Deuxième partie

Les jeux non-coopératifs avec information complète

3. Équilibre de Nash (1951)

John Nash a généralisé le concept d'équilibre de Cournot (1). L'idée de l'équilibre de Nash est extrêmement simple en soi et cohérent avec l'essence des jeux non-coopératifs. Les jeux non-coopératifs correspondent à des situations d'interactions entre individus libres dans leurs choix et poursuivant des objectifs propres et indépendants. Ces individus ne communiquent pas avant le jeu et n'ont pas nécessairement le moyen de s'engager à poursuivre une stratégie particulière. Dans ce contexte, l'équilibre de Nash cherche les résultats qui sont *stables* par rapport aux déviations individuelles, donc unilatérales. L'absence de communication implique une absence de coordination explicite et des déviations multilatérales.

Un équilibre de Nash (EN) est donc un résultat dont aucun joueur n'a envie de dévier unilatéralement, étant données les stratégies jouées par les autres joueurs.

Concepts clés étudiés : Ce chapitre est consacré à l'équilibre de Nash :

- l'équilibre de Nash ;
- les fonctions de meilleures réponses ;
- l'efficacité et domination au sens de Pareto ;
- le problème de la multiplicité des équilibres ;
- les points focaux dans un jeu ;
- l'équilibre corrélé.

1. Pour un exposé simplifié du duopole de Cournot, voir http://beagle.u-bordeaux4.fr/yildi/micro2web/node33.html.

Définition 3.1

Un profil $p^* = \left(p_1^*, \ldots, p_n^*\right)$ $\left(p_i^* \in P_i, i = 1...n\right)$ est ***un équilibre de Nash*** si aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie p_i^* quand les autres joueurs continuent à jouer le profil p_{-i}^*. Par conséquent nous devons avoir

$$u_i\left(p_i^*, p_{-i}^*\right) \geqslant u_i\left(p_i, p_{-i}^*\right), \quad \forall p_i \in P_i, \quad \forall i = 1 \ldots n. \tag{3.1}$$

p^* est un ***équilibre de Nash strict*** si $u_i\left(p_i^*, p_{-i}^*\right) > u_i\left(p_i, p_{-i}^*\right), \quad \forall p_i \in P_i, \quad \forall i = 1 \ldots n.$

Si l'équilibre de Nash est strict, en dévier doit avoir un coût pour les joueurs.

Pour tester si un résultat p est un équilibre de Nash, nous devons vérifier si un des joueurs au moins n'a pas intérêt à choisir une autre stratégie. Si ce n'est pas le cas alors p est un équilibre de Nash. Reprenons l'exemple du dilemme du prisonnier (tableau 3.1).

Tableau 3.1 Dilemme du prisonnier (reprise).

		Clyde	
		N	D
Bonnie	N	$(-1, -1)$	$(-10, 0)$
	D	$(0, -10)$	$(-8, -8)$

(N, N) n'est pas un équilibre de Nash car

$$u_2(N, N) = -1 < 0 = u_2(N, D)$$

et donc Clyde choisira de jouer D au lieu de N.

Nous savons déjà que (D, D) est une solution qui apparaît après l'élimination des stratégies dominées. Cela implique qu'aucun joueur n'a intérêt à dévier de D quel que soit le choix de l'autre et donc, en particulier, si l'autre choisit D. Par conséquent, c'est aussi un équilibre de Nash :

$$u_1(D, D) = -8 > -10 = u_1(N, D)$$
$$u_2(D, D) = -8 > -10 = u_2(D, N)$$

Donc ni Bonnie, ni Clyde n'ont intérêt à dévier de D si l'autre joue D. Qu'en est-il des stratégies mixtes ?

Notons les stratégies mixtes des deux joueurs par $p_1 = (q, 1-q)$ et $p_2 = (t, 1-t)$ avec $q, t \in [0, 1]$. q est la fréquence du choix de la stratégie N par Bonnie et t est la fréquence du choix de N par Clyde. L'équilibre que nous venons de calculer correspond donc aux stratégies mixtes : $p_1^* = (0, 1)$ et $p_2^* = (0, 1)$ où Bonnie et Clyde choisissent toujours D. Nous pouvons représenter les stratégies mixtes des joueurs dans la forme normale du jeu pour faciliter leur compréhension (voir le tableau 3.2).

Tableau 3.2 Dilemme du prisonnier et stratégies mixtes.

			Clyde	
			t	$1-t$
			N	D
Bonnie	q	N	$(-1,-1)$	$(-10,0)$
	$1-q$	D	$(0,-10)$	$(-8,-8)$

Peut-il y avoir d'autres équilibres en stratégies mixtes ? Étant donné que les stratégies mixtes (et donc les évènements correspondant au choix de D ou de N), sont indépendantes entre les deux joueurs, nous pouvons calculer la probabilité jointe de réalisation de chaque profil de stratégies (voir tableau 3.3).

Tableau 3.3 Probabilités jointes des profils de stratégies.

			Clyde	
			t	$1-t$
			N	D
Bonnie	q	N	$q \times t$	$q \times (1-t)$
	$1-q$	D	$(1-q) \times t$	$(1-q) \times (1-t)$

Les gains espérés des deux joueurs sont alors donnés :

$$\begin{aligned} U_i\left(p_1, p_2\right) &\equiv Eu_i\left(p_1, p_2\right) \equiv Eu_i\left(q, t\right) \\ &= qtu_i\left(N, N\right) + q\left(1-t\right) u_i\left(N, D\right) \\ &\quad + \left(1-q\right) tu_i\left(D, N\right) + \left(1-q\right)\left(1-t\right) u_i\left(D, D\right) \\ U_i\left(0, 0\right) &= u_i\left(D, D\right) \end{aligned}$$

Avec les valeurs numériques, le gain espéré du joueur 1 devient :

$$\begin{aligned} U_1\left(q, t\right) &= qt\left(-1\right) + q\left(1-t\right)\left(-10\right) + \left(1-q\right) t\left(0\right) \\ &\quad + \left(1-q\right)\left(1-t\right)\left(-8\right) \\ &= q\left(t-2\right) + 8\left(t-1\right) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{dU_1}{dq} = t - 2 < 0 \Rightarrow q^* = 0$$

Le même raisonnement pour le second joueur implique $t^* = 0$.

Le seul équilibre de Nash est donc $p^* = (0, 0)$. Cela n'est pas surprenant dans la mesure où la stratégie pure N est dominée par D et donc toute stratégie mixte qui accorderait un poids strictement positif ($q > 0$) à N ferait moins bien que la stratégie pure D.

→ *Remarque 3.1*

Vérifiez que le Jeu de l'entrée II possède bien trois équilibres de Nash en stratégies pures : $((N, P), A) \to (0, 100)$, $((N, N), A) \to (0, 100)$ et $((I, P), N) \to (50, 60)$.

