UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2016-2017**

U.F.R. Économie & Gestion

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Bibliographie indicative

Jonathan Berk & Peter DeMarzo : *Finance d'Entreprise.* Éditeur : Pearson.
En particulier les chapitres 4 « La valeur temps de l'argent » et 5 « Les taux d'intérêts »

Zvi Bodie & Robert Merton : *Finance.* Éditeur : Pearson.
En particulier le chapitre 4 « La valeur de l'argent dans le temps et l'actualisation des cash-flows »

Edith Ginglinger & Jean-Marie Hasquenoph : *Mathématiques financières.* Éditeur : Economica, collection Gestion poche

Walder Masieri : *Mathématiques financières.* Éditeur : Dunod, Collection Aide Mémoire.

Il s'agit dans ce cours de présenter certains outils et méthodes qui permettent à un dirigeant d'entreprise (ou à un particulier) de prendre une décision lorsqu'il est confronté à un problème faisant intervenir plusieurs flux financiers (dépenses et/ou recettes) répartis dans le temps.

Ce cours nécessitant certains calculs complexes, il sera fourni aux étudiants un formulaire reprenant toutes les formules du cours (avec la même numérotation que celle adoptée dans le cours). Ce formulaire pourra être utilisé lors des épreuves, mais toute annotation sur ce formulaire sous quelque forme que ce soit est strictement interdite ! De plus les étudiants doivent avoir une calculatrice de lycée possédant les fonctions financières mais sans possibilité de calcul formel (par exemple les Texas instrument TI82, TI83 ou TI84, les Casio Graph 35 ou Graph75 ou financières FC 100V ou FC 200V) : il leur appartient de savoir utiliser les principales fonctions financières de leur calculatrice, les exemples en cours et TD seront illustrés à l'aide de la TI82. Cependant, lors de épreuves, il sera toujours demandé d'expliquer les calculs avant d'en donner les résultats chiffrés. Enfin, les étudiants doivent savoir utiliser les fonctions simples d'un tableur type Excel, LibreOffice ou OpenOffice, ces deux derniers étant téléchargeables gratuitement.

Chapitre I : Outils mathématiques

1 Suites Numériques

1.1 Généralités

Définition 1. *Une suite est une application de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note :*

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

*Le réel u_n est le **terme** d'indice n de la suite.*

On notera la suite u ou (u_n) ou $(u_n)_{n \in P}$ si l'on désire préciser la partie P de $\mathbb{N}$ sur laquelle la suite est définie.

Définir une suite consiste donc à donner le moyen de calculer ses termes.

Pour cela on peut envisager deux cas :

• 1) On peut donner une formule explicite permettant de calculer directement l'image de tout entier n : de la forme $u_n = f(n)$.

• 2) On peut donner le moyen de calculer le terme u_n en fonction des termes précédents. Dans ce cas la connaissance du ou des premiers termes est indispensable.

Exemple 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n + 1$. Calculer les 5 premiers termes de cette suite.

Exemple 2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer les 5 premiers termes de cette suite.

1.2 Sens de variation

Définition 2. *Une suite (u_n) est dite **croissante** si pour tout entier n, on a : $u_{n+1} \geq u_n$.*

*Une suite (u_n) est dite **décroissante** si pour tout entier n, on a : $u_{n+1} \leq u_n$.*

*Une suite (u_n) est dite **constante** si pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n$.*

*Une suite (u_n) est dite **monotone** si elle est soit croissante soit décroissante.*

Remarques :

1. Une suite (u_n) est croissante (resp. décroissante, resp. constante) à partir d'un certain rang, s'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$, resp. $u_{n+1} = u_n$).

2. Une suite (u_n) est strictement croissante (resp. décroissante) si pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).
3. Il existe des suites qui ne sont pas monotones. Par exemple la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1. *Une suite (u_n) est croissante (resp. décroissante) si et seulement si pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$ (resp. $u_{n+1} - u_n \leq 0$).*

Ainsi, pour étudier les variations d'une suite (u_n) on cherchera à déterminer le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exemples 3.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Etudier le sens de variation de cette suite.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + 4$. Etudier le sens de variation de cette suite.

Théorème 2. *Une suite (u_n) à termes **positifs non nuls** est croissante (resp. décroissante) si et seulement si pour tout entier naturel n, on a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \quad \text{(respectivement } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1\text{)}$$

Exemple 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$. Etudier le sens de variation de cette suite.

Théorème 3. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

1. *Si f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est strictement croissante.*
2. *Si f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est strictement décroissante.*

Exemple 5. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1,02^n$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,02^x$ est strictement croissante (car $1,02 > 1$ voir cours de L1-S1...) donc la suite (u_n) est également strictement croissante.

Le théorème précédent n'a pas de « réciproque », il existe des suites monotones définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$, mais sans pour autant que f soit monotone sur $\mathbb{R}^+$

Exemple 6. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n\cos(2n\pi)$: pour tout n, $u_n = n$ (car $\cos(2n\pi) = 1$) mais la fonction f définie par $f(x) = x\cos(2x\pi)$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^+$

Définition 3. *Une suite est dite* ***majorée*** *s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, on ait : $u_n \leq M$.*

Le réel M est appelé ***majorant****.*

Une suite est dite ***minorée*** *s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n, on ait : $m \leq u_n$.*

Le réel m est appelé ***minorant****.*

Une suite ***bornée*** *est à la fois majorée et minorée.*

Remarque : Une suite décroissante est majorée par son premier terme. Une suite croissante est minorée par son premier terme.

Exemple 7. Soit (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n}{2n+1}$. Démontrer que cette suite est bornée.

1.3 Limite

Définition 4. ***Suites divergentes de limite infinie***
On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si pour tout nombre réel A, l'intervalle $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou plus simplement $\lim u_n = +\infty$.
On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si pour tout nombre réel A, l'intervalle $]-\infty; A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim u_n = -\infty$.

Exemples 8. Les suites de termes généraux $\sqrt{n}$, n, n^2, n^3, ... admettent pour limite $+\infty$.

Proposition 1.
1. *Si une suite (u_n) est croissante et non majorée, alors $\lim u_n = +\infty$.*
2. *Si une suite (u_n) est décroissante et non minorée, alors $\lim u_n = -\infty$.*

Preuve : Pour le premier cas : Soit A un réel : il existe (au moins) un indice n_0 tel que $u_{n_0} > A$: sinon la suite (u_n) serait majorée par A, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Soit $n \geq n_0$: la suite (u_n) étant croissante, on a : $u_n \geq u_{n_0} > A$ et donc $u_n \in [A;+\infty[$: ainsi, tous les termes de la suite à partir du rang n_0 appartiennent à $[A;+\infty[$ ■

Définition 5. ***Suites convergentes*** *Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un réel.*

On dit que (u_n) admet pour limite ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note $\lim u_n = \ell$. On dit alors que la suite est convergente.

Lorsque la suite n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Remarques :

1. Si une suite est convergente, sa limite est unique (admis).
2. Il existe des suites divergentes qui n'ont pas de limite, comme par exemple la suite (u_n) définie par : $u_n = (-1)^n$.

Exemple 9. La suite de terme général $\dfrac{1}{n+1}$ converge vers 0.

Théorème 4. *Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.*

Si une suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Exemple 10. La suite (géométrique) de terme général $0,25^n$ est convergente, et a pour limite 0.

Théorème 5. *Soit f une fonction définie sur (au moins) $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

Si f possède une limite ℓ (réelle ou infinie) en $+\infty$, alors la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ a pour limite ℓ.

Exemple 11. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^x = e^{x\ln(3/4)}$ converge vers 0 en $+\infty$ (car $3/4 < 1$ voir cours de L1-S1...) donc la suite (u_n) converge également vers 0

Le théorème précédent n'a pas de « réciproque », il existe des suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$, convergentes, mais où f ne possède pas de limite en $+\infty$: par exemple (u_n) définie par $u_n = n\sin(2n\pi)$ est constante et converge vers 0, mais $f\ :\ f(x) = x\sin(2\pi x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

2 Raisonnement par récurrence

Théorème 6. *Soit $P(n)$ une assertion mathématique dépendant d'un entier naturel n. On suppose que les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :*

— *Il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ soit vraie. (Initialisation)*

— $\forall p \in N, [(p \geq n_0 \text{ et } P(p) \text{ vraie}) \Rightarrow P(p+1) \text{ vraie}]$ *(hérédité)*

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à n_0, $P(n)$ est vraie. (Conclusion)

Remarques :

• On prendra soin de bien détailler la rédaction en distinguant clairement les étapes (initialisation, hérédité, conclusion)

• Il existe une autre version du théorème de raisonnement par récurrence (dite récurrence forte), pour laquelle l'étape d'hérédité diffère légèrement :

$\forall p \in N, [(p \geq n_0 \text{ et } \forall n_0 \leq k \leq p, P(k) \text{ vraie}) \Rightarrow P(p+1) \text{ vraie}]$

• Ne pas oublier l'étape d'initialisation : en effet certaines propriétés sont héréditaires ... mais toujours fausses ! On peut par exemple montrer que la propriété : $P(n)$: « $3^{2n+4} - 2^n$ est un multiple de 7 » est héréditaire mais toujours fausse !

• Enfin bien faire attention à l'entier n_0 nécessaire parfois dans l'étape d'hérédité .... on peut ainsi « montrer » que dans une classe où il y a une fille, il n'y a que des filles ...

