \ s_i', \forall \ i \in N$$

Les équilibres de Nash sont alors les profils de stratégie pure dont chaque composante est marquée d'une étoile.

Exemple 1 :

(En haut toujours le joueur 2 et à gauche le 1, pour des soucis de rédaction lié à Word je les mets pas.)

	G	M	P
H	$(2;5)$	$(3^*;6^*)$	$(5^*;6^*)$
B	$(4^*;4^*)$	$(2;3)$	$(4;4^*)$

.Pour le joueur 1 :

- Si J_2 joue G → B
- M → H
- P → H

.Pour le joueur 2 :

- Si J_1 joue H → M ou P
- B → G ou P

3 équilibres de Nash : $(H;M);(H;P)\&\ (B;G)$

La stratégie G est faiblement dominée mais est jouée dans un équilibre.

Exemple 2 : Dilemme du prisonnier.

	D	C
D	$(1^*, 1^*)$	$(3^*, 0)$
C	$(0, 3^*)$	$(2, 2)$

Il existe un équilibre de Nash $(D;D)$ qui procure les gains $(1^*;1^*)$.

Exemple 3 :

	P	F	C
P	$(0;0)$	$(-1;1^*)$	$(1^*;-1)$
F	$(1^*;-1)$	$(0;0)$	$(-1;1^*)$
C	$(-1;1^*)$	$(1^*;-1)$	$(0;0)$

Pas d'équilibre de Nash.

C) Propositions et Théorèmes.

1. Si la stratégie s_i est strictement dominée alors s_i n'est jamais jouée à un équilibre de Nash ou encore dans équilibre de Nash , les stratégies $\neq J$ sont non strictement dominées.
2. Si la stratégie s_i est strictement dominante pour tout $i \in N$ alors $s = (s_i)_{i \in N}$ est l'unique équilibre de Nash.
3. Si la stratégie s_i est faiblement dominante pour tout $i \in N$ alors $s = (s_i)_{i \in N}$ est un équilibre de Nash mais pas nécessairement le seul, les équilibre de Nash ne peuvent pas être strictement dominé.

Duopole de Cournot.

$$\pi_i = p(q_1, q_2)q_i - c \qquad q_i = q_i(a - q_i - q_{-i} - c)$$

Pour trouver la meilleure réponse des firmes :

$$Max\ q_i \quad \pi_i = q_i(a - q_i - q_{-i} - c)$$

$$\frac{\delta \pi_i}{\delta q_i} = a - c - 2q_i - q_{-i} = 0$$

$$\leftrightarrow \boxed{q_i = \frac{a - c - q_{-i}}{2}}$$

$$MR_1(s_2) = q_1(q_2) = \frac{a - c - q_2}{2} \qquad MR_2(s_1) = q_2(q_1) = \frac{a - c - q_1}{2}$$

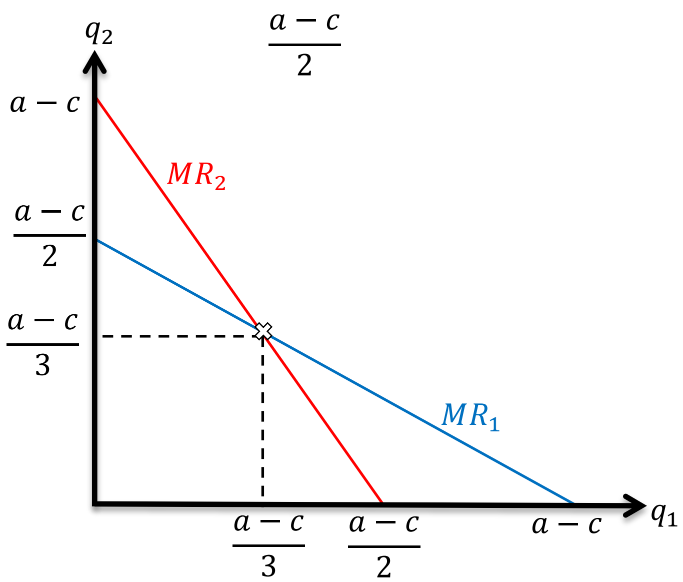
L'équilibre est obtenu à l'intersection des deux fonctions de réaction.

Ça revient à résoudre ce système :

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{a - c - q_2}{2} \\ q_2 = \dfrac{a - c - q_1}{2} \end{cases} \leftrightarrow q_1 = s_1^* = q_2 = s_2^* = \frac{a - c}{3}$$

Equilibre de Cournot de Nash est :

$$(q_1^{CN}; q_2^{CN}) = \left(\frac{a - c}{3}; \frac{a - c}{3}\right)$$



III. Stratégie Mixte.

A) Exemple introductif.

	Détruire	Construire	
Détruire	$(4^*;4^*)$	$(1;3)$	$x_1 = \sigma_1\ (D)$
Construire	$(3;1)$	$(2^*\ ;2^*)$	$x_2 = \sigma_1\ (C)$
	$y_1 = \sigma_2\ (D)$	$y_2 = \sigma_2\ (C)$	

Equilibres de Nash en stratégie mixtes :

Une stratégie mixte du J_1 dont les stratégies sont en lignes consistes à jouer :

1) La stratégie détruire avec une probabilité :

$\delta_1(détruire) = x_1$

2) La stratégie construire avec la probabilité :

$\delta_1(construire) = x_2$

De sorte que : $x_1 + x_2 = 1$

Pour simplifier identifions cette stratégie au couple $x = (x_1, x_2)$ ou plus simplement au nombre $x_1 \in [0;1]$

De même une stratégie mixte du J_2 consiste à jouer :

1) La stratégie détruire avec une probabilité :

$\delta_2(détruire) = y_1$

2) La stratégie construire avec la probabilité :

$\delta_2(construire) = y_2$

De sorte que $y_1 + y_2 = 1$

Pour simplifier identifions cette stratégie au couple $y = (y_1, y_2)$ ou plus simplement au nombre $y_1 \in [0;1]$

Lorsque le joueur 2 joue y, la préoccupation du joueur 1 est de lui trouver une MR.

Il cherche donc x^* de telle sorte que son expérience de gain $u_1(x^*, y)$ soit maximisée.

C'est à dire $u_1(x^*, y) = \max_{x \in s_1} u_1(x^*, y)$

Où $u_1(x^*, y)$ est donnée par :

$$\begin{cases} u_1(x^*, y) = 4 \times x_1 y_1 + 1(x_1 y_2) + 3(x_2 y_1) + 2(x_2 y_2) \\ u_1(x^*, y) = y_1 - x_1 + 2(x_1 y_1) + 2 \ ou \ \begin{cases} x_2 = 1 - x_1 \\ y_2 = 1 - x_1 \end{cases} \\ u_1(x^*, y) = (2y_1 - 1)x_1 + y_1 + 2 \end{cases}$$

Le sens de variation de cette fonction $f: x_1 \to u_1(x, y)$ dépend du signe de $2y_1 - 1$.

1) Pour $y_1 \in [0; \frac{1}{2}[$ cette fonction est strictement décroissante et atteint sa valeur maximum pour $x_1 = 0$

2) La meilleure réponse du joueur 1 à toute stratégie $y_1 \in [0; \frac{1}{2}[$ du joueur 2 consiste à jouer la stratégie $x_1^* = 0$ donc $x_2^* = 1$.