Il est en fait possible de déterminer l'équilibre de Nash de manière plus constructive, en utilisant les fonctions de meilleures réponses (ou fonctions de réaction) des joueurs.

I. Fonctions de meilleures réponses et équilibre de Nash

Étant données la structure du jeu et donc celle des gains, nous pouvons déterminer les stratégies du joueur i qui correspondent à la plus grande satisfaction pour lui face à tout profil p_{-i}. Alors ces stratégies correspondent à la meilleure situation que i peut obtenir face à p_{-i}. Le concept de meilleure réponse généralise cette idée.

Définition 3.2

Dans un jeu à n joueurs, ***la fonction de meilleure réponse*** du joueur i, $R_i(p_{-i})$ associe, à chaque combinaison de stratégies des autres joueurs p_{-i}, la stratégie du joueur i qui maximise son gain :

$$u_i(R_i(p_{-i}), p_{-i}) \geqslant u_i(p_i, p_{-i}), \quad \forall p_i \in P_i, p_{-i} \in P_{-i}.$$

A. Meilleures réponses avec stratégies pures

Construisons la fonction de meilleure réponse en stratégies pures de Bonnie et de Clyde dans le jeu initial de Dilemme du Prisonnier (voir tableau 3.4, page ci-contre).

Par commodité pédagogique, nous résumons les meilleures réponses des joueurs dans le tableau 3.5, page ci-contre.

Dans la colonne concernant Bonnie, $N \to D$ signifie que la meilleure réponse de Bonnie à la stratégie N de Clyde est de jouer D. Cela provient

Tableau 3.4

		Clyde	
		N	D
Bonnie	N	$(-1, -1)$	$(-10, 0)$
	D	$(0, -10)$	$(-8, -8)$

Tableau 3.5 Meilleures réponses : caractérisation.

Bonnie $-$ $R_1\,(s_2)$	***Clyde*** $-$ $R_2\,(s_1)$
$N \to D$	$N \to D$
$D \to D$	$D \to D$

du fait que $u_1\,(D, N) = 0 > -1 = u_1\,(N, N)$ comme on l'observe dans la colonne N de la matrice du jeu.

Une manière encore plus simple de visualiser les meilleures réponses de chaque joueur est de les représenter dans la matrice du jeu. Représentons dans la matrice initiale, la fonction de réaction de Bonnie par des carrés $(\square)$ et celle de Clyde par des étoiles ($\ast$). Cela nous donne le tableau 3.6.

Tableau 3.6 Meilleures réponses : représentation.

		Clyde	
		N	D
Bonnie	N		$\ast$
	D	$\square$	$\boxed{\ast}$

Cette analyse nous montre que face au choix de D par un joueur, l'autre ne peut rien faire de mieux que choisir D. Donc (D, D) est l'équilibre de Nash et il correspond à l'intersection des deux courbes de réaction.

De la même manière, construisons la fonction de meilleure réponse en stratégies pures de Paul et de Jacqueline dans le jeu initial de la Bataille des Sexes :

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	$(2, 1)$	$(0, 0)$
	F	$(0, 0)$	$(1, 2)$

En suivant la même démarche que pour le Dilemme du prisonnier nous obtenons les tableaux 3.7 et 3.8.

Tableau 3.7 Meilleures réponses : caractérisation.

***Paul* $-$ *R*$_1$ (s_2)**	***Jacqueline* $-$ *R*$_2$ (s_1)**
$O \to O$	$O \to O$
$F \to F$	$F \to F$

Représentons dans la matrice initiale, la fonction de réaction de Paul par des carrés et celle de Jacqueline par des étoiles (tableau 3.8).

Tableau 3.8 Meilleures réponses : représentation.

		Jacqueline O	**Jacqueline** F
Paul	O	$\boxed{\ast}$	
Paul	F		$\boxed{\ast}$

L'intersection des deux courbes de réaction correspond aux deux résultats (O, O) et (F, F) et ce sont bien les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu. De manière plus générale :

Proposition 3.1. *Si s^* est un équilibre de Nash, $s_i^* = R_i\left(s_{-i}^*\right), \quad \forall i = 1...n.$*

Preuve. Par définition, $R_i\left(s_{-i}^*\right)$ maximise $u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$, pour tout joueur i. Par conséquent, aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie s_i^*. ❑

Dans un duopole de Cournot, les fonctions de réactions sont les fonctions de meilleures réponses des firmes dans un jeu où les stratégies sont des quantités produites. L'équilibre de Cournot (et de Nash) correspond à l'intersection des courbes de réaction où chaque firme produit de manière à maximiser son profit étant donnée le niveau de production de son concurrent. La recherche de l'équilibre de Nash est donc équivalente à la recherche d'un point d'intersection entre les fonctions de meilleures réponses de tous les joueurs.

B. Meilleures réponses avec stratégies mixtes

La prise en compte des stratégies mixtes pourrait faire apparaître d'autres possibilités de meilleure réponse. Pour observer cela, reprenons la Bataille des sexes. Notons les stratégies mixtes des deux joueurs par $p_1 = (q, 1 - q)$ et $p_2 = (t, 1 - t)$ avec $q, t \in [0, 1]$. Nous obtenons alors le tableau 3.9, page ci-contre.

Tableau 3.9 Bataille des sexes et stratégies mixtes.

			Jacqueline	
			t	$1-t$
			O	F
Paul	q	O	$(2, 1)$	$(0, 0)$
	$1-q$	F	$(0, 0)$	$(1, 2)$

Comparons alors l'espérance d'utilité de Paul pour ses deux stratégies pures :

$$O \ : U_1 \left(p_1, p_2\right) = Eu_1 \left(p_1, p_2\right) = 2t + 0 \left(1 - t\right) = 2t$$
$$F \ : U_1 \left(p_1, p_2\right) = Eu_1 \left(p_1, p_2\right) = 0t + 1 \left(1 - t\right) = 1 - t$$

Face à la stratégie mixte p_2 de Jacqueline, Paul choisira O si :

$$2t > 1 - t \Rightarrow t > \frac{1}{3}\cdot$$

Paul choisira tout le temps d'aller à l'Opéra ($q = 1$) si Jacqueline va à l'Opéra plus d'une soirée sur trois ($t > 1/3$). Il choisira tout le temps d'aller au Foot ($q = 0$) si Jacqueline va au Foot plus de deux soirées sur trois ($t < 1/3 \Rightarrow \ 1 - t > 2/3$). Si $t = 1/3$, Paul est indifférent entre aller l'Opéra et Foot. En fait, dans ce cas, toute combinaison de ces stratégies est équivalente pour lui.