Exemple 12. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Réponse :

— Initialisation : Pour $n = 1$, le membre de gauche est égal à $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ et le membre de droite à $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$: il y a égalité et $P(1)$ est vraie.

— Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(p)$ soit vraie $\left(\text{i.e.} \sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}\right)$ et montrons que $P(p+1)$ est vraie $\left(\text{i.e.} \sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}\right)$

On a : $\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \sum_{k=1}^{p} k^2 + (p+1)^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2$ d'après l'hypothèse de récurrence et donc $\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1) + 6(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)[p(2p+1) + 6(p+1)]}{6} = \frac{(p+1)(2p^2 + 7p + 6)}{6}$; on factorise $2p^2 + 7p + 6 = (2p+3)(p+2)$ pour conclure et $P(p+1)$ est vraie.

— Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, donc d'après le principe de démonstration par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 13. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(n) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Exemple 14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(n)$: $2^n \geq n$.

Réponse :

— Initialisation : Pour $n_0 = 0$, on a $2^{n_0} = 1 \geq n_0$. Donc $P(0)$ est vraie.

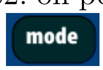
— Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $2^p \geq p$ et montrons qu'alors $2^{p+1} \geq p+1$. On a : $2^{p+1} = 2^p \times 2 \geq 2p$ d'après l'hypothèse de récurrence, et là on se heurte à un problème ! En effet on ne peut pas conclure immédiatement que $2p \geq p+1$ car cette inégalité est fausse pour $p = 0$ ... Il fallait donc démontrer l'étape d'initialisation pour $n = 0$ et $n = 1$ et démontrer l'étape d'hérédité pour $p \geq 1$.

— Conclusion : L'inégalité est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ et est héréditaire (pour $n \geq 1$), donc d'après le principe de démonstration par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

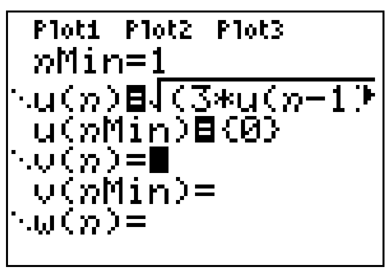
Exemple 15.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{3u_n+4} \; si \; n \geq 0 \end{cases}$

Montrer sur pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;4]$

Remarque : En utilisant la T.I. 82. on peut illustrer le comportement de cette suite récurrente : choisir la commande « Suit » dans 

puis entrer la définition de la suite.



Choisir une bonne fenêtre de visualisation (ici x et y prennent leurs valeurs dans $[0;4]$)

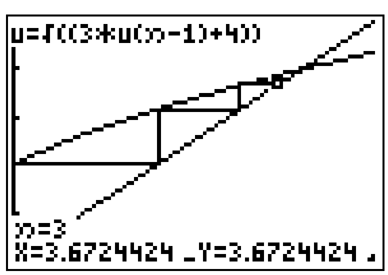
Dans 

choisir le mode esc

Appuyer sur 

, puis 

et utiliser les flèches pour faire apparaître les premiers termes de la suite.



3 Suites usuelles

3.1 Suites arithmétiques

Définition 6. *On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un réel r tel que :*

$$\text{Pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n + r \tag{I.1}$$

Le réel r s'appelle « la raison » de la suite arithmétique.

Exemple 16. Pour construire un mur de clôture, une entreprise propose le devis suivant :

Des frais fixes de 850 € puis 150 € par mètre linéaire.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où u_n est le prix payé pour la construction de n mètres de murs. Exprimer u_n en fonction de n.

Théorème 7. *1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors,*

$$\text{Pour tout entier } n,\ u_n = u_0 + n.r \tag{I.2a}$$

2. Réciproquement, soit (u_n) une suite telle qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout entier n, $u_n = a + nb$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = b$ et de premier terme $u_0 = a$

Remarque : Parfois dans certains énoncés, le premier terme connu de la suite arithmétique n'est pas u_0 mais u_1 : dans ce cas,

$$\text{Pour tout entier } n \geq 1,\ u_n = u_1 + (n-1).r \tag{I.2b}$$

Exemple 17.

Les conditions suivantes définissent une suite arithmétique (u_n) : $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2$. Calculons les cinq premiers termes : $u_0 = 5$, $u_1 - u_0 = 2$ d'ou $u_1 = 2 + 5 = 7$, $u_2 = 9$, $u_3 = 11$ et $u_4 = 13$.

Théorème 8. *Une suite arithmétique de raison r est :*

croissante *si, et seulement si, r est positif,*

décroissante *si, et seulement si, r est négatif,*

constante *si, et seulement si, r est nul.*

Preuve : Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = r$, d'où le théorème ■

Théorème 9. *1.* $S = \sum_{k=0}^{n-1} k = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

2. Soit (u_n) *une suite arithmétique de premier terme* u_0 *et de raison* r*, alors la somme des* n *premiers termes de* (u_n) *est :*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2} = \frac{n(2u_0 + (n-1).r)}{2} \qquad (\mathbf{I}.3a)$$

Remarque : Dans le cas où (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1,

$$S_n = u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(2u_1 + (n-1).r)}{2} \qquad (\mathbf{I}.3b)$$

Exemple 18. M. X possède une rente qui lui assure la première année un revenu annuel de 1500 €, revenu augmenté chaque année de 30 €. Calculer le total des termes de la rente reçus par M. X sur une période de 20 ans.

3.2 Suites géométriques

Définition 7. *On dit qu'une suite* (u_n) *est géométrique si et seulement si il existe un réel* q *tel que :*

$$\text{Pour tout entier } n,\ u_{n+1} = q \times u_n \qquad (\mathbf{I}.4)$$

Le réel q *s'appelle « la raison » de la suite géométrique.*

Exemple 19.

Sur un échiquier, on dispose un grain de blé sur la première case, 2 sur la seconde, 4 sur la troisième et ainsi de suite en doublant à chaque fois la mise. On considère la suite de $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où G_n est le nombre de grain sur la $n^{\text{ième}}$ case.

On constate que pour tout n, $G_{n+1} = 2 \times G_n$ la suite (G_n) est donc une suite géométrique de raison 2. On a aussi $G_1 = 1$ et $G_n = 2^n$. (Légende sur l'inventeur du jeu d'échecs qui aurait fait cette demande au roi désireux de le récompenser pour son invention)

Théorème 10. *1. Soit* (u_n) *une suite géométrique de premier terme* u_0 *et de raison* q*.*

$$\text{Pour tout entier } n,\ u_n = u_0 \times q^n \qquad (\mathbf{I}.5a)$$

2. Réciproquement, soit (u_n) *une suite telle qu'il existe deux réels* a *et* b *tels que pour tout entier naturel* n*, on a* $u_n = ba^n$*, alors* (u_n) *est une suite géométrique de raison* a *et de premier terme* $u_0 = b$

On a une version plus générale du théorème précédent :

Théorème 11. *Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_p, $p \geq 0$ et de raison q.*

$$\text{Pour tout entier } n \geq p,\ u_n = u_p \times q^{n-p} \tag{I.5b}$$

Exemple 20. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 10000$ et de raison $q = 1,25$. Calculer u_8.

Théorème 12. *Soit (u_n) une suite géométrique **à termes strictement positifs***
- *Si $0 < q < 1$, (u_n) est strictement décroissante.*
- *Si $q = 1$, (u_n) est stationnaire.*
- *Si $q > 1$, (u_n) est strictement croissante.*

Preuve : Si (u_n) est à termes strictement positifs, on peut étudier le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$, d'où le résultat. ■

Théorème 13.
1. *Pour tout $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}$*
2. *Somme des n premiers termes d'une suite géométrique : soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} \tag{I.6a}$$

Preuve :
1. Posons $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$ alors $q \times S = q + q^2 + \cdots + q^n$ et $S - qS = 1 - q^n$, d'où $S = \dfrac{1-q^n}{1-q}$
2. Posons $S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 + qu_0 + q^2u_0 + \cdots + q^{n-1}u_0 = u_0 \times S$

Remarque : Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_1, alors

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \tag{I.6b}$$

Exemples 21.

1. $S_1 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2048} = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{11}$
2. $S_2 = 1 + 1,1 + 1,1^2 + \cdots + 1,1^{10} = \dfrac{1 - 1,1^{11}}{1 - 1,1} \approx 18,53$
3. $$S = \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^k = \frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)} = -\frac{1-(1+r)^n}{r} = \frac{(1+r)^n - 1}{r} \tag{I.6c}$$
4. $$S' = \sum_{k=1}^{n} (1+r)^{-k} = (1+r)^{-1}\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{1-(1+r)^{-1}}\right) = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \tag{I.6d}$$

Théorème 14. *Soit (u_n) une suite géométrique non nulle de raison q est* ***bornée*** *si, et seulement si, $|q| < 1$.*

Théorème 15. • *Si $-1 < q < 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$*
- *Si $q = 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$*
- *Si $q > 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$*
- *Si $q \leq -1$, (q^n) est alternée et n'a pas de limite.*

Preuve : Lorsque $q > 0$, il suffit de se souvenir de la limite de la fonction f définie par $f(x) = q^x = e^{x \ln q}$. On admet le théorème lorsque $q < 0$ ■

Conséquence importante : Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \in]-1; 1[$, alors (u_n) converge vers 0.