3) C'est à dire $x = (0, 1)$

$$2y_1 - 1 = 0 \leftrightarrow y_1 = \frac{1}{2} \quad y_1 < \frac{1}{2} \to \text{Décroissante}$$
$$u_1 = (2y_1 - 1)x_1 + y_1 + 2$$

1. Pour $y_1 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, cette fonction est croissante et atteint donc sa valeur max' pour $x_1 = 1$.
2. La meilleure réponse du joueur 1 à toute stratégie $y_1 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ du joueur 2, consiste à joueur la stratégie $x_1^* = 1$ donc $x_2^* = 0$
3. C'est à dire $x = (1; 0)$

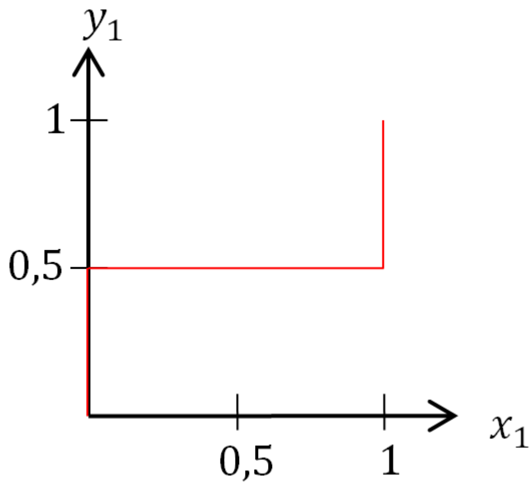
Pour $y_1 = 1/2$ cette fonction est croissante.

La meilleure réponse du joueur 1 à toute stratégie $y = \frac{1}{2}$ du joueur 2 consiste à jouer la stratégie $x_i^* \in [0,1]$

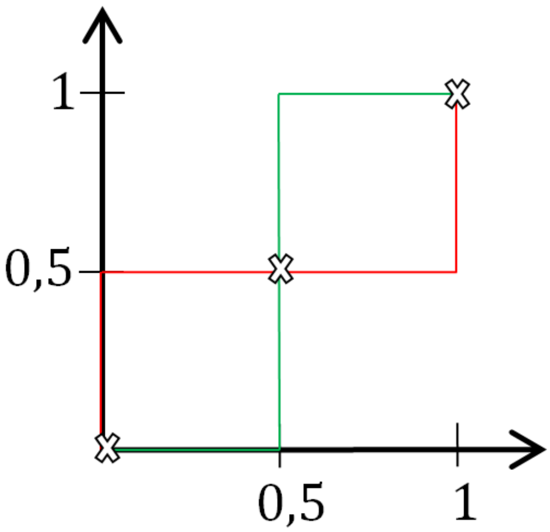
La courbe de meilleure réponse du joueur 1 est donc définie par :

$$x_1^* \in \begin{cases} \{0\} si\ 0 \leq y_1 \leq 1/2 \\ [0; 1]\ si\ y_1 = 1/2 \\ \{1\}\ si\ \ 1/2 \leq y_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$y_1^* \in \begin{cases} \{0\} si\ 0 \leq x_1 \leq 1/2 \\ [0; 1]\ si\ x_1 = 1/2 \\ \{1\}\ si\ \ 1/2 \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$



$$E.N = (x_1^*, y_1^*) = (0; 0); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); (1; 1)$$



B) Définitions et Propositions.

Définition : Un équilibre de Nash en stratégies mixtes du jeu sous forme normale $\{N, (\sum\ i)_i\ (u_i)_i\}$ est un équilibre de Nash en stratégie pure de l'extension mixte de ce jeu c'est à dire un profil de stratégie $\delta \in \sum$ tel que : $u_i(\delta_i^*; \delta_{-i}) \geq u_i(\delta_i; \delta_{-i}); \forall\ \delta_{-i} \in \sum_i, \forall\ i \in N$

Proposition : L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures est un sous ensemble de l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes.

Tout jeu sous forme normal fini possède au moins un équilibre de Nash en stratégie mixte.

C) Autres exemples.

Dilemme du prisonnier.

	D	C
D	$(1^*, 1^*)$	$(3^*, 0)$
C	$(0, 3^*)$	$(2, 2)$

Pas d'autres équilibres de Nash que (D, D) car D domine strictement C pour les 2 joueurs.

Jeu coordination (cinéma).

Equilibre de Nash en stratégie pure :

	a	b
a	$(2^*; 1^*)$	$(0; 0)$
b	$(0; 0)$	$(1^*; 2^*)$

Equilibre de Nash en stratégie mixte :

	a	b	
a	$(2; 1)$	$(0; 0)$	p
b	$(0; 0)$	$(1; 2)$	$1-p$
	q	$1-q$	

$p = \delta_1(a)$: Probabilité que le joueur 1 fasse la stratégie a.

$q = \delta_2(a)$: Probabilité que le joueur 2 joue b.

Si $p \in \{0; 1\}$: On retrouve les 2 équilibre de Nash en stratégie pures $(a; a)$ et $(b; b)$.

$1 - p = \delta_1(b)$
$1 - q = \delta_2(b)$

$\boldsymbol{EN}: \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) \ \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\right)$

Pour le joueur 1 :

$u_1(a) = 2q + 0(1-q)$
$u_1(b) = 1 - q$

Le joueur est indifférent entre les 2 car cela lui procure la même utilité : $1 - q = 2q \leftrightarrow q = \frac{1}{3}$

Pour le joueur 2 :

$u_2(a) = p + 0 \times (1-p)$
$u_1(b) = 1 - q$

Le joueur est indifférent entre les deux car cela lui procure la même utilité $p = 2(1-p) \leftrightarrow p = 2/3$

Equilibre de Nash en stratégie mixte :

$$\delta\begin{pmatrix} p\left(\frac{2}{3}\right) & ; & q\left(\frac{1}{3}\right) \\ (1-p)\left(\frac{1}{3}\right) & & (1-q)\left(\frac{2}{3}\right) \end{pmatrix}$$

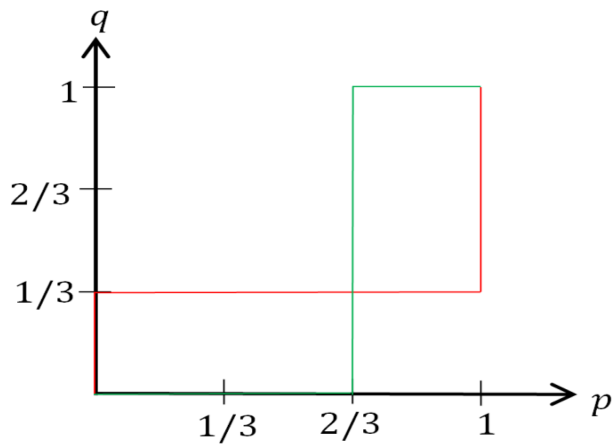
$$p = \frac{2}{3} \qquad 1 - p = \frac{1}{3} \qquad q = \frac{1}{3} \qquad 1 - q = \frac{2}{3}$$

Trois équilibres de Nash dont 2 en stratégies pures :

Correspondance des meilleures réponses :

$$MR_1(\delta_2) = \begin{cases} \{0\}\ si\ \ \delta_2(a) < 1/3 \\ ]0,1]\ si\ \ \delta_2(a) = 1/3 \\ \{1\}\ si\ \ \delta_2(a) > 1/3 \end{cases}$$

$$MR_2(\delta_1) = \begin{cases} \{0\}\ si\ \ p < 2/3 \\ ]0,1]\ si\ \ p = 2/3 \\ \{1\}\ si\ \ > 2/3 \end{cases}$$



$$\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}\right)$$

Pierre-feuille-ciseaux.