Ce dernier point correspond à un principe général qui est souvent utile :

Lemme 3.1. *Un joueur qui maximise son utilité en utilisant une stratégie mixte sera nécessairement indifférent entre toutes les stratégies pures auxquelles la stratégie mixte attribue une probabilité strictement positive. Si cette indifférence n'était pas vérifiée, une stratégie qui donne une probabilité nulle à la stratégie pure la moins préférée serait meilleure.*

Preuve. Voir Osborne & Rubinstein(1994), p. 33–34. ❑

Par conséquent, sa fonction de meilleure réponse est :

$$R_1 \left(t\right) = q^* \left(t\right) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \ t > 1/3 \\ [0, 1] & \text{Si } \ t = 1/3 \\ 0 & \text{Si } \ t < 1/3. \end{cases}$$

De même pour Jacqueline, nous avons :

$$O \ : U_2 \left(p_1, p_2\right) = Eu_2 \left(p_1, p_2\right) = 1q + 0(1 - q) = q$$
$$F \ : U_2 \left(p_1, p_2\right) = Eu_2 \left(p_1, p_2\right) = 0q + 2 \left(1 - q\right) = 2 - 2q$$

Face à la stratégie mixte p_1 de Paul, Jacqueline choisira O ($t = 1$) si

$$q > 2 - 2q \Rightarrow q > \frac{2}{3}.$$

donc seulement si Paul va à l'Opéra plus de deux soirées sur trois. Par conséquent, la fonction de meilleure réponse de Jacqueline est

$$R_2(q) = t^*(q) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \ q > 2/3 \\ [0, 1] & \text{Si } \ q = 2/3 \\ 0 & \text{Si } \ q < 2/3. \end{cases}$$

Nous pouvons représenter ces fonctions de réaction sur un graphique (voir figure 3.1).

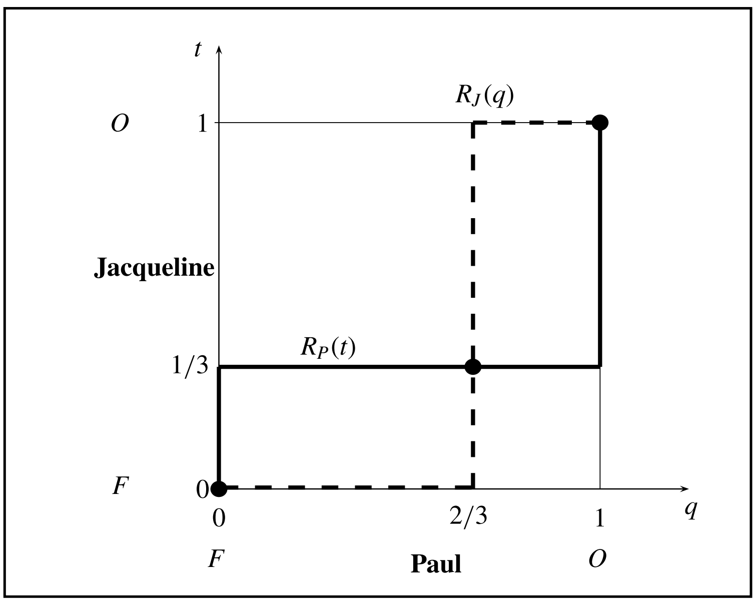

Figure 3.1 Les fonctions de meilleures réponses en stratégies mixtes.

Ce graphique fait apparaître trois points d'intersection entre les courbes de réaction. Nos deux équilibres en stratégies pures (O, O) et (F, F) apparaissent aux extrêmes (respectivement $(1, 1)$ et $(0, 0)$). Un nouvel équilibre en stratégies mixtes apparaît : $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Dans cet équilibre, Paul va à l'Opéra deux soirées sur trois et Jacqueline, une soirée sur trois. Leur gain espéré est alors : $Eu_i = 2/3, i = 1, 2$.

Remarque 3.2

Vérifiez que les trois équilibres correspondent bien à des couples de stratégies $\left(p_1^*, p_2^*\right)$ telles que

$$p_1^* = R_1\left(p_2^*\right)$$
$$p_2^* = R_2\left(p_1^*\right).$$

et calculez les gains correspondants aux trois équilibres.

[KB] pages 280–293.

II. Insuffisances de l'équilibre de Nash

A. Non-existence de l'équilibre de Nash

Il n'existe pas nécessairement un équilibre de Nash pour les jeux où les stratégies sont des actions directes des joueurs. Si l'on reprend la bataille des sexes après 30 ans de mariage (voir le tableau 3.10).

Tableau 3.10 Bataille des sexes II.

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	$(2,0)$	$(0,2)$
	F	$(0,1)$	$(1,0)$

Dans ce cas, le désir de Jacqueline de passer ses soirées avec Paul a disparu avec le temps, tandis que Paul a gardé son amour romantique et il préfère toujours être avec Jacqueline plutôt qu'être seul. Dans ce jeu il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.

Vérifiez qu'il existe néanmoins un équilibre de Nash en stratégies mixtes $p^* = (1/3, 1/3)$.

La non-existence de l'équilibre de Nash correspond à l'absence d'intersection entre les fonctions de meilleure réponse. S'il y a des fortes discontinuités dans les fonctions de réaction, cela devient tout à fait possible. De manière plus précise, on est assuré d'avoir au moins un équilibre de Nash si :

1. L'ensemble de stratégies de chaque joueur est convexe et compact, et si
2. la fonction de paiement de chaque joueur est continue et concave en la propre stratégie du joueur.

Ces propriétés assurent que les fonctions de réactions se comportent bien et se croisent au moins une fois.

Un ensemble compact est un ensemble fermé et borné. La convexité d'un ensemble assure que quand on combine différents points d'un tel ensemble, la combinaison appartiendra à cet ensemble. Un jeu fini est un jeu où les ensembles de stratégies des joueurs sont finis. La continuité et la concavité en son propre argument de la fonction de paiement va assurer que sur l'ensemble convexe et compact des stratégies, le maximum de cette fonction (la meilleure réponse) va se modifier de manière continue et en restant dans l'ensemble des stratégies. Cela va assurer l'intersection des fonctions (ou dans un cadre plus générale, des correspondances) de meilleures réponses.

Quand on utilise les stratégies mixtes dans un jeu fini, celles-ci étant définies dans l'intervalle fermée $[0, 1]$, et sur un support fini (S_i), la compacité est vérifiée ainsi que la convexité (puisqu'une stratégie mixte est par définition une combinaison convexe de stratégies pures).

Cette discussion concerne un problème assez technique. Les arguments que nous venons de considérer ci-dessus sont très imprécis et ils sont uniquement donnés pour vous suggérer l'intuition qui est derrière le théorème suivant.

Théorème 3.1 (Nash). *Tout jeu fini possède au moins un équilibre de Nash si les stratégies mixtes sont autorisées.*

[KB] pages 316–326.

B. Équilibre de Nash et le bien-être social

Les concepts d'équilibre correspondent à des mécanismes particuliers de coordination des stratégies individuelles. Dans les jeux non-coopératifs, chaque joueur cherche unilatéralement à améliorer sa situation individuelle. Est-ce que la solution qui est donnée par l'équilibre de Nash correspond à un mécanisme de coordination efficace ? Pour répondre à cette question nous allons utiliser le concept d'efficacité parétienne et le concept d'optimum de Pareto. Nous pouvons définir ces concepts dans le cadre de nos jeux.