3.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 8. *Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que pour tout entier n : $u_{n+1} = au_n + b$*

Remarque : Si $a = 1$, (u_n) est une suite arithmétique de raison b et si $b = 0$ (u_n) est une suite géométrique de raison a

Etude d'une suite arithmético-géométrique : l'étude d'une suite arithmético-géométrique peut se ramener à l'étude d'une suite géométrique

Définition 9. *Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \neq 1$. On appelle équation caractéristique associé à la suite (u_n) l'équation $(E)\ :\ x = ax + b$*

Proposition 2. *Avec les notations précédentes, soit α l'unique solution de (E),*

$$\text{La suite } (v_n) \text{ définie par } v_n = u_n - \alpha \text{ est une suite géométrique de raison } a \tag{I.7}$$

Conséquence : On peut exprimer v_n en fonction de n puis u_n

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (u_0 - \alpha) \times a^n \text{ et } u_n = (u_0 - \alpha) \times a^n + \alpha$$

Exemple 22. soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ Exprimer (u_n) en fonction de n, puis en déduire la limite de (u_n).

Exemple 23. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 15$. Exprimer (u_n) en fonction de n, puis calculer $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2016-2017**

U.F.R. Économie & Gestion

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Chapitre II : Intérêts

Remarque : Pourquoi l'argent prêté est-il rémunéré par un taux d'intérêt r :

1. Lorsque l'on prête 1 € aujourd'hui, on renonce à une consommation immédiate : il faut une rémunération qui dédommage ce renoncement provisoire. r doit au minimum compenser l'érosion monétaire liée à l'inflation.
2. Lorsque l'on prête de l'argent, il existe un risque de non remboursement : ce risque pris doit être rémunéré également. La rémunération augmentant à mesure que le risque augmente.
3. Coût d'opportunité : si l'on dispose de 100 € et qu'on nous propose par ailleurs de les placer à un taux r, on n'acceptera de prêter cet argent que si l'emprunteur accepte un taux supérieur à r.

1 Intérêts simples

Définition 1. *L'intérêt est dit simple s'il est proportionnel au temps de placement (et à la somme prêtée)*

Ainsi, les intérêts ne s'ajoutent pas au capital pour former ensuite intérêts (voir paragraphe 2 « intérêts composés)

Remarque : *L'intérêt simple est utilisé pour les opérations à court terme (moins de 1 ou 2 ans) : ce sont les opérations du marché monétaire, par ex. le marché interbancaire ou le marché des TCN (Titres de Créances Négociables) : certificats de dépôt / billets de trésorerie / BMTN (Bons à Moyen Terme Négociables) / bons du Trésor*

On note :

- C_0 le capital placé.
- $r\% = \dfrac{r}{100}$ le taux d'intérêt annuel

1.1 Formule fondamentale

L'intérêt I rapporté par le placement C_0 au taux $r\%$ pendant n années est :

$$I = C_0 \times r \times n \tag{II.1a}$$

Illustration graphique : On place 5000 € au taux $r = 9\%$ sur 10 ans.

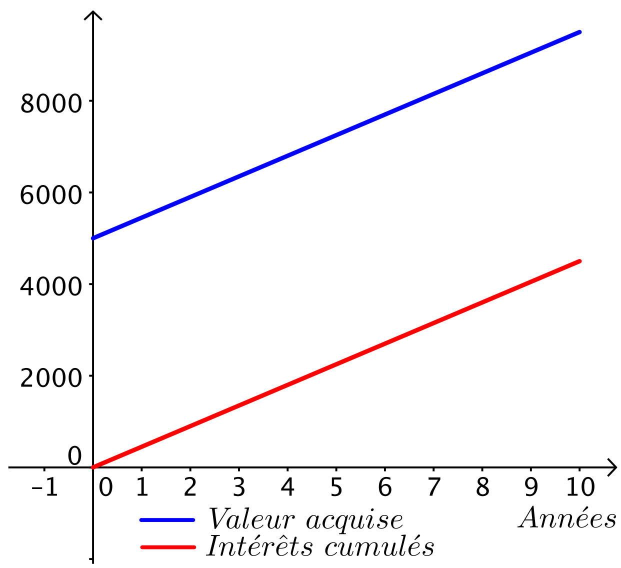


FIGURE 1 – Valeur acquise & intérêts cumulés pour un placement de 5000 € à 9%

On place une somme C_0 pendant m mois au taux d'intérêt annuel r. L'intérêt I rapporté par cette somme est :

$$I = C_0 \times r \times \frac{m}{12} \tag{II.1b}$$

On place une somme C_0 pendant j jours au taux d'intérêt annuel r : par convention, dans les banques, une année commerciale fait 360 jours (on parle d'intérêts commerciaux) alors qu'une année civile fait 365 jours (pour les prêts à courte durée, il faut compter effectivement les jours).

L'intérêt commercial I rapporté par cette somme est :

$$I = C_0 \times r \times \frac{j}{360} \tag{II.1c}$$

L'intérêt civil I' rapporté par cette somme est :

$$I' = C_0 \times r \times \frac{j}{365} \tag{II.1d}$$

La différence est alors

$$I - I' = C_0 \times r \times \frac{j}{360} - C_0 \times r \times \frac{j}{365} = C_0 \times r \times j \times \left(\frac{1}{360} - \frac{1}{365}\right) = \frac{C_0 \times j \times r}{360} \times \frac{1}{73}$$

L'équation **II**.1a permet de déduire :

$$r = \frac{I}{C_0 \times n} \ ; \qquad n = \frac{I}{C_0 \times r} \ ; \qquad C_0 = \frac{I}{n \times r}$$

Exemple 1. La banque vous prête $C_0 = 100\,000$€ sur 60 jours au taux annuel $r = 6\%$. Déterminer les intérêts civils et commerciaux.

1.2 Valeur acquise par un capital (ou valeur future)

Soit C_j la valeur acquise par un capital C_0 placé j jours au taux d'intérêt annuel $r\%$

$$C_j = C_0 + I = C_0 \left(1 + r \cdot \frac{j}{360}\right) \tag{\textbf{II}.2a}$$

Inversement, un capital C_j disponible au bout de j jours admet une valeur actuelle (ou présente) C_0 telle que

$$C_0 = \frac{C_j}{1 + r \cdot \dfrac{j}{360}} \tag{\textbf{II}.2b}$$

La formule (**II**.2a) permet également de calculer le taux d'intérêt ou le nombre de jours de placement

$$r = \left(\frac{C_j - C_0}{C_0}\right)\left(\frac{360}{j}\right) \qquad et \qquad j = \left(\frac{C_j - C_0}{C_0}\right)\left(\frac{360}{r}\right) \tag{\textbf{II}.2c}$$

Exemple 2.

1. Un capital de $7\,000$€ placé du 3 juin au 25 octobre 2014 a produit un intérêt de 49€. Calculer le taux d'intérêt (commercial) proposé par la banque.
2. La valeur acquise d'un capital C_0 placé au taux de $3,5\%$ pendant 63 jours est $281\,715$€. Calculer C_0

1.3 Intérêts précomptés - Taux effectif de placement

Définition 2. *Il arrive parfois que les intérêts soient versés par l'emprunteur le jour de la conclusion du contrat de prêt : l'emprunteur reçoit de la part du prêteur le capital diminué des intérêts. On parle alors d'intérêts précomptés.*

Lorsque l'emprunteur verse les intérêts (au taux « précompté » $r\%$) au prêteur le jour de la conclusion du contrat pour un capital prêté C_0 pendant n années, le taux d'intérêt effectif est r_e.

L'emprunteur reçoit comme capital $C_0 - C_0 \times r \times n$ et doit rembourser C_0 au bout de n années, le taux d'intérêt effectif r_e vérifie donc :

$$(C_0 - C_0 \times r \times n) + (C_0 - C_0 \times r \times n) \times r_e \times n = C_0$$

D'où

$$(1 - r \cdot n)(1 + r_e \cdot n) = 1$$

$$r_e = \frac{r}{1 - r.n} \qquad (\mathbf{II}.3)$$

Si la durée du placement est exprimée en (j) jours :

$$r_e = \frac{r}{1 - r \cdot \frac{j}{360}} \Longleftrightarrow r = \frac{r_e}{1 + r_e \cdot \frac{j}{360}} \qquad (\mathbf{II}.4)$$

Exemple 3. Pour l'achat d'un Bon du Trésor (BT) à taux fixe et intérêts précomptés le 25/04/N, au taux nominal $r = 3\%$, l'échéance est fixée au 26/07/N, date à laquelle l'investisseur percevra 1 Million d'euros. Calculer le montant de l'intérêt, la valeur d'émission du bon (versée le 25/04) et le taux effectif du placement.

- **Escompte**

Définition 3. *Un créancier possède une créance qu'il négocie (vend) à la banque : on dit que la personne remet à l'escompte sa créance/son effet : la banque garde des agios en contrepartie. L'escompte commercial correspond au prix du service rendu par la banque.*

Exemple 4. Le premier janvier de l'année N, M. X vend des marchandises à M. Y pour 20 000 €, avec paiement à 3 mois. Un mois plus tard, M. X a besoin de liquidités. La solution : l'escompte. La banque propose à M. X de lui avancer les fonds : elle verse à M. X le montant minoré des agios (qui sont donc précomptés). La banque pratique un taux annuel de 7%. Calculer l'escompte commercial, ainsi que le taux d'intérêt effectif.