	F	P	C	
F	$(0;0)$	$(1^*;-1)$	$(-1;1^*)$	a
P	$(-1;1^*)$	$(0;0)$	$(1^*;-1)$	b
C	$(1^*;-1)$	$(-1;1^*)$	$(0;0)$	c
	p	q	n	

Pas d'équilibre de Nash en stratégie pure.

En stratégie mixte ?

Equilibre de Nash où un des joueurs joue uniquement 2 action avec des probabilités strictement positives ?

Par exemple $p, q > 0 \ \ et\ n = 0$ → Le joueur 1 ne joue pas P donc $b = 0$ et $c = 1 - a$

Puisque $p, q > 0\ \ F$ et P doivent rapporter la même chose au joueur 2 donc $-(1-a) = -a + (1-a)$

$\leftrightarrow a = \dfrac{2}{3}$ & $c = \dfrac{1}{3}$

F et P rapportent alors $-\frac{1}{3}$ au Joueur 2 alors que C lui rapporte $\frac{2}{3}$ donc il dévie et nous n'avons pas d'équilibre.

$u_2(F) = u_2(P) = -1/3$
$u_2(C) = 2/3$

Equilibre de Nash où un des joueurs joue uniquement 3 action avec des probabilités strictement positives ?

Oui car il existe au moins un équilibre de Nash

$$b - c = -A + c = a - b\ et\ q - n = n - p = p - q$$

$$a = b = c = \frac{1}{3} \qquad\qquad p = q = n = \frac{1}{3}$$

$u_2(F) = b - c$ $\qquad$ $u_2(C) = a - b$ $\qquad$ $u_2(P) = -a + c$

$u_1(F) = q - n$ $\qquad$ $u_1(C) = -p - q$ $\qquad$ $u_1(P) = -p + n$

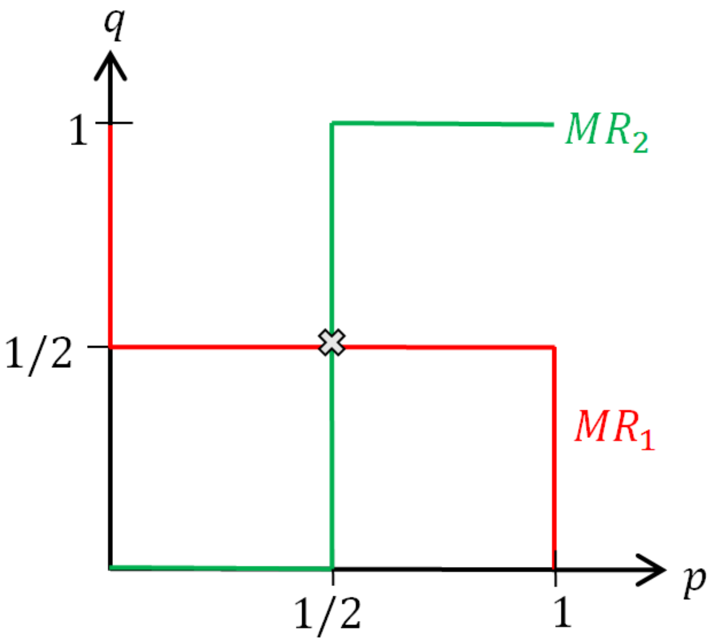
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Cache bouton

	G	D	
D	$(1^*; -1)$	$(-1; 1^*)$	a
G	$(-1; 1^*)$	$(0; 0)$	c
	q	n	

$$\left.\begin{array}{l} u_1(G) = -q + 1 - q \\ u_1(D) = q - (1 - q) \end{array}\right. \rightarrow q = 1/2$$

$$\left.\begin{array}{l} u_2(G) = p - (1 - p) \\ u_2(D) = -p + (1 - p) \end{array}\right. \rightarrow p = 1/2$$



$$\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$$

Chapitre 3 : Jeux sous forme extensive à information parfaite.

I. Equilibre de Nash dans un jeu séquentiel.

A) Définitions et exemples.

Avec un équilibre de Nash les joueurs prennent les stratégies de leurs opposants comme une donnée et par conséquent ne considèrent pas la possibilité de les influencer.

Dans les jeux dans lesquels un joueur choisit ses stratégies après avoir observé celle de ses opposants (jeux dynamiques à information parfaite), cette conjecture est naïve et conduit à des équilibres de Nash discutable.

Raffinement des équilibres de Nash pour les jeux dynamiques qui excluent les équilibre de Nash non raisonnables.

Exemple 1 :
Arbre manquant.

La forme normale de ce jeu est :

	(g ; g)	(g ; d)	(d ; g)	(d ; d)
G	2* ; 0*	2 ; 0*	2* ; -1	2 ; -1
D	1 ; 0	3* ; 1*	1 ; 0	3* ; 1*

3 équilibres de Nash : $(G; (g, g)); (D; (g, d)); (D; (d, d))$

On considère l'équilibre de Nash $(D; (g, d))$
Imaginons que le J_2 dise au J_1 « si tu joues D, je joue G ». Il menace le J_1.
Cette menace est-elle crédible ?

.Supposons que le joueur 1 joue D.
Alors le joueur 2 est devant le fait accomplie et il a intérêt à jouer D.
La menace du joueur 2 n'est pas crédible car il n'a pas d'intérêt à l'exécuter s'il est mis devant le fait accompli.

Par conséquent le joueur 1 anticipe que s'il joue D, le J2 ne mettra pas sa menace à exécution.
Il va donc jouer D.
$(D, (g, d))$ est un équilibre de Nash parfait contrairement $(G, (g, g))$.

Définition : Un équilibre de Nash est dit parfait s'il exclut toutes les menaces non crédibles.
Les stratégies d'un équilibre de Nash parfait forment un équilibre de Nash dans chaque sous-jeu.

Définition :
.Un sous-jeu d'un jeu sous forme extensive G est un jeu sous forme extensive de noud initial x appartenant G dont l'ensemble des nœuds non initiaux est le sous ensemble des nœuds successeurs de x dans G, et où les joueurs, les ensembles d'informations et les stratégies associées aux nœuds non terminaux, ainsi que les utilités associées aux nœuds terminaux sont les mêmes que dans le jeu original G.
.Un sous jeu strict ou propre de G est un sous jeu différent de G.

Exemple :
Graphique Manquant.

Définition :
(Selten, 1965) Un équilibre de Nash en sous jeux parfait est un profil de stratégie tel que pour chaque sous jeu le profil de stratégie induit est un équilibre de Nash de ce sous-jeu.