Définition 3.3 (Efficacité au sens de Pareto.)

1. Le résultat $\hat{s}$ **Pareto-domine** le résultat s si :

$$\begin{aligned} u_i\left(\hat{s}\right) \geqslant u_i\left(s\right), \quad \forall i \quad \text{et} \\ \exists j, \quad u_j\left(\hat{s}\right) > u_j\left(s\right). \end{aligned}$$

2. Un résultat s^* est un **optimum de Pareto** s'il n'existe pas un autre résultat qui le Pareto-domine.
3. Les résultats $\hat{s}$ et s ne sont pas **Pareto-comparable** si

$$\exists i, \quad u_i\left(\hat{s}\right) > u_i\left(s\right) \quad \text{et} \quad \exists\, j \neq i, \;\; u_j\left(\hat{s}\right) < u_j\left(s\right).$$

Dans le dilemme du prisonnier (D, D) est un équilibre de Nash mais le résultat (N, N) Pareto-domine cet équilibre.

Proposition 3.2. *Un équilibre de Nash n'est pas nécessairement un optimum de Pareto.*

Dans la bataille de sexes, les résultats (O, O) et (F, F) ne sont pas Pareto-comparables.

C. Multiplicité de l'équilibre de Nash et sélection d'équilibre

L'équilibre de Nash n'est pas nécessairement unique. Reprenons l'exemple de la bataille des sexes.

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	$(2, 1)$	$(0, 0)$
	F	$(0, 0)$	$(1, 2)$

Dans ce jeu (O, O) et (F, F) sont des équilibres de Nash. Dans ce cas, nous ne sommes pas capables, sans aucune information supplémentaire, de prédire quelle sera exactement la solution du jeu. Les deux résultats sont également vraisemblables. De manière générale, il arrive souvent que les courbes de réaction se coupent plus d'une fois. Que doit-on faire dans ce cas pour pouvoir prédire les résultats possibles de ce jeu ?

1) Interchangeabilité et équivalence des équilibres

Si les différents équilibres correspondent à des situations suffisamment similaires, la multiplicité ne pose pas de problème. Nous pouvons préciser cette idée avec les deux définitions suivantes.

Définition 3.4

Deux équilibres de Nash p et p' sont ***équivalents*** si $u_i\left(p\right) = u_i\left(p'\right), \forall i \in I$.

Définition 3.5

Deux équilibres de Nash $p = (p_i, p_{-i})$ et $p' = \left(p'_i, p'_{-i}\right)$ sont ***interchangeables*** si $\left(p_i, p'_{-i}\right)$ et $\left(p'_i, p_{-i}\right)$, $\forall i$ sont aussi des équilibres de Nash.

Si les équilibres de Nash d'un jeu sont équivalents, alors on pourra prédire ce qui va résulter de ce jeu malgré la multiplicité. Dans la Bataille des sexes, les deux équilibres ne sont pas équivalents car les gains des joueurs sont asymétriques. Ils ne sont pas interchangeables non plus puisque (F, O) et (O, F) ne sont pas des équilibres de Nash. En fait, l'équivalence et surtout l'interchangeabilité sont des propriétés assez rares. Que peut-on alors dire dans le cas d'équilibres multiples ?

2) Conventions et points focaux

Le problème principal que la multiplicité fait apparaître dans les interactions, est celui de la *coordination* des choix. En effet, Paul et de Jacqueline doivent se coordonner pour organiser leur soirée. Si vous avez donné un rendez-vous à un ami pour aller au cinéma ce soir, vous allez naturellement vous retrouver devant... la porte du cinéma, même si vous n'avez pas initialement précisé le lieu du rendez-vous. Ce type de choix évident pour tous les joueurs a été appelé un *point focal* par Schelling.

► **Exemple 3.1 (Le jeu du cartel)**
Deux firmes similaires forment un cartel de manière à constituer un monopole. Elles doivent décider de la manière dont elles vont partager les profits du cartel. Chaque firme propose une proportion s_i qu'elle désire obtenir, $s_i \in S_i = \{0, 1/2, 1\}, i = 1, 2$. Si les choix sont compatibles $(s_1 + s_2 \leqslant 1)$ alors $u_i(s_1, s_2) = s_i$. Sinon le cartel explose et $u_i = -1$.

Nous pouvons construire la forme normale de ce jeu (tableau 3.11).

Tableau 3.11 Un premier jeu de cartel.

		Firme B		
		0	1/2	1
	0	(0, 0)	(0, 1/2)	(0, 1)
Firme A	1/2	(1/2, 0)	(1/2, 1/2)	(−1, −1)
	1	(1, 0)	(−1, −1)	(−1, −1)

Ce jeu possède trois équilibres de Nash $(1, 0)$, $(0, 1)$ *et* $(1/2, 1/2)$. *Ces équilibres ne sont ni équivalents, ni interchangeables.*

Pourtant un équilibre correspond mieux que les autres à la nature des relations qui existent entre les firmes. Les firmes sont similaires et donc, *elles vont estimer que le partage ne doit pas leur être trop défavorable. L'équilibre* $(1/2, 1/2)$ *reflète bien l'égalité de taille qui existent entre les firmes et, en connaissant cette information, on peut s'attendre à ce que les firmes se coordonnent sur cet équilibre. En cela, étant donnée cette connaissance (qui est par ailleurs fournie en dehors du jeu puisque la matrice de jeu définit complètement ce jeu), ce partage égalitaire des profits constitue un point focal.*

Les conventions en vigueur dans les sociétés humaines constituent ce type de points focaux en vue de faciliter la coordination : rouler du même côté de la route (à gauche en Grande Bretagne), s'arrêter aux feux rouges, se retrouver au point de rencontre dans un aéroport ou dans une gare, faire la queue...

3) Domination au sens de Pareto

Un équilibre de Nash n'est pas nécessairement un optimum de Pareto mais quand il y a multiplicité, un équilibre peut Pareto-dominer un autre. Quand cette domination est *claire*, cela peut fournir un statut de point focal à l'équilibre dominant. Prenons dans le tableau 3.12 une nouvelle version de la Bataille des sexes.

Tableau 3.12 Bataille des sexes III.

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	$(2, 2)$	$(0, 0)$
	F	$(0, 0)$	(x, x)

Si $0 < x < 2$ alors (O, O) et (F, F) sont tous les deux des équilibres et (O, O) Pareto-domine (F, F). La coordination sur (O, O) est facile à prédire si $x = 1$ mais que doit-on penser pour $x = 1.9$ ou pour $x = 1.99999$?

Parfois, la dynamique de déroulement du jeu et la rationalité des joueurs peuvent nous guider quant aux résultats qui peuvent émerger du jeu. Si dans la Bataille des Sexes, Paul rentre à la maison avec deux billets pour l'Opéra, cela va impliquer l'équilibre (O, O). Si les joueurs ont la possibilité de communiquer avant le jeu, on peut penser que cela modifiera la structure du jeu.