2 Intérêts composés

Définition 4. *On parle d'intérêts composés lorsque le capital placé rapporte des intérêts qui eux mêmes rapportent progressivement des intérêts les années suivantes.*

On note :
- C_0 : le capital placé (exprimé en euros)
- n : la durée du placement, exprimée en années.
- C_p : le capital acquis à la fin de l'année p ($p \in [\![1; n]\!]$)
- I_p : les intérêts reçus pour l'année p
- $r\%$: le taux d'intérêt annuel (soit $\frac{r}{100}$)

• **Principe :**

Après une année, le capital cumulé est égal à

$$C_1 = C_0 + rC_0 = (1 + r)C_0$$

Après deux années, le capital cumulé est égal à

$$C_2 = C_1 + rC_1 = (1 + r)C_1 = (1 + r)^2 C_0$$

Et pour tout entier $p \in [\![1, n]\!]$, en début de chaque année p le capital est

$$C_{p-1} = C_0(1 + r)^{p-1}$$

à la fin de chaque année on obtient un intérêt

$$I_p = C_0(1 + r)^{p-1} \times r$$

à la fin de chaque année le capital acquis est

$$C_p = C_{p-1} + I_p = C_0(1 + r)^p \quad (\mathbf{II}.5)$$

Le capital acquis en fin de période de placement est alors

$$C_n = C_0(1 + r)^n \quad (\mathbf{II}.6)$$

Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de raison $q = 1 + r$ et de premier terme C_0

Illustration graphique de la valeur acquise (ou future) avec quelques taux d'intérêts différents pour un euro placé :

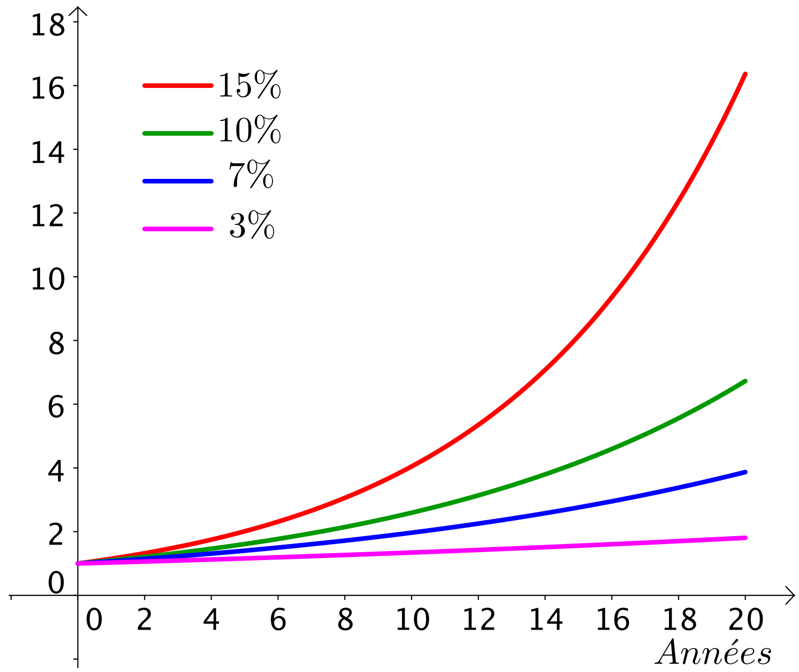


FIGURE 2 – Valeur acquise d'un euro

Calcul du capital cumulé pour différents taux pour $10\,000$ € investis sur 10 ans.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	Capital en début de période (C_(p-1))	Intérêts de la période (I_p)	Capital en fin de période (C_p)		Taux :	5	
2	1	10000,00	500,00	10500,00				
3	2	10500,00	525,00	11025,00				
4	3	11025,00	551,25	11576,25				
5	4	11576,25	578,81	12155,06				
6	5	12155,06	607,75	12762,82				
7	6	12762,82	638,14	13400,96				
8	7	13400,96	670,05	14071,00				
9	8	14071,00	703,55	14774,55				
10	9	14774,55	738,73	15513,28				
11	10	15513,28	775,66	16288,95				
12								

FIGURE 3 – Capital cumulé

Comment remplir le tableur Excel ? (en précisant le taux d'intérêt dans la case G1)

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Année**	**Capital en début de période** ($\mathbf{C_{p-1}}$)	**Intérêts de la période** ($\mathbf{I_p}$)	**Capital en fin de période** ($\mathbf{C_p}$)		**Taux :**	5
2	**1**	10 000	$= B2 \star \$G\$1/100$	= B2+C2			
3	**2**	$= D_2$	$= B3 \star \$G\$1/100$	= B3+C3			

Exemple 5. Un étudiant prévoyant place 100 € sur un compte d'épargne (rémunéré à 2%) le jour de ses vingt ans et attend le jour de sa retraite (à 65 ans) pour retirer le capital cumulé pendant ce temps. Quelle somme récupère-t-il ?

Exemple 6. M. X. place 5 000 € sur un compte à intérêt composé rémunéré à 7%. Au bout de combien d'années son capital initial aura-t-il doublé ?

2.1 Utilisation de la formule de base

La formule (**II**.6) permet d'obtenir :

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+r)^n} \tag{II.6b}$$

$$r = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{II.6c}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{\ln(1+r)} \tag{II.6d}$$

Les intérêts acquis au cours de ces n années :

$$I = C_n - C_0 = C_0\left[(1+r)^n - 1\right] = C_n\left[1 - (1+r)^{-n}\right] \tag{II.7}$$

Exemples 7.

1. Calculer le capital C_0 qui, au taux de $3,5\%$, est devenu $9\,876,07$ € au bout de 8 ans.
2. A quel taux d'intérêt a été placé un capital de 18 000 € qui est devenu 24 781 € au bout de 12 ans ?
3. Au bout de combien d'année un capital initial de 1 500 € placé à $1,25\%$ est-il devenu 2098 € ?

Graphique : comparaison capitalisation intérêt simple / intérêt composé

Sur le graphique suivant on a calculé la capitalisation de 1 000 euros placés au taux de 8% sur une période de 30 ans, afin de comparer les intérêts simples et les intérêts composés :

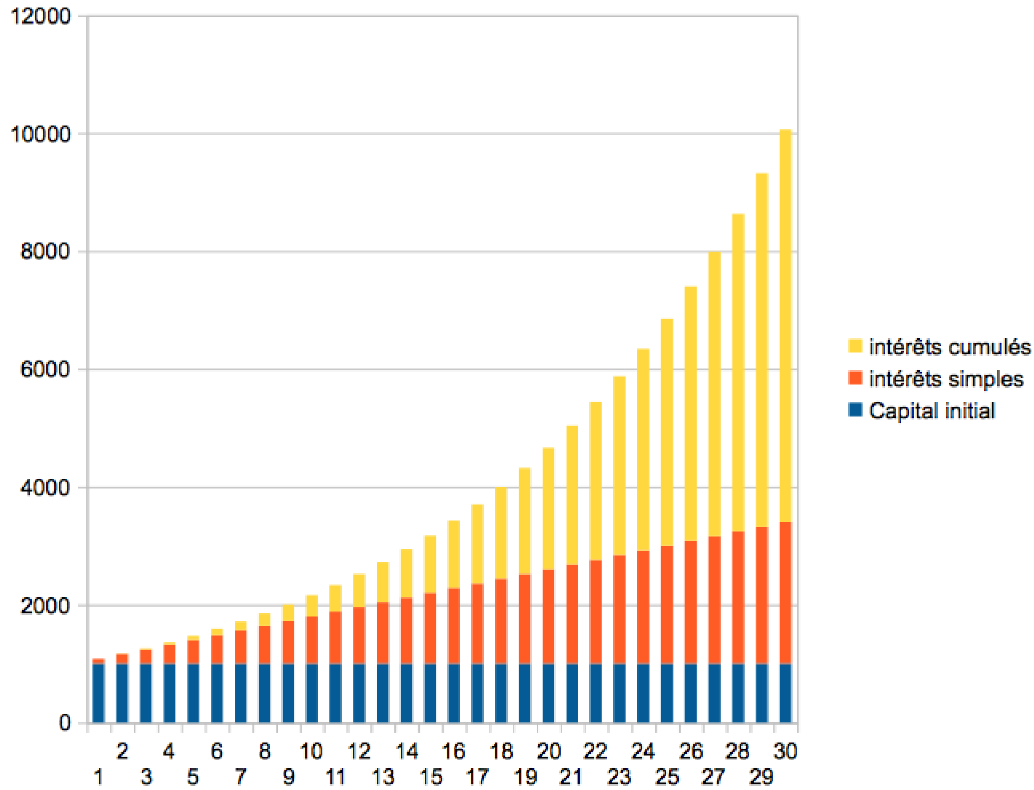


FIGURE 4 – Intérêts simples /composés

3 Taux d'intérêts équivalents - Taux effectif - Capitalisation continue

Exemple 8. On place à intérêt composé 10 000 € pendant 4 ans au taux annuel $r = 3\%$. Quel est le capital acquis en fin de période ?

La banque propose de verser les intérêts tous les trimestres (et non pas à chaque date anniversaire du dépôt) : quel doit être le taux d'intérêt trimestriel pour obtenir le même capital en fin de période ?