. Si pas de sous jeux stricts alors $EN \leftrightarrow ENPSJ$
.$\{ENPSJ\}$ sont un sous ensemble des $\{EN\}$

Méthode :
.Pour obtenir le ou les équilibres de Nash parfaits d'un jeu en forme extensive fini, il suffit de raisonner récursivement.
.On commence par chercher le ou les équilibres de Nash à la dernière période (disons T) pour chaque sous-jeu à cette période.
.Lorsque ceci est résolu, chaque sous jeu commençant à l'avant dernière période est ramené d'un jeu a deux périodes à un jeu à une période.
.Ensuite, une fois que le jeu est résolu en T-1, chaque sous jeu commençant en T-2 est ramené d'un jeu à trois périodes à un jeu à une période, etc…
. Cet algorithme est dû à Kuhn

Arbre manquant

Il y a 3 sous jeu dans cet exemple, on a 2 périodes
En dernière période on a 2 sous jeux.
On commence par G1, 2 stratégies pour le joueur : soit g, soit d
L'équilibre de Nash est g parce que c'est sa meilleure réponse, mieux vaut 0 que -11
Dans G1 $EN \rightarrow (g)$
Dans G2, il a le choix entre les mêmes stratégies.
L'équilibre de Nash est d car il obtient 1 contre 0

Comment on transforme ce sous jeu ?
En T je sais que le joueur 2 va jouer g si le joueur 1 joue g et d si le joueur 1 joue D
C'est dans ce nouveau jeu que je calcul les équilibre de Nash.
En jouant D le joueur 1 obtient 3 contre 2 donc il va le jouer.
Quel est l'équilibre de Nash en sous jeu parfait ?
$ENPSJ = (D; g, d)$

Remarque :

1. L'équilibre de Nash est applicable dans tout jeu en forme extensive, mais l'intérêt de ce concept est limité par le fait que beaucoup de jeux ont peu de sous jeux.
2. On peut démontrer que tout jeu en forme extensive fini possède un équilibre parfait en stratégie mixtes
3. L'équilibre parfait est très utile dans les jeux à information parfaite, puisque dans ces jeux, un sous jeu démarre en chaque nœud.
4. En appliquant l'algorithme de Kuhn (1953), on montre que tout jeu à information parfaite possède un équilibre de Nash en stratégies pures.

B) Application économique.

Exemple de Stacklberg :

1. Deux firmes $i = 1, 2$ qui produisent chacune une quantité q_i du même bien.
2. Firme $i = 1, 2$ produit $q_i \in [0, 1]$ avec cout fixe nul et cout marginal constant $c > 0$
3. Demande inverse linéaire : $p(q_1, q_2) =$

1. Décisions séquentielles : La firme 1 (leader) choisit de manière irréversible q_1 puis la firme 2 (follower) choisit q_2 connaissant le niveau choisi par la firme 1

2. Résolution par induction à rebours (méthode de Kuhn) :

    1. Stratégie de la firme 1 : Choix d'une quantité q_1 (comme dans le modèle de Cournot).

    2. Stratégies de la firme 2 : Fonction qui associe à chaque niveau de production q_1 un niveau de production $q_2^*(q_1)$ pour la firme 2.

Meilleures réponses des firmes :

1. Production optimale de la firme 2 en fonction de q_1:

$$q_2^*(q_1) = MR_2(q_1) = \frac{a - c - q_1}{2}$$

2. Production optimale de la firme 1 étant donné la stratégie de la firme 2 :

$$Max_{q_1}\pi_1 = q_1(a - q_1 - q_2^*(q_1) - c)$$

$$On\ remplace\ q_2^*(q_1)$$

$$MR_1(s_2) = q_1^* = \frac{a - c}{2}$$

$$q_2^* = \frac{a - c - \left(\frac{(a - c)}{2}\right)}{2} = \frac{a - c}{4}$$

1. $\begin{cases} q_1^* = \frac{a-c}{2} \\ q_2^* = \frac{a-c}{4} \end{cases}$
2. Equilibre de Stacklberg (firme 1 leader) est :

$(q_1^{ST}, q_2^{ST}) = \left(\frac{a - c}{2}, \frac{a - c}{4}\right)$

3. Rappel : Cournot : $(q_1^{CN}, q_2^{CN}) = \left(\frac{a-c}{3}, \frac{a-c}{3}\right)$p

II. Les jeux répétés.

A) Définitions et exemples.

1. L'objectif est d'étudier les interactions de longs termes en considérant un jeu de base (simultané) répété entre les mêmes joueurs
	1. On va considérer plusieurs périodes
	2. A chaque période, le même jeu, appelé « jeu constituant » G est joué c'est à dire même ensemble de joueur, même paiements, mêmes séquences de paiement
2. Normes sociales (stratégies de long terme)

La répétition d'un jeu consiste à faire participer une population de joueurs à des situations d'interaction stratégique qui seront récurrentes.

Double intérêt :

-Il rend compte de nombreuses situations marquées par une régularité des interactions dans le temps. Etudier les situations qui se mettent en place dans le temps.

Exemple :

On prend plusieurs entreprises qui sont en concurrence, installé depuis un petit moment sur un marché donc à force d'avoir une même concurrence entre ces entreprises ; il commence à y avoir des relations entre celle-ci et des situations stratégiques vont se mettre en place. **Etudier ces effets d'apprentissage dans le temps.**

-La répétition d'un jeu vise à déterminer si la régularité des interactions est de nature à modifier le comportement de ces joueurs. Est-ce que le fait qu'ils jouent le même jeu depuis longtemps va avoir un impact sur les stratégies ?

Présentation

1. Supposons qu'un jeu puisse être décomposé en un nombre de périodes
$t = 1,2, \dots, T$ (où T est $fini$ ou $infini$)
2. A chaque période$t$, les joueurs choisissent simultanément leurs stratégies en connaissant toutes les stratégies qui ont été choisies par tous les joueurs de la période 1 à la période $t - 1$.
3. Ces jeux sont à information presque parfaite (information complète, et observation parfaite et publiques des actions passés)
4. Les jeux répétés, dans lesquels un jeu d'une période à décision simultanées est répété T fois, appartiennent à cette catégorie.
5. A la période t, les joueurs connaissent toutes les décisions qui ont été prises auparavant.

Qui dit temps dit taux d'actualisation…

Définitions :

1. L'utilité de chaque joueur (U_i) est égale à la somme actualisée de ses utilités futures ($u_{i.t}$) sur son horizon temporel T.
2. Le facteur d'escompte, notée $\delta, 0 < \delta < 1$ mesure l'impatience des joueurs

Définition :

Taux d'actualisation (facteur d'escompte) : Le joueur est indifférent entre recevoir x demain et δx aujourd'hui. Plus δ est proche de 0, plus les joueurs accordent de l'importance aux valeurs présentes par rapport aux valeurs futures

Ps : δ mesure « l'impatience » des joueurs. S

Remarque :

1. On peut aussi concevoir $1 - \delta$ comme la probabilité que le jeu s'arrête en t s'il s'est poursuivi jusqu'en $t - 1$.
2. $(1-\delta)\delta^{t-1}$ est alors la probabilité que le jeu s'arrête à l'étape→t: $\sum_{t=1}^{\infty}(1-\delta)\delta^{t-1} = 1$
3. On peut évaluer la suite d'utilité $(U_t)_{t=1,2}$ par l'utilité attendue : $\sum_{t=1}^{\infty}(1-\delta)\delta^{t-1} \times u_{i,t}$
4. Utilité actualisée, c'est à dire l'expression proportionnelle : $\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_{i,t}$

Définition de stratégie :

1. Une stratégie d'un joueur est un plan complet d'actions qui spécifie une action à effectuer pour chaque période t du jeu et pour chaque histoire possible du jeu avant t (pour chaque sous jeu)

2. Remarque : A chaque période commence autant de sous-jeux qu'il existe d'histoires possibles du jeu avant cette période.

Exemple : Dilemme du prisonnier répété.

	D	C
D	$-2, -2$	$+3, -3$
C	$-3, +3$	$2, 2$

Ce jeu je vais le répété un certain nombre de fois, on va pouvoir le traité comme un jeu dynamique.

Double arbre dilemme

B) Jeux répétés à horizon fini.

1. Supposons d'abord que le jeu soit répété pendant un nombre fini de périodes T
2. L'unique équilibre de Nash du jeu G est (D, D).
3. Pour déterminer les équilibres de Nash parfait, on raisonne récursivement (à rebours)

Procédure (1) :

1. A la période R, les stratégies doivent constituer un équilibre de Nash quelle que soit l'histoire du jeu.
2. En T commencent autant de sous-jeux que d'histoires possibles du jeu avant T.
3. Chacun de ces sous jeux est identique au jeu de base et donc possède un équilibre de Nash unique (D, D)
4. Cela implique que les 2 joueurs avouent.