4) Communication avant le jeu

En effet, les joueurs ne pourraient-ils pas se mettre d'accord avant le jeu (grâce à une bonne conversation au coin du feu) sur l'équilibre qu'ils vont jouer ? Bonnie et Clyde ne pourraient-ils pas se mettre d'accord pour ne jamais dénoncer, de manière à avoir la situation Pareto-optimale ? Ces deux situations sont bien différentes. En effet, quoi qu'ils se disent avant (*cheap talk*), les joueurs seront dans une situation non-coopérative une fois que le jeu commence. Étant donnée que Dénoncer domine fortement Nier, aucune entente tacite ne pourrait forcer les joueurs à s'en tenir à la stratégie N. Étant donnée la tentation pour l'autre de dénoncer, le joueur respectant l'entente risque de se trouver dans une très mauvaise posture.

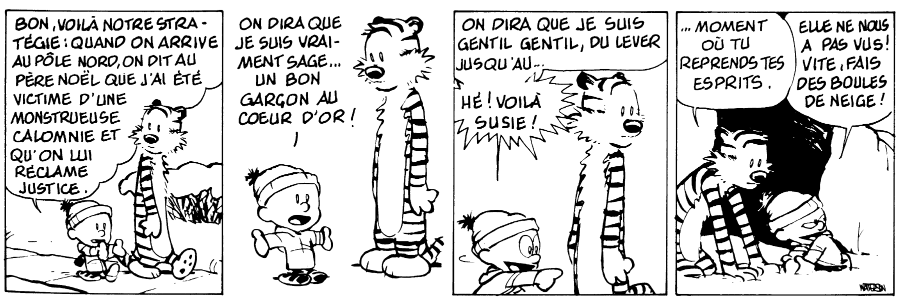

Figure 3.2 Tenir une promesse...

Dans un jeu non-coopératif, si les joueurs respectent un accord tacite, c'est parce que cela est dans leur intérêt et non parce qu'ils doivent le respecter. C'est le principe de *rationalité individuelle*. Ce n'est sûrement pas le cas d'un accord sur la stratégie N dans le Dilemme du prisonnier.

Tout accord qui sera respecté doit nécessairement changer la structure du jeu (sa temporalité, les ensembles de stratégies ou les paiements). Si Bonnie et Clyde font partie d'une bande qui promet de punir sérieusement à sa sortie le joueur qui dénonce, cela peut correspondre à une telle modification (les paiements seront nécessairement modifiés pour le joueur qui dénonce seul!). Il s'agit alors d'une *menace crédible*. Les menaces crédibles peuvent considérablement changer les résultats d'un jeu comme nous allons le voir dans le prochain chapitre.

La coordination entre équilibres multiples est un problème différent. Nous avons vu que les conventions ou la particularité de certaines situations peuvent faciliter la coordination.

L'intervention neutre d'une tierce personne aussi peut faciliter la coordination.

5) Équilibre corrélé (Aumann–1974)

La tierce personne la plus neutre est la Nature et son intervention aléatoire. C'est en jouant à pile-ou-face qu'on détermine quelle équipe commence un match de football. À partir du moment où un événement aléatoire peut être observé conjointement par tous les joueurs, il peut faciliter la coordination.

Dans la Bataille des sexes, Paul et Jacqueline peuvent demander à leur voisin de jouer à Pile ou Face entre F et O, et dire à chacun de jouer O si Pile est tiré et de jouer F si Face est tiré. Leur gain espéré devient dans ce cas

$$\begin{aligned} U_i = Eu_i &= \frac{1}{2}u_i\,(O,O) + \frac{1}{2}u_i\,(F,F) \\ &= \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}1 = \frac{3}{2}\,. \end{aligned}$$

Ces gains espérés sont supérieurs à ceux obtenus à l'équilibre de Nash en stratégies mixtes : $p^* = (2/3, 1/3)$.

À partir du moment où le voisin n'est pas *corruptible*, les joueurs ont intérêt à suivre sa recommandation (même si Pile sort plusieurs soirs de suite). Tout événement aléatoire et objectif peut jouer ce rôle de coordination (y compris l'absence ou la présence des taches solaires chaque jour) à partir du moment où les probabilités $0.5/0.5$ sont respectées. Ces évènements instaurent une corrélation entre les choix des agents, d'où le concept d'*équilibre corrélé* d'Aumann.

→ ***Remarque 3.3***

Malgré les apparences, il s'agit bien d'un équilibre non-coopératif puisqu'aucun joueur ne s'est engagé en une action particulière à l'avance et s'il suit l'indication, c'est parce qu'il y a intérêt.

III. Application : le modèle de Hotelling

Le modèle de Hotelling est un modèle de différenciation des biens dans un duopole.

D'Aspremont *et al.*, 1979, On Hotelling's "Stability in Competition", Econometrica, 47(5).

On a deux vendeurs localisés sur une plage linéaire où les consommateurs sont uniformément distribués. Chaque consommateur achète au plus une unité du produit. Représentons dans la figure 3.3, page suivante, cette plage par une ligne de longueur L et les localisations des deux firmes par les points A et B.

Il existe un coût de transport unitaire c pour les consommateurs. Un consommateur qui achète une unité du produit au prix p à un vendeur qui est à la distance d a l'utilité suivante :

$$u\,(p,d) = u_0 - p - cd$$

Nous posons $u_0 = 0$ sans perte de généralité.

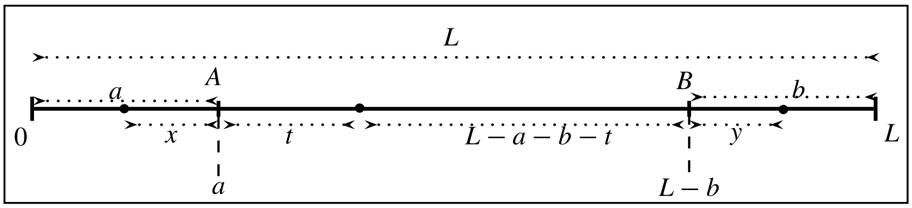

Figure 3.3 La cité linéaire de Hotelling.

Pour décider chez qui ils vont acheter, les consommateurs comparent donc le prix et la distance correspondant à chaque vendeur. Regardons les consommateurs localisés sur les différents segments du marché.

$\boxed{\text{À gauche de } A :}$ Le consommateur qui est à la distance x de A achètera chez A si et seulement si

$$\begin{aligned} p_A + cx &< p_B + c\,(L - a - b) + cx \\ p_A &< p_B + c\,(L - a - b) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Donc la variable x n'intervient pas dans cette condition et dès que la condition 3.2 est vérifiée, tous les consommateurs à gauche de A achètent chez lui, sinon, ils vont tous chez B.