• Taux équivalent / taux proportionnel :

Définition 5. *On considère un placement au taux annuel $r\%$.*

• *Le taux équivalent r_k est le taux d'intérêt relatif à une période k fois plus petite que l'année, de telle sorte que le capital acquis soit le même : dans ce cas r_k vérifie :*

$$(1+r) = (1+r_k)^k \iff r_k = (1+r)^{\frac{1}{k}} - 1 \qquad \text{(II.8)}$$

• *Le taux proportionnel r'_k relatif à une période k fois plus petite que l'année, vérifie :*

$$r'_k = \frac{r}{k} \qquad \text{(II.9)}$$

(utilisé parfois par les établissements bancaires)

Exemple 9. Pour un taux annuel $r = 6\%$, le taux semestriel équivalent est $r_2 = \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 2,956\%$

Remarque : avec ces notations, on a : $r_k < r'_k$:

En effet, on a $(1+r_k)^k = 1+r$ et $(1+r'_k)^k = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = 1+k\frac{r}{k}+\binom{k}{2}\left(\frac{r}{k}\right)^2+\cdots+\left(\frac{r}{k}\right)^k > 1+r$. Donc $(1+r_k)^k < (1+r'_k)^k$ et $r_k < r'_k$.

Exemple 10. On place un capital de 20 000 € au taux annuel de 8%. Quelle est le capital acquis au bout de 7 ans et 3 mois ?

Proposition 1. *Si on utilise des taux proportionnels, la capitalisation augmente avec la fréquence de capitalisation : voir exemple suivant.*

Exemple 11. On place 1 000 € à un taux annuel $r = 12\%$

Si la capitalisation est annuelle : le capital obtenu au bout d'un an est $C_1 = 1000 \times (1+0,12) = 1120$ €.

Si la capitalisation est semestrielle : le capital obtenu est $\mathcal{C}_2 = 1000 \times \left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^2 = 1123,6$ €

Si la capitalisation est trimestrielle : le capital obtenu est $\mathcal{C}_4 = 1000 \times \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^4 = 1125,51$ €

Si la capitalisation est mensuelle : le capital obtenu est $\mathcal{C}_{12} = 1000 \times \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12} = 1126,83$ €

On peut bien entendu poursuivre ce raisonnement et observer une capitalisation quotidienne : le capital obtenu est $\mathcal{C}_{360} = 1000 \times \left(1 + \frac{0,12}{360}\right)^{360} = 1127,47$ €.

Périodicité	Nbr de périodes	Taux effectif
Annuelle	1	12,000%
Semestrielle	2	12,360%
Trimestrielle	4	12,551%
mensuelle	12	12,683%
Bi-mensuelle	24	12,716%
hebdomadaire	52	12,734%
Quotidienne	360	12,747%
continue	infini	12,75%

FIGURE 5 – Taux effectifs pour des périodicités de plus en plus rapprochées

• **Taux annuel effectif r_e équivalent au taux proportionnel $\frac{r}{k}$**

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k - 1 \qquad (\mathbf{II}.10)$$

Remarque : avec ces notations, on a : $r_e > r$:

• Comportement asymptotique : Capitalisation continue

Définition 6. *On considère une période de capitalisation k fois plus petite que l'année, en considérant le taux d'intérêt proportionnel $\frac{r}{k}$. Lorsque l'on suppose que k tend vers $+\infty$, on parle de capitalisation continue ou instantanée. On note j le taux d'intérêt annuel d'une telle capitalisation.*

D'après la formule **(II.10)** on a $r_e = \left(1+\frac{r}{k}\right)^k - 1$, et on veut étudier $j = \lim r_e = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(1+\frac{r}{k}\right)^k - 1$

$\lim\limits_{k\to+\infty} k\ln\left(1+\frac{r}{k}\right) = \lim\limits_{k\to+\infty} r\frac{\ln\left(1+\frac{r}{k}\right)}{\frac{r}{k}} = r$ car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (c'est un nombre dérivé)

D'où par passage à l'exponentielle :

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{r}{k}\right)^k = e^r \quad \text{donc} \quad j = \lim_{k\to+\infty} r_e = e^r - 1 \tag{\textbf{II}.11}$$

Exemple 12.

1. Calculer le taux de capitalisation instantané j correspondant au taux d'intérêt annuel de 10%
2. Quel taux d'intérêt annuel r correspond à une capitalisation continue du capital qui permet à celui-ci d'être multiplié au bout d'un an par 1,09

4 Actualisation et capitalisation

On note :
• VA_0 : la valeur actuelle du capital.
• $r\%$: le taux d'intérêt annuel. (intérêt composé)
• VF_n : la valeur au bout de n années du capital. On parle aussi de valeur future ou acquise ou définitive.

$$VF_n = VA_0(1+r)^n \Longleftrightarrow VA_0 = \frac{VF_n}{(1+r)^n} \tag{\textbf{II}.12}$$

Si on note $u = (1+r)$, le *facteur de capitalisation* et $v = (1+r)^{-1}$ le *facteur d'actualisation* la formule **??** donne

$$VF_n = VA_0 u^n \quad \text{et} \quad VA_0 = VF_n v^n$$

La valeur du capital au bout de $p \in [\![1, n]\!]$ années, est donnée par

$$V_p = VA_0 u^p = VF_n v^n u^p = VF_n(1+r)^{n-p}$$

Exemple 13. On place de l'argent à un taux de $r = 10\%$

1. Combien dois-je placer aujourd'hui (VA_0) pour capitaliser $VF_1 = 1\,000$ € dans un an ?
2. Quelle est la valeur actuelle de 1 000 € placés dans 2 ans ?

Proposition 2. *Le coefficient d'actualisation est d'autant plus faible que le taux d'intérêt est élevé et l'horizon temporel est long.*

ILLUSTRATION : Valeur actuelle de 1 000 € pour différentes périodes de temps en abscisses et différents taux d'intérêt

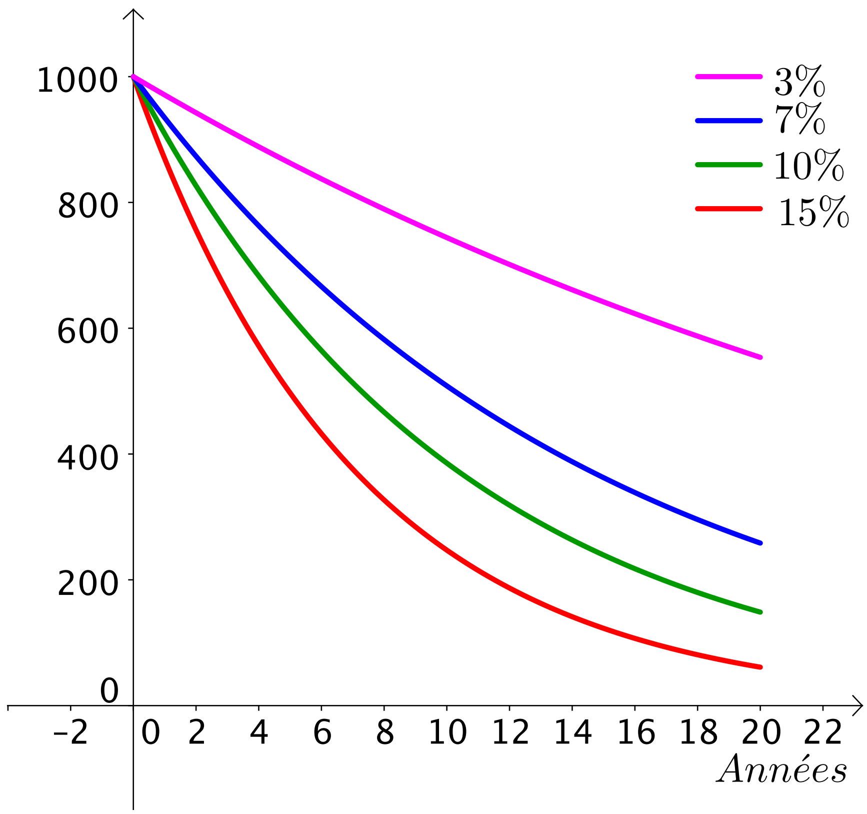


FIGURE 6 – Valeur actuelle de 1 000 euros

Conclusion : Actualisation et capitalisation sont les deux faces du même phénomène : le prix (la valeur) du temps

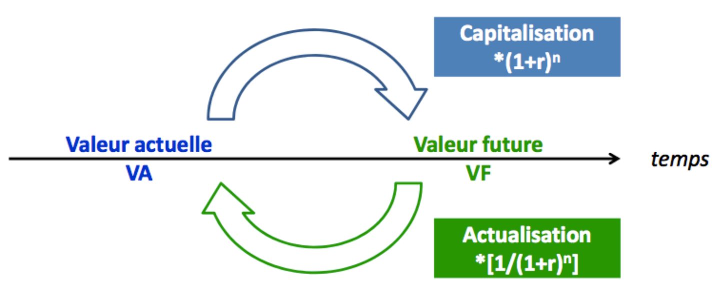


FIGURE 7 – Actualisation / capitalisation

4.1 Escompte à intérêt composé

Rappel : Une personne possède une créance qu'il négocie (vend) à la banque. L'escompte commercial correspond au prix du service rendu par la banque.

On note :

• VN : la valeur nominale de la créance négociée, à la date de négociation.

• $r\%$: le taux d'escompte annuel à intérêt composé proposé par la banque.

• n : le nombre d'années séparant la date de remise de l'escompte de la date d'échéance de l'effet.

• V_0 : la valeur actuelle commerciale : c'est la somme remise par la banque contre la créance.

• e : l'escompte commercial.