Procédure (2) :

1. A la période $T-1$, la situation est identique, puisque la période T est entièrement déterminée, indépendamment du passé.
2. En T-1 commencent autant de sous jeux que d'histoires possibles du jeu avant T-1
3. Les deux joueurs anticipent qu'à la période suivante, chacun d'eux va D donc ce qui sera joué en T-1 ne pourra pas influencer ce qui arrivera en T
4. Il n'existe aucune menace crédible qui pourrait inciter les joueurs à ne pas avouer en $T-1$
5. Cela implique que les deux joueurs jouent D en T-1, quel que soit ce qui se passe avant T-1 b

Procédure (3) :

On remonte ainsi jusqu'en première période : Les joueurs avouent également.
Le seul équilibre de Nash en sous-jeux parfait consiste donc à avouer à chaque période, pour chaque joueur

Proposition :

Si un jeu en une étape (« ou jeu constituant ») a un équilibre de Nash unique, alors le jeu obtenu en répétant T fois le jeu constituant possède un seul équilibre de Nash parfait, qui consiste simplement en la répétition de cet équilibre de Nash à chaque étape, indépendamment du passé.

Remarque: Si le jeu constituent a plusieurs équilibres de Nash, le jeu répété T fois a de nombreux équilibres parfaits, dont certains ne consistent pas simplement à jouer un équilibre du constituant chaque étape.

Cadre exemple :

	P_2	Q_2	R_2	S_2
P_1	2, 2	5,0	−1,0	0,0
Q_1	0,5	4,4	−1,0	0,0
R_1	0,0	0,0	0,3	0,0
S_1	0, −1	0, −1	−1, −1	3,0

Peut-on obtenir un équilibre de Nash en sous jeu parfait tel que chaque joueur obtienne un paiement de 4 au moins en 1ère période ?

Ce jeu constituant on va juste le répéter deux fois et on va regarder quels stratégies peuvent mener à un équilibre de Nash en sous jeu parfait.

$a_2 \rightarrow$ Action du joueur 2 en 1ère période.

.En $t = 1$: Jouer Q_i pour chaque joueur i
.En $t = 2$:
-Jouer P_i pour chaque joueur i si (Q_1, Q_2) a été obtenu en $t = 1$
-Jouer S_i pour chaque joueur i si $(Q_1, a_2 \neq Q_2)$ a été obtenu en $t = 1$
-Jouer R_i pour chaque joueur i si $(a_1 \neq Q_1, Q_2)$ a été obtenu en $t = 1$
-Jouer P_i pour chaque joueur i si $(a_1 \neq Q_1, a_2 \neq Q_2)$ a été obtenu en $t = 1$
$(\widehat{s_1},\ \widehat{s_2})$ entraîne un équilibre de Nash dans chaque sous jeu de la seconde période.

Est-ce que cette stratégie est un équilibre de Nash en sous jeu parfait ?
Pour le savoir il faut revenir à la définition, à chaque sous jeu dans chaque sous jeu (branche) je dois avoir un équilibre de Nash.
(On raisonne par induction à rebours.)

-Si en 1ère période ils ont joué (Q_1, Q_2), ils ont respecté le contrat, ils jouent un équilibre de Nash en 2nd période.
-Vu que le joueur 2 a dévié, le joueur 1 va le punir et joué s_1 car dans ce cas le mieux pour le joueur 2 c'est 0.

. $(\widehat{s_1}, \ \widehat{s_2})$ Forment un équilibre de Nash du jeu répété deux fois ?

. Si $s_2 = s_2$^^ le joueur 1 à intérêt à se conformer à s_1^^ pour $t = 2$ puisque pour chaque sous jeu s_1^^ lui indique l'action qui est une meilleurre réponse à celle du joueur 2.

.En $t = 1$ le joueur 1 a-t-il intérêt à se conformer à joueur s_1^^?

Si la réponse est oui on a bien un équilibre de Nash.

Matrice de la somme des paiements actualisés avec des actions de seconde période conforme à $(s_1{}^\wedge{}^2_{,s}{}^\wedge)$ en fonction des actions de 1ère période.

	P_2	Q_2	R_2	S_2
P_1	$2+2\delta, 2+2\delta$	$5+0\delta, 0+3\delta$	$-1+2\delta, 0+2\delta$	$0+2\delta, 0+2\delta$
Q_1	$0+3\delta, 5+0\delta$	$4+2\delta, 4+2\delta$	$-1+3\delta, 0+0\delta$	$0+3\delta, 0+2\delta$
R_1	$0+2\delta, 0+2\delta$	$0+0\delta, 0+3\delta$	$0+2\delta, 3+2\delta$	$0+2\delta, 0+2\delta$
S_1	$0+2\delta, -1+2\delta$	$0+0\delta, -1+3\delta$	$-1+2\delta, -1+2\delta$	$3+2\delta, 0+2\delta$

Analyse de la case entourée en rouge :

En t_1 le joueur 1 joue P_1 et le joueur 2 joue Q_2

$$J_1 \to 5 \quad J_2 \to 0$$

Que se passe-t-il en période 2 ? Le joueur 1 a dévié en 1ère période.

Dans ce cas ils jouent R_i

$$J_1 \to 0 \qquad J_2 \to 3$$

Mais vu que c'est en 2ème période je dois actualiser. J'ai donc le paiement actualisé en 1ère période, genre ce qu'il se passe plus ce qu'il va se passer.

(Les joueurs connaissent toutes les stratégies donc ils savent qu'ils vont se faire punir s'ils dévient .)

Est-ce que le joueur 1 à intérêt à jouer $\widehat{s_1},$ sachant que le joueur 2 joue $\widehat{s_2},$?

Si il joue Q_1 il obtient $4 + 2\delta$ et si il joue P1 il gagne $5 + 0\delta$; ça va donc épendre du δ

.$\widehat{s_1}$ est une meilleure réponse à $\widehat{s_2}$ si et seulement si Q_1 est une meilleure réponse de 1ère période à Q_2

.C'est à dire $4 + 2\delta \geq 5 + 0\delta \leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{2}$

. De même pour le joueur 2.

C) Jeux répétés à horizon infini.

Introduction :

Ce résultat n'est plus vérifié si $T = \infty$ /

Dilemme du prisonnier :

Jouer les stratégies avoué à chaque période quelle que soit l'histoire du jeu est encore un équilibre de Nash parfait pour δ suffisamment grand.

Mais il existe d'autres équilibres parfaits.

Stratégie de déclic :

.Considérons par exemple les stratégies suivantes, appelées stratégies de déclic ou de punition/trigger

A chaque période$t$, un joueur coopère (c'est à dire n'avoue pas) si et seulement si les deux joueurs ont toujours coopéré entre les périodes t et $t-1$ (exemple de stratégie ?

On suppose qu'à la période 1, les deux joueurs coopèrent.

Ces stratégies constituent-elles un équilibre de Nash ?