$\boxed{\text{À droite de } B :}$ Le consommateur qui est à la distance y de B achètera chez B si et seulement si

$$\begin{aligned} p_A + c\,(L - a - b) + cy &> p_B + cy \\ p_A &> p_B - c\,(L - a - b) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$\boxed{\text{Entre } A \text{ et } B :}$ En fonction des prix, il y aura un *consommateur limite* qui sera indifférent entre les deux vendeurs. Ce consommateur sera à distance t de A si

$$\begin{aligned} p_A + ct &= p_B + c\,(L - a - b - t) \\ t &= \frac{1}{2c}\left[p_B - p_A + c\,(L - a - b)\right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

et la demande qui s'adresse à A sera $a + t$.

Étant donné p_B, nous avons donc trois zones pour p_A :

$$\begin{array}{ll} p_A < p_B - c\,(L - a - b) = p_B^- & \text{Zone } (I) \\ |p_A - p_B| \leqslant c\,(L - a - b) & \text{Zone } (II) \\ p_A > p_B + c\,(L - a - b) = p_B^+ & \text{Zone } (III) \end{array} \tag{3.5}$$

Nous pouvons alors construire la fonction de demande de A étant donné p_B :

$$D_A(p_A; p_B) = \begin{cases} L & (I) \\ a + \frac{1}{2c}\left[p_B - p_A + c(L - a - b)\right] & (II) \\ 0 & (III) \end{cases} \tag{3.6}$$

Nous représentons cette fonction de demande dans la figure 3.4.

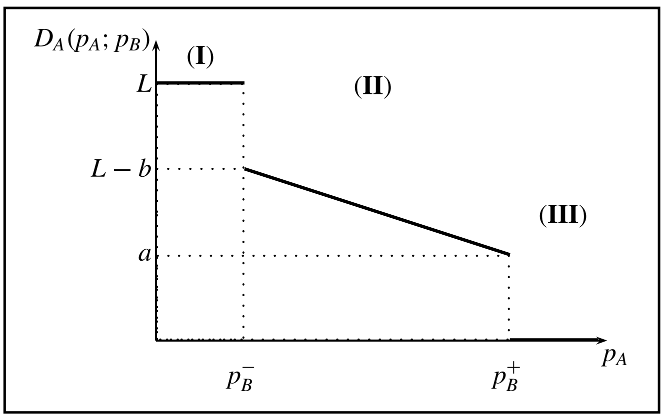

Figure 3.4 La fonction de demande.

La firme fait donc faire face à une demande qui n'est pas continue. Cette discontinuité va aussi apparaître au niveau du profit :

$$\pi_A(p_A; p_B) = p_A \cdot D_A(p_A; p_B) \tag{3.7}$$

$$\pi_A(p_A; p_B) = \begin{cases} p_A L & (I) \\ \frac{p_A}{2}(L + a - b) + \frac{p_A p_B}{2c} - \frac{p_A^2}{2c} & (II) \\ 0 & (III) \end{cases}$$

Cette fonction de profit est strictement concave uniquement dans la zone (II). Dans les zones (I) et (III), elle est linéaire et donc concave et convexe. De plus, elle n'est pas continue. Nous représentons cette fonction de profit dans la figure 3.5, page suivante.

La fonction de meilleure réponse de A va résulter de la maximisation de son profit étant donné p_B

$$R_A(p_B) = \arg\max_{p_A} \pi_A(p_A; p_B) \tag{3.8}$$

Dans la zone I : $R_A(p_B) = p_B - c(L - a - b)$.

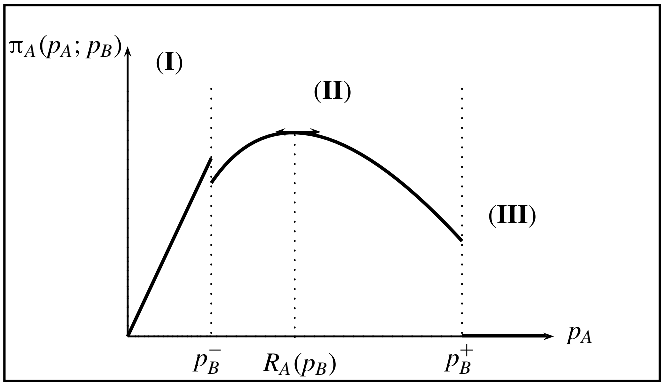

Figure 3.5 La fonction de profit.

Dans la zone *II* : Nous avons une fonction de profit concave et donc nous pouvons déterminer R_A par

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = \frac{1}{2}(L+a-b) + \frac{1}{2c}p_B - \frac{1}{c}p_A = 0$$

$$\Rightarrow R_A(p_B) = \frac{1}{2}p_B + \frac{c}{2}(L+a-b) \qquad (3.9)$$

Dans la zone *III* : $R_A(p_B) = p_A$ est quelconque avec $p_A \geqslant p_B + c(L-a-b)$.

Nous avons donc une fonction de réaction discontinue. Par symétrie, nous avons la fonction de réaction de B

$$R_B(p_A) = \begin{cases} p_A - c(L-a-b) & (I) \\ \frac{1}{2}p_A + \frac{c}{2}(L+b-a) & (II) \\ p_B \geqslant p_A + c(L-a-b) & (III) \end{cases}$$

Si l'équilibre a lieu dans la zone *II* pour les deux firmes alors il va correspondre à l'intersection de la seconde partie de chaque courbe de réaction

$$p_A^* = \frac{1}{2}p_B^* + \frac{c}{2}(L+a-b) \quad \text{et} \quad p_B^* = \frac{1}{2}p_A^* + \frac{c}{2}(L+b-a)$$

$$\Rightarrow p_A^* = c\left(L + \frac{a-b}{3}\right) \ ; \ p_B^* = c\left(L - \frac{a-b}{3}\right) \qquad (3.10)$$

Et les profits d'équilibre sont donnés dans cette zone par

$$\pi_A^* = \frac{c}{2}\left(L + \frac{a-b}{3}\right)^2, \quad \frac{\partial \pi_A^*}{\partial a} \geqslant 0$$

$$\pi_B^* = \frac{c}{2}\left(L - \frac{a-b}{3}\right)^2, \quad \frac{\partial \pi_B^*}{\partial b} \geqslant 0$$

Donc en ce qui concerne les localisations, A a intérêt à augmenter a et B, b. Les deux firmes vont donc se rapprocher : c'est le *principe de différenciation minimale* de Hotelling.

Mais la zone de concavité *II* disparaît dès que nous avons $a + b = L$: les deux firmes sont localisées au même endroit sur la ligne et il n'y a plus de différenciation. Cela correspond alors au duopole de Bertrand avec $p_A = p_B = 0$ et $\pi_i = 0, \forall i$.