Ainsi,

$$e = VN - V_0 \tag{II.13}$$

$$VN = V_0 \times (1+r)^n \iff V_0 = V_N \times (1+r)^{-n} \tag{II.14}$$

Exemple 14. Une créance de nominal $VN = 150\,000$ € à échéance 8 ans est négociée au taux annuel $r = 6\%$. Calculer sa valeur actuelle puis le montant de l'escompte commercial.

Remarque : Par convention, on utilisera les formules **(II.13)** et **(II.14)** lorsque la durée séparant la date de remise de l'escompte à la banque de la date d'échéance de l'effet est supérieure à un an.

UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2016-2017**

U.F.R. Économie & Gestion

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Chapitre III : Séquences de flux

A la différence du précédent chapitre où l'on étudiait le rendement d'un placement unique, il s'agit ici de présenter les méthodes et outils pour évaluer des choix financiers à flux multiples, comme par exemple :

- Achat d'une action : dividendes, prix de revente.
- Achat d'une obligation : coupon, valeur de remboursement.
- Projet d'investissement : des flux (dépenses /recettes) sur plusieurs années sont impliqués.
- Emprunt à la banque : mensualités sur de nombreuses années.

Pour cela on utilise un outil pratique : **l'échéancier**

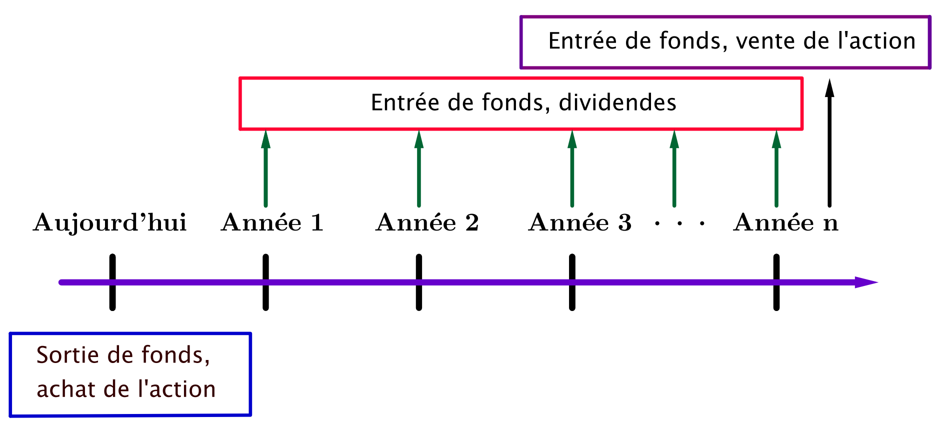


Figure 1 – Échéancier de l'achat/revente d'une action

Dans ce chapitre, on s'intéressera essentiellement à des flux versés **périodiquement**.

1 Annuités

Définition 1. *Une suite d'annuités est une suite de règlements/versements réalisés chaque année.*
On définit de manière similaire les « semestrialités », « trimestrialités », « mensualités »
Si les annuités sont identiques, on parle d'annuités constantes. Il existe deux types d'annuités :
- *Ordinaires : si le flux est touché (respect. versé) en fin de période*
- *Immédiates : si le flux est touché (respect. versé) en début de période.*

1.1 Valeur acquise et valeur actuelle d'une suite d'annuités de durée n

Exemples 1.

1. Un particulier décide de placer sur son livret A, $A_1 = 1000$ € la première année, $A_2 = 1100$ € la seconde année, $A_3 = 1200$ € la troisième année ... et ceci pendant 10 ans : de quelle somme disposera-t-il sur son livret juste après le $10^{\text{ième}}$ versement ?
2. Une entreprise veut investir aujourd'hui un montant I_0 (par exemple, des dépenses de R&D ou des tests cliniques pour développer un médicament). Cette entreprise touchera des flux positifs (profits liés aux ventes) pendant un certain nombre d'années (par ex. 20 ans avant que le brevet ne tombe dans le domaine public). Cette entreprise n'envisagera d'investir que si le projet rapporte (les annuités A_1, A_2 ....) plus qu'il ne coûte (I_0). Pour cela, il lui faut tout rapporter en année 0, c'est l'actualisation.

Par convention, l'origine 0 (« aujourd'hui ») de la suite des versements se situera **une période AVANT** le premier versement. Par exemple, lors d'un emprunt, la date 0 correspond au versement du prêt par la banque et les mensualités de remboursement aux dates 1, 2 ....

On note :

- $r\%$ le taux de capitalisation attaché à la même période que la suite des versements.
- A_k le montant du $k^{\text{ième}}$ versement ($k \in [\![1;n]\!]$) : les versements sont effectués à intervalles de temps réguliers : la période. Cette période peut être l'année, le semestre, le trimestre ou le mois.
- VF_n la valeur acquise (ou future, ou définitive) exprimée à la date n, immédiatement après le $n^{\text{ième}}$ versement.
- VA_0 : la valeur actuelle (à la date 0) des n versements.

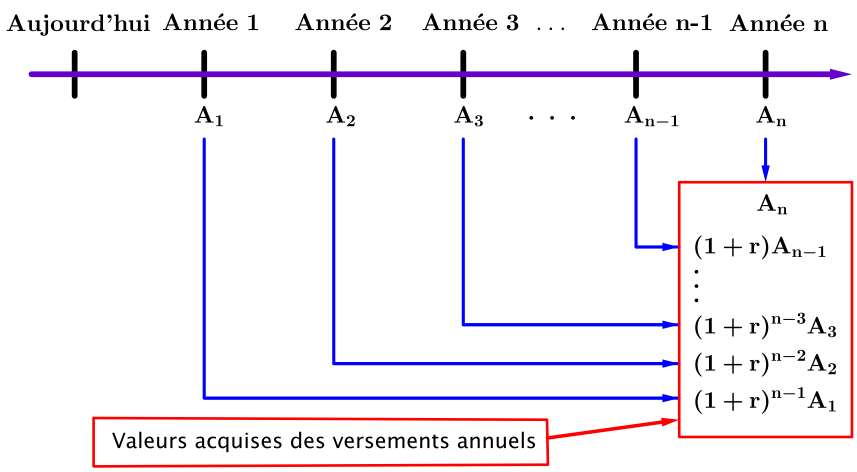
Les deux équations fondamentales pour le calcul de VF_n et VA_0 : (voir illustration page suivante)

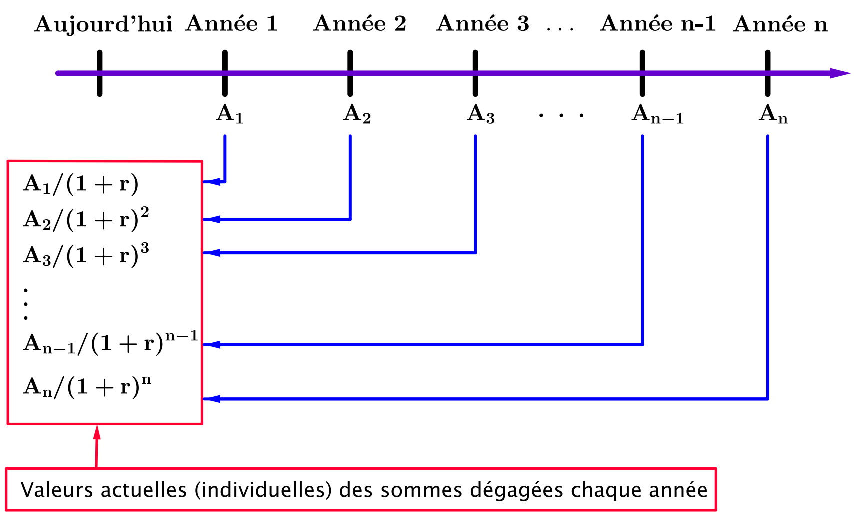
$$VF_n = \sum_{k=1}^{n} A_k(1+r)^{n-k} \qquad (\textbf{III}.1)$$

$$VA_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k(1+r)^{-k} \qquad (\textbf{III}.2)$$

Remarque :

$$VF_n = VA_0 \times (1+r)^n \quad \text{et } VA_0 = \frac{VF_n}{(1+r)^n} \qquad (\textbf{III}.3)$$



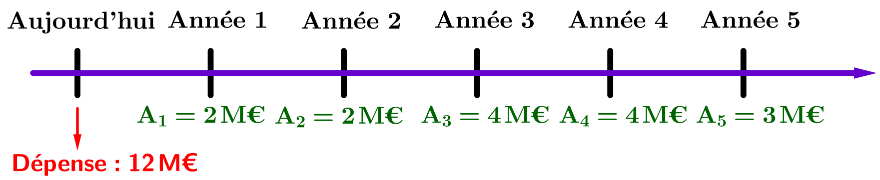


Exemple 2. M. X. prévoit de placer sur son livret A (royalement rémunéré à $0,75\%$), 1000 € dans 1 an, 2000 € dans 2 ans, et 1500 € dans 3 ans et dans 4 ans.

1. De combien M. X. disposera dans 4 ans ?
2. De combien M. X. disposera dans 5 ans s'il laisse son épargne un an de plus sur son livret A ?

Exemple 3. Un entrepreneur envisage l'achat d'une machine dont le coût est de 12 millions d'euros, la réalisation de ce projet rapportera 2 millions d'euros en années 1 et 2, 4 millions d'euros en années 3 et 4, et 3 millions d'euros en année 5. Les actionnaires exigent 8 % de rendement. L'investissement soit-il être réalisé ?