	D	C
D	-2,-2	3,-3
C	-3,3	2,2

En $t = 1$ ils jouent (C, C), pareil en $t = 2$ et en $t = 3$

Paiements pour chaque joueur : $2 + 2\delta + 2\delta^2$

-Si les deux joueurs ne cessent jamais de coopérer, l'utilité de chacun est :

$$2(1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots) = \frac{2}{1-\delta}$$

-Si à la période t un individu cesse de coopérer, son utilité est :

S'il dévie une fois, l'autre va lui aussi dévier et ils vont tous les deux gagner -2

$$3 - 2(\delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots) = 3 - \frac{2\delta}{1-\delta}$$

-Il est rationnel de coopérer si (utilité plus élevé) :

$$\frac{2}{1-\delta} \geq 3 - \frac{2\delta}{1-\delta}$$

$$\delta \geq \frac{1}{5}$$

La stratégie de déclic sera un équilibre de Nash si $\delta \geq \frac{1}{5}$

L'interprétation de ce résultat est le suivant :

-Lorsque le jeu est répété, la coopération devient possible car il se peut qu'en ne coopérant pas, les joueurs aient moins à gagner à court terme qu'à perdre à long terme.

-C'est le cas si les joueurs sont suffisamment patients, c'est à dire quand δ est suffisement proche de 1

Stratégies plus générales :

-Un joueur qui choisit D est puni pendant k périodes

-La stratégie de déclic correspond à $k = +\infty$

-Si le joueur 1 adopte cette stratégie, le joueur 2 t-il intérêt à faire de même ?

Différence : Je ne punie plus jusqu'à l'infini

.Si le joueur 2 peut augmenter son utilité en déviant de la coopération, il peut le faire dès $t = 1$

.Lorsque le joueur 2 choisit D en $t = 1$, le joueur 1 le punit en choisissant D pendant k périodes, quoi que fasse le joueur 2 durant ces k périodes.

.Il est donc rationnel pour le joueur 2 de choisir D durant ces k périodes.

.En $t = k + 2,$ le joueur 1 revient à C quel qu'ait été le choix du joueur 2 en $t = k + 1$

.Le joueur 2 se retrouve donc dans la même situation qu'en $t = 1$.

.Donc il a intérêt à dévier en $t = 1$ si cela augmente son utilité escomptée durant ces $k + 1$ périodes.

Je m'intéresse aux $k + 1$ *premières périodes.*

.Si le joueur 2 ne dévie pas de la coopération, son utilité escomptée est :

$$2 + 2\delta + 2\delta^2 + \cdots + 2\delta^k = \frac{2(1 - \delta^{k+1})}{1 - \delta}$$

.S'il dévie, son utilité escomptée est :

$$3 - 2\delta - 2\delta^2 - \cdots - 2\delta^k = 3 - \frac{2\delta(1 - \delta^k)}{1 - \delta}$$

.Le joueur 2 n'a pas intérêt à dévier si :

$$\frac{2(1 - \delta^{k+1})}{1 - \delta} \geq 3 - \frac{2(1 - \delta^k)}{1 - \delta}$$

Ou encore en simplifié :

$$-4\delta^{k+1} + 5\delta - 1 \geq 0$$

Pour $k = +\infty$ $\delta^{k+1} = 0$ puisque $0 < \delta < 1$

On retrouve donc bien en passant à la limite que les stratégies de déclic sont un équilibre de Nash si $\delta \geq \frac{1}{5}$ mais l'expression donne aussi une borne sur δ pour $k < \infty$.

Par exemple, si $k = 1, \delta \geq \frac{1}{4}$

Stratégie de donnant-donnant :

Elle consiste à coopérer à la première période, puis à jouer ce que l'autre joueur a joué à la période précédente.

Supposons que le joueur 1 joue cette stratégie mais que le joueur 2 en dévie, en choisissant D en $t = 1$

Le joueur 1 choisit alors D en $t = 2$

Ensuite, il choisira D tant que le joueur 2 jouera D.

Le joueur 1 reviendra à C à la période t si le joueur 2 est revenu à C à la période $t - 1$

Après sa déviation, le joueur 2 a deux options :

-Il peut revenir à C, auquel cas à la période suivante il se retrouvera dans la même situation qu'à la première période

-Il peut aussi continuer indéfiniment à jouer D.

S'il alterne entre C & D, son profil d'utilités est $(+3; -3; +3; -3 \dots)$

L'utilité escomptée est :

$$3 - 3\delta + 3\delta^2 - 3\delta^3 \dots = \frac{3}{1+\delta}$$

S'il dévie une fois puis joue indéfiniment D, son profil d'utilités est $(+3; -2; -2; -2; \dots)$

L'utilité escomptée est :

$$3 - 2\delta - 2\delta^2 - \cdots = 3 - \frac{2\delta}{1-\delta}$$

Le profil d'utilité de la stratégie donnant donnant est $(2; 2; 2)$. L'utilité escomptée est :

$$2 + 2\delta + 2\delta^2 + \cdots = \frac{2}{1-\delta}$$

Le profil de stratégies donnant-donnant est un équilibre de Nash si :

$$\frac{2}{1-\delta} \geq \frac{3}{1+\delta}$$

Et

$$\frac{2}{1-\delta} \geq 3 - \frac{2\delta}{1-\delta}$$

C'est-à-dire $\delta \geq \frac{1}{5}$

Rappels :

Suite géométrique→

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k=0}^{t} \delta^k = \frac{1-\delta^{t+1}}{1-\delta} = \frac{1}{1-\delta} \qquad \delta^{t+1} \to 0$$

Les stratégies de déclic constituent, elles aussi, un équilibre de Nash parfait.
On distingue deux types de sous jeux à l'étape t : ceux qui font suite à une histoire dans laquelle les joueurs ont choisi (C, C) à chaque étape $1, \dots, t-1$ et les autres

Dans les premiers, les stratégies de déclic prévoient de jouer exactement comme dans le jeu commençant en $t = 1 \rightarrow EN$

Dans les seconds, les stratégies de déclic reviennent à jouer (D, D) à chaque étape $t, t+1, \dots \rightarrow EN$

Le comportement dans un sous jeu d'un joueur qui joue la stratégie donnant-donnant dépend du dernier résultat de l'histoire du jeu qui peut être $(C, C), (C, D), (D, C)$ ou (D, D)
Stratégies donnant- donnant forment un équilibre de Nash d'un sous jeu qui suit (C, C) si $\delta \geq \frac{1}{5}$
Le raisonnement est identique à celui qui montre qu'elles constituent un équilibre de Nash de l'ensemble du jeu.

Supposons que dans un sous jeu qui suit(C, D), le joueur 2 joue donnant-donnant.
Si le joueur 1 joue donnant-donnant alors les résultats sont (D, C) & (C, D) en alternance.
L'utilité escomptée du joueur 1 dans ce sous jeu est :

$$3 - 3\delta + 3\delta^2 - 3\delta^3 + \cdots = \frac{3}{1+\delta}$$

Si le joueur 1 dévie de donnant-donnant à la première période du sous jeu en jouant C puis revient à donnant-donnant dans la suite du sous jeu, le résultat est (C, C) à chaque période du sous jeu.
L'utilité escomptée du joueur 1 est alors :

$$\frac{2}{1-\delta}$$

Donnant-donnant est une meilleure réponse du joueur 1 dans le sous jeu si :

$$\frac{3}{1+\delta} \geq \frac{2}{1-\delta}$$

C'est à dire si $\delta \leq \frac{1}{5}$

On en conclut que les stratégies de donnant-donnant ne sont pas un équilibre de Nash parfait.