L'équilibre de Nash obtenu dans la zone concave est donc très fragile dans ce cas par rapport à la localisation des firmes. En fait, dans le cas d'une localisation symétrique $(a = b)$, cet équilibre n'existe que si et seulement si $a, b \leqslant L/4$ (les firmes doivent se localiser en dehors des quartiles).

Cet exemple illustre donc le problème de non-existence de l'équilibre de Nash quand les fonctions de gains sont discontinues. Par exemple, si les coûts de transport étaient quadratiques (de type cx^2), les fonctions de gains auraient les bonnes propriétés pour que l'existence de l'équilibre de Nash soit assurée.

IV. Application : le problème de l'entrant potentiel

Rappel du problème d'entrée d'une firme dans le marché d'un monopole.

1. L'entrant (E) doit choisir entre *Entrer* ou *Ne pas entrer* (*Non*).
2. S'il entre, la firme installée (I) peut choisir de le *Combattre* en cassant les prix ou de *Coopérer* avec lui de manière à créer un monopole joint.

Nous pouvons alors représenter ce jeu sous la forme d'un arbre dans la figure 3.6.

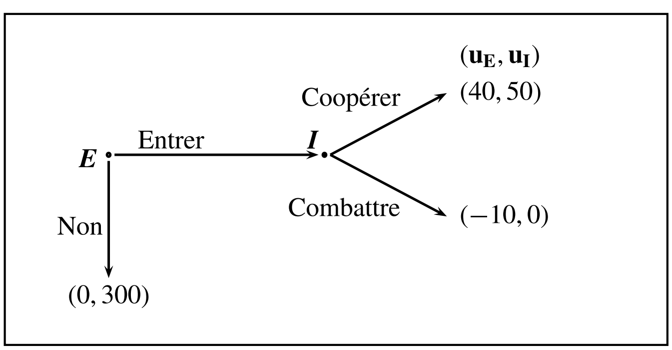

Figure 3.6 Le jeu de l'entrée I (reprise).

Quel va être le résultat de ce jeu ? Quelles sont les meilleures réponses des deux joueurs ?

$$I \ : \begin{cases} \textit{Coopérer} & \text{Si } \textit{Entrer} \\ \{\textit{Coopérer}, \textit{Combattre}\} & \text{Sinon} \end{cases}$$

$$E \ : \begin{cases} \textit{Entrer} & \text{Si } \textit{Coopérer} \\ \textit{Non} & \text{Sinon} \end{cases}$$

Utilisons la forme normale du jeu donnée dans le tableau 3.13 pour représenter ces fonctions de réaction $\left(\square \text{ pour } E \text{ et } \ast \text{ pour } I\right)$.

Tableau 3.13 Meilleures réponses dans le Jeu de l'entrée I.

		I	
		Coopérer	*Combattre*
E	*Entrer*	$\boxed{\ast}$	
	Non	$\ast$	$\boxed{\ast}$

Il y a donc deux équilibres de Nash : (*Entrer*, *Coopérer*) et (*Non*, *Combattre*). Ces équilibres ne sont ni équivalents, ni interchangeables et il n'y a pas de dominance parétienne entre eux. Aucun ne constitue un point focal et donc les deux sont a priori aussi vraisemblables du point de vue de l'équilibre de Nash. Cela implique alors qu'il existe une possibilité pour I de bloquer l'entrée sur son marché, grâce au combat de l'entrée. Nous allons revenir sur ce résultat dans le chapitre suivant.

Exercices

Exercice 3.1

Soit le jeu en forme normale suivant :

		B	
		G	D
A	G	$(1, 1)$	$(1, 1)$
	D	$(-1, -1)$	$(2, 0)$

1. Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu ?
2. Existe-t-il des équilibres de Nash en stratégies mixtes ?

Solution

1. On peut déterminer les équilibres de Nash en stratégies pures en considérant les déviations unilatérales à partir de chaque profil de stratégies :
   – (G, G) : C'est un équilibre de Nash ($A : 1 > -1,\ B : 1 = 1$) ;
   – (D, G) : Ce n'est pas un équilibre de Nash ($A : -1 < 1,\ B : -1 < 0$) ;
   – (G, D) : Ce n'est pas un équilibre de Nash ($A : 1 < 2$) ;
   – (D, D) : C'est un équilibre de Nash ($A : 2 > 1,\ B : 0 > -1$).
   On peut aussi utiliser les fonctions de meilleures réponses des joueurs. Représentons dans la matrice initiale, la fonction de réaction de A par des carrés $\left(\square\right)$ et celle de B par des étoiles $(\ast)$:

		B	
		G	D
A	G	$\boxed{\ast}$	$\ast$
	D		$\boxed{\ast}$

   Cela conduit aussi aux deux équilibres de Nash en stratégies pures : (G, G) et (D, D).
2. La même démarche peut être utilisée pour les équilibres de Nash en stratégies mixtes. Notons les stratégies mixtes des deux joueurs par $p_1 = (q, 1 - q)$ et $p_2 = (t, 1 - t)$ avec $q, t \in [0, 1]$.

			B	
			t	$1 - t$
			G	D
A	q	G	$(1, 1)$	$(1, 1)$
	$1 - q$	D	$(-1, -1)$	$(2, 0)$

   Considérons le gain espéré de A avec ces stratégies

$$G\ : U_A = Eu_A = t \cdot 1 + (1 - t) \cdot 1 = 1$$
$$D\ : U_A = Eu_A = -1 \cdot t + (1 - t) \cdot 2 = 2 - 3t$$

   Il préfère sa stratégie pure G si

$$1 > 2 - 3t \Rightarrow t > 1/3$$

   Il jouera donc tout le temps G si B joue G plus d'une fois sur trois et il est indifférent entre ses deux stratégies pures si $t = 1/3$.
   Considérons maintenant le cas de B

$$G\ : U_B = Eu_B = q \cdot 1 + (-1) \cdot (1 - q) = 2q - 1$$
$$D\ : U_B = Eu_B = 1 \cdot q + (1 - q) \cdot 0 = q$$

Elle préfère toujours sa stratégie pure G si

$$2q - 1 > q \Rightarrow q > 1$$

Elle jouera donc tout le temps D car $q \leqslant 1$ par définition. Elle est indifférente entre les deux stratégies pour $q = 1$ (si A joue tout le temps G). Nous retrouvons donc les deux équilibres en stratégies pures : $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Mais il existe aussi un continuum d'équilibres en stratégies mixtes : $\left(t \in \left[1/3, 1\right], q = 1\right)$.