On peut se poser la question de savoir s'il n'existerait pas une (des ?) formule(s) pour pouvoir calculer directement VF_n ou VA_0 : ce sera le cas pour certains types d'annuités.



1.2 Cas de versements constants

Dans cette section, on suppose que pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, $A_k = A$, $V\!F_n$ représente alors la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $q = 1 + r$ et de premier terme A

$$\text{Si } \forall k \in [\![1;n]\!],\ A_k = A,\ V\!F_n = A\frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad \text{et } V\!A_0 = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \tag{III.4}$$

Exemple 4. Je souhaite disposer d'un capital de 300 000 € dans 5 ans. Je peux placer l'argent à un taux de 3%. Quel est le montant de l'annuité à verser chaque année ?

Exemple 5. On veut disposer de 30 000 € en plaçant 4 000 € par an au taux $r = 3\%$. Dans combien d'année disposera-t-on de ce capital ?

Exemple 6. Ma capacité de remboursement d'un prêt à la consommation est de 2500 € par an pendant 5 ans, la banque accepte de me prêter au taux de 3% par an. Quelle somme puis-je emprunter ?

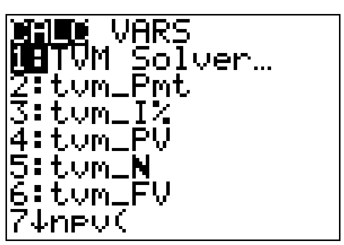
Exemple 7. Je souhaite acheter un appartement d'une valeur de 250 000 €. Ma banque me prête ce montant sur une durée de 20 ans à un taux $r = 4,2\%$, on fera les calculs avec **un taux proportionnel**. Quel est le montant de la mensualité versée à ma banque ?

Exemple 8. Cette fois, toujours avec un prêt bancaire de 250 000 € à $r = 4,2\%$, l'emprunteur a une capacité de remboursement de 1 200 € par mois. Quelle sera la durée de l'emprunt ?

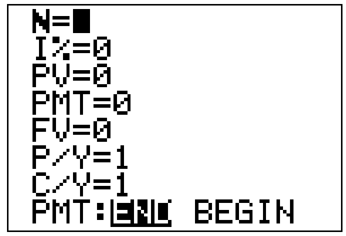
Même question si le taux n'est plus que de 3, 2%

• **Utilisation des fonctions financières de la TI-82** Les fonctions financières de la TI s'obtiennent en faisant 

.

Apparaît le menu suivant 

Sélectionner **1 : TVM Solveur**

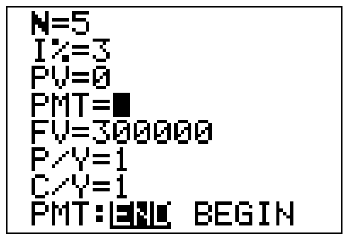
Apparaît alors la liste de variables suivante : 

(Sur les calculatrices « en français », les noms diffèrent légèrement : PV = Val Act (valeur actuelle). PMT = Paiement : il est toujours affecté d'un signe négatif, car correspond à une sortie d'argent. FV = Val Acq (valeur acquise). P/Y = Ech/An (échéances annuelles). C/Y = Pér/An (Périodes dans l'année)) On va résoudre les 5 exemples précédents à l'aide de cette application.

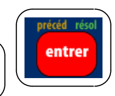
Pour la TI 83 : aller dans 

, puis sélectionner 1 :Finance

- Pour l'exemple **III.4** : il faut compléter la liste de la manière suivante

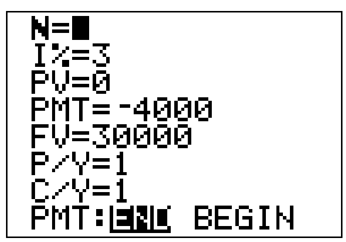


Puis revenir avec le curseur sur l'inconnue cherchée (ici PMT) et faire 



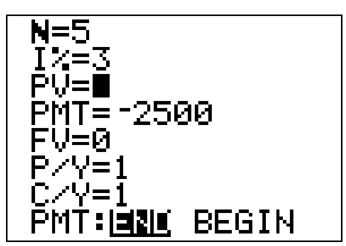
La calculatrice complète et donne **PMT=-56506.371...** (le signe « - » signifie une sortie d'argent)

- Pour l'exemple **III.5** : il faut compléter la liste de la manière suivante



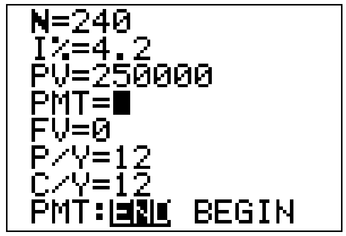
On demande à la calculatrice de résoudre **N= 6.865665338...**

- Pour l'exemple **III.6** : il faut compléter la liste de la manière suivante



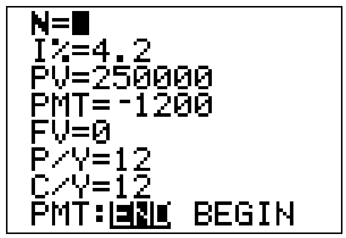
On demande à la calculatrice de résoudre **PV= 11449.26797...**

- Pour l'exemple **III.7** : il faut compléter la liste de la manière suivante



On demande à la calculatrice de résoudre **PMT= -1541.4268...**

- Pour l'exemple **III.8** : il faut compléter la liste de la manière suivante



On demande à la calculatrice de résoudre **N= 373.8675036...**

Définition 2. ***Échéance moyenne :*** *C'est la date x à laquelle on peut faire un unique versement de nA afin d'obtenir le même capital VF.*

L'égalité des deux valeurs futures donne :

$$A\frac{(1+r)^n-1}{r} = nA(1+r)^{n-x} \iff (1+r)^x = \frac{nr}{1-(1+r)^{-n}} \qquad (\textbf{III}.5)$$

Exemple 9. Plutôt que de faire 12 versements de 800 € chaque 1^{er} du mois pendant un an au taux $r = 2,2\%$, ma banque me propose de faire un uniquement versement de 9600 €. A quelle date doit avoir lieu ce versement unique ?

1.3 Cas des annuités en progression géométrique de raison q

On suppose que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $A_k = A_1 q^{k-1}$

Si l'énoncé précise que les versements augmentent de $x\%$ chaque année, alors $q = 1+\dfrac{x}{100}$.

Premier cas : $q \neq 1+r$ ($\Leftrightarrow x \neq r$)

$$VF_n = A_1\left(\frac{(1+r)^n-q^n}{1+r-q}\right)$$

$$\text{et } VA_0 = VF_n \times (1+r)^{-n} = \frac{A_1}{(1+r)^n}\left(\frac{(1+r)^n-q^n}{1+r-q}\right) \qquad (\textbf{III}.6)$$

Second cas : $q = 1 + r$

$$VF_n = nA_1(1+r)^{n-1} \text{ et } VA_0 = VF_n \times (1+r)^{-n} = nA_1(1+r)^{-1} \tag{III.7}$$

Exemple 10. On effectue un placement au taux de capitalisation annuel de $r = 8\%$ pendant 12 ans. La première annuité est de 1 000 € puis les annuités suivantes sont en progression géométrique. Déterminer la valeur acquise et la valeur actuelle lorsque le taux d'actualisation est 10%, puis 8%.

2 Rente perpétuelle

Définition 3. *Une personne est titulaire d'une rente lorsqu'elle est créancière de sommes qui lui sont versées à intervalles de temps réguliers. La durée qui sépare deux versements consécutifs de la rente est dite période de la rente. L'ensemble des versements constitue la rente, chaque versement étant un terme de la rente.*

Définition 4. *On appelle rente perpétuelle un titre financier dont le nombre de versements n tend vers $+\infty$.*

Cas d'une rente perpétuelle à termes constants, on note :
- $r\%$: le taux d'intérêt rattaché à la rente
- A : Montant du terme
- $VA_0(RP)$: La valeur actuelle de la rente perpétuelle.

$$VA_0(RP) = \frac{A}{r} \tag{III.8}$$

Exemple 11. Mme X. a gagné le 12 mai 2014 à un jeu télévisé une rente perpétuelle de 800 € qui sera versée tous les ans à la date anniversaire, à partir du 12 mai 2015. La valeur actuelle de sa rente, en considérant un taux d'intérêt de $0,75\%$ (livret A) est égale à $106\,666,67$ €.

3 Critères de choix d'investissement - Taux actuariel

Introduction : Une problématique financière importante :
- Décision d'emprunt : données transmises par mon banquier
  - Le montant qu'il me prête aujourd'hui
  - Les mensualités/annuités que je rembourserai dans le futur.

  Exemple : Pour un prêt de 20 000 € les mensualités sont de 750 € pendant 4 ans.

- Décision d'investissement : j'évalue
  - Le montant à investir aujourd'hui
  - Les flux que rapportent l'investissement

Exemple :

Année	Aujourd'hui	1	2	3	4	5
Flux financier	Dépense de 12 M€	perçoit 2 M€	perçoit 2 M€	perçoit 3 M€	perçoit 3 M€	perçoit 4 M€

Dans ces deux exemples, il manque une inconnue d'importance : le taux d'intérêt de l'emprunt ou le taux de rentabilité de l'investissement ....