Remarque :
On peut poursuivre le raisonnement précédent pour établir que les stratégies donnant-donnant sont un En parfait si δ est exactement égal à $1/5$
Dans un sous jeu suivant(D, C), si les joueurs jouent donnant-donnant les résultats sont (C, D) et (D, C) en alternance.
Cela procure au joueur 1 une utilité escomptée de :

$$-3 + 3\delta - 3\delta^2 - \cdots = -\frac{3}{1+\delta}$$

Si le joueur 1 dévie en jouant D à la première période puis revient en) donnant (donnant, le résultat est (D, D) à chaque période, ce qui donne au joueur 1 une utilité escomptée de :

$$-2 + (-2\delta) + \cdots = -\frac{2}{1-\delta}$$

Donnant-donnant est une meilleure réponse si :

$$-\frac{3}{1+\delta} \geq -\frac{2}{1-\delta}$$
$$\text{Ou } \delta \geq \frac{1}{5}$$

Enfin, dans un sous jeu qui suit (D, D) le résultat est (D, D) indéfiniement si les deux joueurs jouent donnant-donnant, ce qui procure une utilité escomptée de :

$$-2 - 2\delta - 2\delta^2 = -\frac{2}{1-\delta}$$

Si le joueur 1 dévie en jouant C à la première période du sous jeu puis revient à donnant-donnant, les résultats sont (C, D) & (D, C) en alternance, ce qui procure au joueur 1 une utilité escomptée de :

$$-3 + 3\delta - 3\delta^2 + 3\delta^3 \ldots = -\frac{3}{1+\delta}$$

Si $\delta = \frac{1}{5}$ la stratégie donnant-donnant (est un équilibre de Nash de ce jeu répété infinie

Prof :

Les exemples qu'on vient de faire illustrent que les équilibres parfait d'un jeu infiniment répété sont d'une autre nature que les équilibre d'un jeu en une seule étape. Pour le dilemme du prisonnier en une étape, le seul équilibre de Nash possible était de ne pas coopérer alors que pour le jeu infiniment répété la coopération devient possible. Ce résultat peut être généralisé à une très grande classe de jeu et également de nombreux comportement dans ces jeux.

Proposition :

« Folk Théorème » : Soit un jeu J à n joueurs et $(e_1; \ldots; e_n)$ un profil d'utilités correspondant à un équilibre de Nash de J ; sot $(u_1; \ldots; u_n)$ un profil d'utilités réalisables dans J (c'est à dire associé à un profil de stratégies pures dans J, ou plus généralement, à une distribution de probabilitéssur des profils de stratégies pures dans J).

Si $u_i > e_i$ pour chaque joueur i, il existe un équilibre de Nash parfait de la répétition infinie de J avec un facteur d'escompte suffisammment grand qui donne le paiement $\frac{1}{1-\delta} u_i$ au joueur i, $i = 1, \ldots, n$ (c'est à dire l'utilité actualisée correspond à la suite d'utilités $(u_i; u_i; \ldots; u_i; \ldots)$: $u_i + \delta u_i + \delta^2 u_i + \cdots = \frac{1}{1-\delta} u_i$

Chapitre 4 : Jeux coopératifs : Introduction.

I. Principes et exemples.

Introduction :

Les jeux coopératifs s'intéressent à des jeux qui vont mettre en présence plusieurs joueurs, dont chaque regroupement sous forme de coalition est accompagné d'un gain collectif

Le résultat collectif est donc obtenu comme « somme » des décisions individuelles (ou consentement à adhérer à une coalition).

Chaque individu souhaite que ce résultat soit le meilleur pour lui-même.

Les jeux coopératifs se distinguent des jeux non coopératifs par le fait que les gains résultent des actions concertées et contraignantes entre les joueurs et aussi par le fait que le gain est prévu pour toute la coalition et non par joueurs.

A) Exemples.

Exemple 1 :

Deux villes voisines 1 & 2 peuvent s'approvisionner en eau de manière indépendante (avec des couts respectifs de 11 & 7) ou conjointe (avec un cout global de 15).

Le problème qui se pose alors est de savoir si les villes s'associent ou non pour réaliser ce projet. Et en cas de regroupement, comment sont-elles répartir les couts ?

Trois sociétés 1, 2 & 3 d'un même secteur économique peuvent travailler individuellement ou en s'associant.

Une étude sur les bénéfices de ces sociétés donne les résultats suivants :

$b(1) = 10, b(2) = 5, b(3) = 4, b(12) = 15, b(13) = 11 \; et \; b(123) = 21; b(S)$ Étant obtenu par la coalition S lorsqu'elle se forme.

Quel regroupement de ces sociétés est-il raisonnable ou acceptable ? Comment partager le bénéfice conjoint entre les sociétés en cas de regroupement ?

1ère remarque :

Quand on se regroupe, le gain associé n'est pas forcément égal à la somme de vos gains individuels.

Exemple 3 :

Pour lutter contre la grande dépression de 1929, le gouvernement des Etats Unis a organisé une politique de grands travaux

Dans ce cadre est créé en 1930 la « Tennessee Valley Authority » qui a pour but l'aménagement de la vallée du fleuve Tennessee pour :

-améliorer la navigation dans le fleuve.

-contrôler le débit d'eau.

-produire l'énergie électrique.

Les financements de chaque projet sont indépendants mais les projets peuvent être réalisés en commun. L'estimation des coûts (en millions de $) des projets était la suivante :

$$c(1) = 163\,520, \quad c(2) = 140\,826, \quad c(3) = 250\,096, \quad c(12) = 301\,607, \quad c(13) = 378\,821,$$
$$c(13) = 367\,370\,, \quad c(123) = 419\,584$$
$$\sum c(i) = 554\,442$$
$$c(12) + c(3) = 551\,703$$

Exemple 4 :

Quatre fabricants d'avions 1, 2, 3 & 4 ont besoin pour leurs produits des pistes de longueurs respectives en kilomètres : $l(1) = 1,\ \ l(2) = 1{,}5,\ \ l(3) = 3\ \ et\ l(4) = 5$

Les couts pour la construction d'un aéroport pour chaque type d'avion (en millions d'euros) est :

$$c(1) = 163, c(2) = 186, c(3) = 250, \quad \& \, c(4) = 300$$

Les fabricants ont-ils intérêt à construire un aéroport commun ? Si oui comment doivent-ils répartir les couts ?

B) Cadre général.

A) Comment doivent se regrouper les joueurs (formations des coalitions) ?

B) Comment les joueurs doivent-ils partager leur gain commun (répartition des gains) ?

Notion de solution :

Toute réponse à ce problème complexe est appelée notion de solution.

Notons que le regroupement des joueurs (solution de A) dépend du gain espéré par chaque joueur dans ce regroupement (solution de B).

De même le gain obtenu par un joueur (solution B) dépend du regroupement retenu par les joueurs (solution de A).

Problème plus simple : Une partition B étant fixée, quelle(s) répartition(s) de gain va (vont) être adoptée(s) par les joueurs lorsqu'ils sont regroupés suivant B.

C) Définitions.

Coalitions :

$N = \{1,2, \dots n\}$: Ensemble des joueurs N

Une coalition est un sous ensemble $SCN = \{1, \dots n\}, S \neq 0$ de l'ensemble de tous les joueurs ($2^n - 1$ coalitions sont possibles)

$S = \{i\}$: Coalition d'un seul joueur (singleton)

$S = N$: Coalition de tous les joueurs (grandes coaltion)

$$3 = \left\{ \begin{array}{c} \{1\},\{2\},\{3] \\ \{1,2\}\{2,3\}\{1,3\} \\ \{123\} \end{array} \right.$$

Utilité transférable :

Hypothèse transférable (« TU Games ») : On peut additionner les utilités des joueurs d'une coalition et les redistribuer (sans restriction) = ses membres. (Il existe une « monnaie » commune à tous avec laquelle on peut effectuer des transferts).