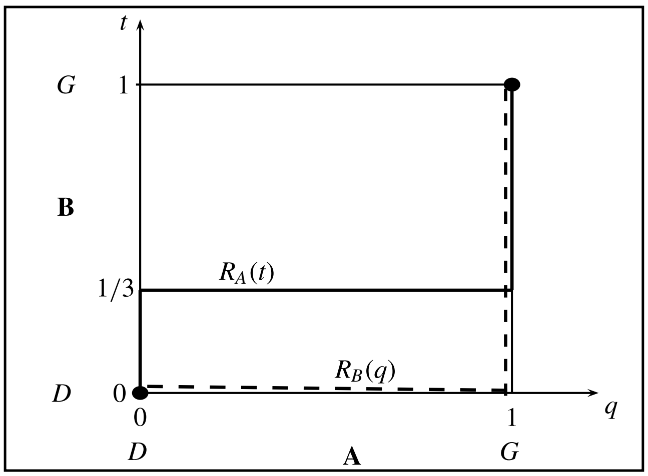

Figure 3.7

Exercice 3.2

Considérez le jeu en forme normale donné dans le tableau suivant

		II	
		a	b
I	A	(k, l)	(e, f)
	B	(g, h)	(c, d)

Déterminez les conditions sur les paramètres c, d, e, f, g, h, k et l pour que
1. le résultat (A, a) soit un équilibre de Nash ;
2. le résultat (A, a) soit un optimum de Pareto ;
3. le résultat (A, a) ne soit pas Pareto-comparable avec (B, b).

Solution

1. Le résultat (A, a) est un équilibre de Nash si : $k \geqslant g$ et $l \geqslant f$.
2. Le résultat (A, a) est un optimum de Pareto si : $k \geqslant \max\{e, g, c\}$ et $l \geqslant \max\{f, h, d\}$.
3. Le résultat (A, a) n'est pas Pareto-comparable avec (B, b) : $k > c$ et $l < d$.

Exercice 3.3

Deux pays (A et B) considèrent séparément l'état des relations politiques entre elles. Elles doivent choisir entre un état de guerre (G) ou un état de paix (P). Si les deux choisissent la guerre alors chacun aura un gain de 2. Si un seul déclare la guerre alors il obtient 6 et son voisin obtient 0. S'ils choisissent de préserver la paix, chacun obtient un gain de 4.

1. Donnez les fonctions de meilleures réponses en stratégies pures.
2. Que pouvez-vous en conclure sur les équilibres de Nash ?
3. Classez les différents résultats du point de vue de l'efficacité parétienne.

Solution

Ce jeu est de type dilemme du prisonnier : la stratégie P est dominé par G, avec un équilibre de Nash (G, G) pareto-dominé par (P, P). Il n'y a pas d'autre équilibre de Nash en stratégies mixtes puisqu'aucune stratégie mixte optimale peut donner un poids strictement positif à la stratégie pure dominée, P.

Exercice 3.4 Fureur de vivre

Deux conducteurs (A et B) dirigent leur voiture l'une contre l'autre dans une rue trop étroite pour qu'elles puissent se croiser sans provoquer d'accident. Si un conducteur ralentit tandis que l'autre garde la même vitesse, il perd la face : il obtient alors une utilité de 0 et son adversaire obtient 4. Si les deux ralentissent en même temps alors le jeu se termine en égalité et les deux obtiennent une utilité de 2. Si aucun ne ralentit alors l'accident arrive et chacun obtient une utilité de -2.

1. Précisez l'ensemble des joueurs et l'ensemble de stratégies de chaque joueur.
2. Donnez la forme normale du jeu.
3. Déterminez les équilibres de Nash en stratégies pures du jeu.
4. Déterminez les équilibres de Nash en stratégies mixtes après avoir précisé les fonctions de meilleure réponse des joueurs.

Solution

1. L'ensemble des joueurs est $I = \{A, B\}$. Pour les ensembles de stratégies, nous avons $S^A = S^B = \{R, N\}$ avec R : ralentir et N : Non.
2. La forme normale du jeu est donnée par le tableau suivant :

		B	
		R	N
A	R	$(2, 2)$	$(0, 4)$
	N	$(4, 0)$	$(-2, -2)$

3. Les deux équilibres de Nash en stratégies pures sont (R, N) et (N, R) car $4 > 2$ et $0 > -2$.
4. Soient les stratégies mixtes

$$q = P[s_A = R] = 1 - P[s_A = N]\ (p_A)$$
$$t = P[s_B = R] = 1 - P[s_B = N]\ (p_B)$$

Face à la stratégie p_B de B, le joueur A obtient

$$Eu_A\,(R; p_B) = 2t$$
$$Eu_A\,(N; p_B) = 6t - 2$$

A choisira de ralentir si $2t > 6t - 2 \Rightarrow t < 1/2$. A sera indifférent entre R et N si $t = 1/2$.
De la même manière, face à la stratégie p_A, B obtient

$$Eu_B\,(R; p_A) = 2q$$
$$Eu_B\,(N; p_A) = 6q - 2$$

et B choisira de ralentir si $q < 1/2$. B sera indifférent entre R et N si $q = 1/2$.
Cela nous donne donc les fonctions de meilleures réponses des deux joueurs que nous pouvons représenter de la manière habituelle.

$$R_A\,(t) = q^*\,(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \ t < 1/2 \\ [0,1] & \text{Si } \ t = 1/2 \\ 0 & \text{Si } \ t > 1/2. \end{cases}$$

$$R_B\,(q) = t^*\,(q) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \ q < 1/2 \\ [0,1] & \text{Si } \ q = 1/2 \\ 0 & \text{Si } \ q > 1/2. \end{cases}$$

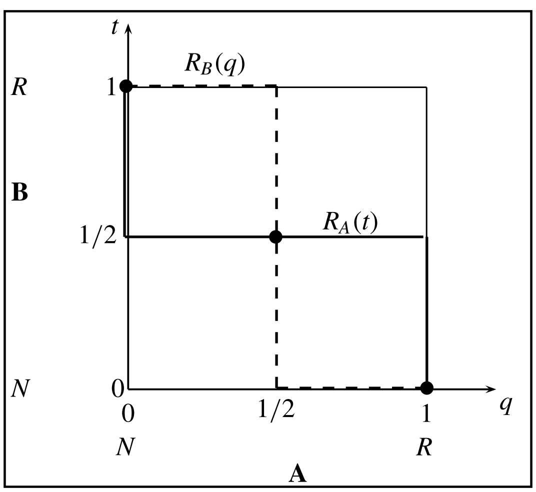

Figure 3.8

Nous avons donc au total 3 équilibres de Nash : deux en stratégies pures et un en stratégies mixtes $\left(q^*, t^*\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Dans ce dernier équilibre A et B choisiront de ralentir une fois sur deux.

Exercice 3.5

Déterminez les équilibres de Nash du jeu Papier-Ciseaux-Caillou.

Solution

Il n'existe pas équilibre de Nash en stratégies pures dans ce jeu. Il existe un équilibre de Nash en stratégies mixtes où chaque enfant joue chaque stratégie une fois sur trois (on peut voir cela en notant les stratégies mixtes sous la forme $p_{Leyla} = (q_P, q_{Ci}, 1 - q_P - q_{Ci})$ et $p_{Paul} = (t_P, t_{Ci}, 1 - t_P - t_{Ci})) : p^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et $U(p^*, p^*) = 1$.