Jeu sous forme caractéristique :

On appelle jeu sous forme caractéristique à utilité transférable (ou TU-Game), tout couple (N, u) où N est un ensemble non vide et v une application qui associé à chaque coalition S un nombre réel noté $v(S)$ appelé gain (ou perte) des membres de S lorsque S se forme. On conviendra de poser$v(\emptyset) = 0$.

Un jeu est :

i) Symétrique si la valeur d'une coalition ne dépend que de sa taille : Il existe une fonction f telle que $v(S) = f(S)$ pour tout $S \underline{C} N$

ii) Monotone si : $S \underline{C} T \rightarrow v(S) \leq v(T)$

iii) Sur-additif si : $\forall S, T \in 2^N \;\; [S \cap T = \emptyset \rightarrow v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)]$

iv) Sous-additif si : $\forall S, T \in 2^N \;\; [S \cap T = \emptyset \rightarrow v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)]$

v) Additif si : $\forall S, T \in 2^N \;\; [S \cap T = \emptyset \rightarrow v(S \cup T) = v(S) + v(T)]$

D) Jeux simples.

Définition :

Un jeu coalitionnel (N, v) est simple si $v(S) = 1$ (coalition gagnante) ou $u(S) = 0$ coalition perdante et $v(N) = 1$

Remarque :

D'après la sur additivité si $v(S) = 1$ alors $V(N/S) = 0$ et $v(T) = 1$ pour $S \underline{C} T$

Définition :

i) Un joueur j a un droit de véto s'il appartient à toutes les coalitions gagnantes $(v(s) = 1 \rightarrow j \in S)$

Exemple de 3 joueurs : Majorité simple.

Une coalition est gagnante si et seulement si elle comprend au moins 2 membres.

$$\begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(12) = v(13) = v(23) = v(123) = 1 \end{cases}$$

Exemple de 3 joueurs : Unanimité.

Une coalition est gagnante si et seulement si elle comprend tous les membres :

$$\begin{cases} v(123) = 1 \\ v(S) = 0 \; Pour \; les \; autres \; coalitions. \end{cases}$$

Ici tous les joueurs ont un droit de véto.

Exemple de 3 joueurs : Où 1 seul à un droit de véto.

Une coalition est gagnante si et seulement si elle comprend au moins 2 membres, dont le joueur 2 a un droit de véto.

$$\begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(12) = v(23) = v(123) = 1 \; et \; non \; v(13) \end{cases}$$

Exemple à 3 joueurs : Dictature.

Une coalition est gagnante si et seulement si elle comprend le joueur 2.

$$\begin{cases} v(1) = v(2) = v(13) = 0 \\ v(2) = v(12) = v(23) = v(123) = 1 \end{cases}$$

II. Concept de solution : La valeur de Shapley.

Introduction :

Solution classique d'un jeu coopératif à utilité transférable à n joueurs.

La valeur de Shapley (1953) est un concept de solution (existence et unicité) vérifiant certaines propriétés (axiomes). Concept de solution adapté aux problèmes de partage de ressources ou de répartition des couts (télécommunications, copropriété).

Définition :

On appelle solution des jeux sous forme caractéristique (= a utilité transférable) toute application φ qui à tout jeu sous forme caractéristique (N, v) associe un vecteur réel de dimension N $\varphi(N, v) \in R^N$

$\varphi(N, v) = \left(\varphi_i(N, v)\right) i \in N$

Ce vecteur peut être vu comme une distribution des paiements entre tous individus.

A) Axiomes.

1. Axiome 1 : Efficience (EFF)

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(N,v) = v(N)$$

2. Axiome 2 : Symétrie (SYM)

Si i et j sont symétriques (substituts), ie, $U(SU\{i\}) = v(SU\{j\})\ \forall\ S\backslash i,j$

Alors $\varphi_i(N,v) = \varphi_j(N,v)$

3. Axiome 3 : Axiome du joueur nul (NUL).

Si c'est nul, i-e, $U(SU\{i\})\forall S\backslash i,j$ alors $\varphi_i(N,v) = \varphi_j(N,v)$

4. Axiome 4 : Linéarité (LIN)

Soit deux jeux $(v\ et\ w)$, on définit$(v+w)(s) = U(S) + w(S)$. Alors$\varphi(N,v+w) = \varphi(N,v) + \varphi(N,w)$.

Théorème de Shapley :

Il existe une et une seule solution φ satisfaisant les 4 axiomes. Elle se calcule explicitement :

$$\varphi(N,v) = \sum\nolimits_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(s-1)!\,(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S\backslash i)]$$

Avec $s = |S|$ Nombre de personnes dans les coalitions.

$\varphi_i(N,v)$ Est une somme pondérée des contributions marginales du joueur i à chaque coalition.

Contribution marginale moyenne attribuée à chaque joueur lorsqu'on suppose que les joueurs sont ordonnés au hasard.

$[U(S) - U(S\backslash i)]$ C'est ce qu'apporte ce joueur à une coalition. Comment le mesurer ?

On regarde ce que le joueur apporte moins ce qu'apporte le non présence de ce joueur.

Chaque coalition n'a pas le même poids dans le jeu. Donc lorsque je regarde ce qu'apporte quelque chose à la coalition, je dois le pondérer à la coalition.

Exemple 1 :

1) Majorité simple/unanimité :

$$EFF + SYM \Rightarrow \varphi_1(N,v) = \varphi_2(N,v) = \varphi_3(N,v) = \frac{1}{3}$$

$$EFF\colon \sum y_i = v(N) = 1 \quad SYM\colon Chaque\ joueur\ apporte\ la\ même\ chose$$

2) Dictature / joueur 2.

$$EFF + NUL \Rightarrow \varphi_1(N,v) = \varphi_3(N,v) = 0\ et\ \varphi_2(N,v) = 1$$

$$\sum \varphi_i = 1 \quad NUL = 1\ \&\ 3\ nul$$

Exemple 2 :

1) Droit de véto du joueur 2 :

$$EFF + SYM \Rightarrow \varphi_1(N,v) = \varphi_3(N,v) = \frac{1-\varphi_2(N,v)}{2}$$
$$EFF: pareil\ SYM: 1\ \&\ 3\ apportent\ la\ même\ chose$$

Calculons la valeur de Shapley du J2 :

Coalition du j2 : $\{2\}, \{2,1\}\{1,2,3\}\{2,3\}$

$$\varphi_2(N,v) = [U(2)] + [U(2,1] - U(1)] + [U(1,2,3) - U(1,3)] + [U(2,3) - U(3)]$$

Maintenant il faut pondérer :

$$* \frac{(2-1)!\,(3-2)!}{3!}[U(1,2 - U(1)] = \frac{1}{6}[U(12) - U(1)]$$
$$* \frac{1}{6}[U(2,3) - U(3,1)]$$
$$* \frac{(3-1)!\,(3-3)!}{3!}[U(1,2,3) - U(1,3)] = \frac{2}{6}[U(1,2,3) - U(1,3)]$$

Valeur de Shapley :

$$\varphi_2 = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{2}{6} \times 1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Pour les autres joueurs : $\frac{1-\varphi_2}{2} = \frac{1}{6}$

$$Donc\ U(N,v) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

B) Shapley dans les jeux simples :

Présentation :

A l' origine, la valeur de Shapley [1953] est un concept de théorie des jeux sous forme de fonction caractéristiques.

Shapley et Shubik ont considéré son application à la classe des jeux simples et l'on proposé comme une mesure de pouvoir à priori dans un processus de vote.