3.1 Taux actuariel

Définition 5. *Soient A_0 le flux à la date 0 (prêt de banque ou bien montant de l'investissement) et A_k les flux aux dates $k \in [\![1; n]\!]$. On appelle taux actuariel, le réel x tel que*

$$A_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k \times \frac{1}{(1+x)^k} \qquad (\mathbf{III}.9)$$

• Interprétation dans le cas de l'emprunt :

— Le taux actuariel est le taux qui égalise entrée de fonds aujourd'hui et valeur actuelle des sorties de fonds futures.

— Pour l'emprunteur : coût de son financement « je m'endette à $x\%$ »

— Pour le banquier : ce que rapporte le financement : l'emprunt consenti dégage une rentabilité de $x\%$

Exemples 12.

1. Cas de l'emprunt : on emprunte 200 000 € sur 15 ans que l'on rembourse par 15 annuités constantes de $A = 18500$ €.
   on cherche x tel que
   $$200\,000 = \sum_{k=1}^{15} 18500 \times \frac{1}{(1+x)^k} = 18500 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^{15}}{x} \qquad (E_0)$$
2. Cas de l'investissement : une entreprise envisage un investissement de 12M€ aujourd'hui, investissement qui devrait lui rapporter 2 M€ les années 1 et 2, 3 M€ les années 3 et 4 et 4M€ l'année 5
   On cherche x tel que
   $$12 = \frac{2}{(1+x)^1} + \frac{2}{(1+x)^2} + \frac{3}{(1+x)^3} + \frac{3}{(1+x)^4} + \frac{4}{(1+x)^5} \qquad (E_1)$$

Réponses :

Le Point commun à ces deux équations : on ne peut pas les résoudre directement par résolution algébrique

Pour résoudre une telle équation, on peut utiliser la méthode d'interpolation linéaire

Cas 1 . • En utilisant les tables : lire la table à double entrée de la valeur actuelle d'une suite de n annuités de 1 euro ou valeur de $V_0 = \dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

Table IV – Valeur actuelle d'une suite de n annuités de 1 euro

ou valeur de $V_0 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

PÉRIODES	4,25 %	4,50 %	4,75 %	5 %	5,25 %
1	0,959 233	0,956 938	0,954 654	0,952 381	0,950 119
2	1,879 360	1,872 668	1,866 018	1,859 410	1,852 844
3	2,761 976	2,748 964	2,736 055	2,723 248	2,710 541
4	3,608 610	3,587 526	3,566 640	3,545 950	3,525 455
5	4,420 729	4,389 977	4,359 561	4,329 477	4,299 719
6	5,199 740	5,157 872	5,116 526	5,075 692	5,035 363
7	5,946 993	5,892 701	5,839 166	5,786 373	5,734 311
8	6,663 782	6,595 886	6,529 036	6,463 213	6,398 396
9	7,351 350	7,268 790	7,187 624	7,107 822	7,029 355
10	8,010 887	7,912 718	7,816 348	7,721 735	7,628 840
11	8,643 537	8,528 917	8,416 561	8,306 414	8,198 423
12	9,250 395	9,118 581	8,989 557	8,863 252	8,739 595
13	9,832 513	9,682 852	9,536 570	9,393 573	9,253 772
14	10,390 900	10,222 825	10,058 778	9,898 641	9,742 301
15	10,926 523	10,739 546	10,557 306	10,379 658	10,206 462
16	11,440 309	11,234 015	11,033 228	10,837 770	10,647 469
17	11,933 151	11,707 191	11,487 568	11,274 066	11,066 479

On trouve dans la ligne $n = 15$ deux valeurs encadrant $\frac{200000}{18500} \approx 10,81$ puis on utilise l'interpolation linéaire.

abscisse	4,25	x	4,50
ordonnée	10,926	10,81	10,740

$$\frac{x - 4,25}{10,81 - 10,926} = \frac{4,50 - 4,25}{10,740 - 10,926} \iff x \approx 4,41$$

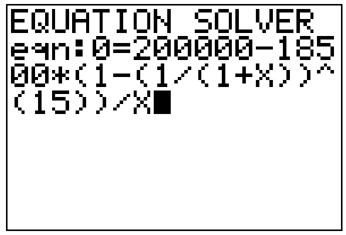
• En utilisant la calculatrice :

On remplit la liste de 1 : TVM Solveur de la façon suivante

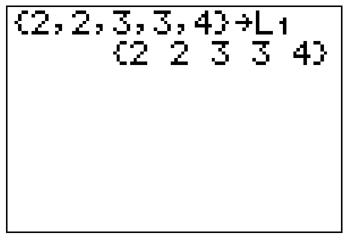
```
N=15
I%=0
PV=200000
PMT=-18500
FV=0
P/Y=1
C/Y=1
PMT:END BEGIN
```

On demande à la calculatrice de résoudre **I%= 4.403953....**

On peut également utiliser le solveur de la calculatrice (obtenu par MATH, puis SOLVEUR)

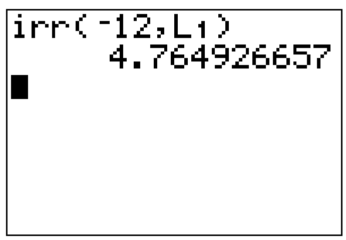


Cas 2 On peut utiliser la fonction TRI (ou IRR) de la calculatrice
On met les valeurs (sauf A_0) dans une liste : $\{2\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 3\ ,\ 4\} \to L_1$
( Pour implémenter une liste, il faut utiliser des accolades)



Puis on sélectionne dans 

la fonction **8 : irr(** ou **8 : tauxRi(** et on complète par



3.2 Critère de la VAN (Valeur actuelle nette)

On note :

- A_0 : l'investissement initial (ou l'emprunt initial)
- n : la durée de l'investissement
- A_k : le flux à la date k, $k \in [\![1, n]\!]$
- $r\%$: le taux d'intérêt
- V_n : la valeur résiduelle à l'année n (lorsqu'elle existe)

Définition 6. *La VAN : la Valeur Actuelle Nette permet de comparer l'investissement initial de l'entreprise A_0 à la somme des flux de trésorerie actualisés (au taux r) à la date* 0.

$$VAN(r) = -A_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(1+r)^k} + \frac{V_n}{(1+r)^n} \qquad (\textbf{III}.10)$$

L'investissement doit être envisagé si $VAN(r) \geq 0$

Exemple 13. Le 01/01/N une entreprise envisage un lourd investissement réglé en trois versements de 400 000 € chacun les 01/01/N+2 ; 01/01/N+4 et 01/01/N+6. Cet investissement permettra l'achat de machines dont la durée d'action est estimée à 6 ans.
Cet investissement devrait lui permettre de réaliser des recettes annuelles estimées dans l'ordre, pour les 6 années à partir du 1er janvier de l'année $N + 1$: 150 000 €, 200 000 €, 250 000 €, 200 000 €, 200 000 €, et 100 000 €.

A la fin de ces 6 années, l'entreprise revendra ce matériel et espère en obtenir 50 000 €.

Calculer la VAN pour cet investissent avec un taux d'intérêt de 8% . L'investissement doit-il être réalisé ?

3.3 Critère du TRI (Taux de rentabilité interne)

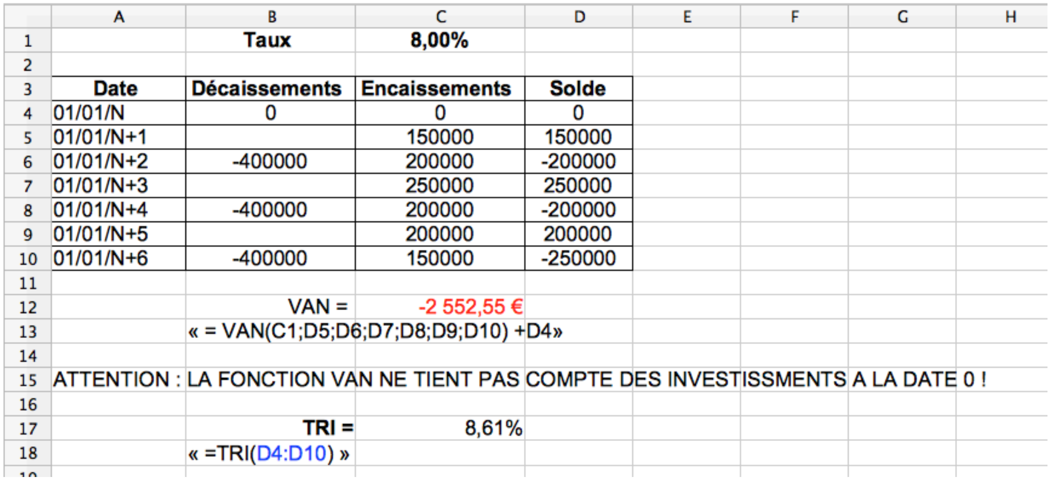
Le TRI est le taux d'actualisation x pour lequel la VAN est nulle :

$$VAN(x) = 0 = -A_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(1+x)^k} + \frac{V_n}{(1+x)^n} \qquad (\textbf{III}.11)$$

Remarque : Pour connaître cette valeur, il faut utiliser la calculatrice ou un logiciel (comme Excel ou LibreOffice) ou une table de valeurs (quitte à faire une interpolation linéaire) ou obtenir une valeur approchée avec un tableau de valeurs sur calculatrice.

Exemple 14. Calculer le TRI de l'exemple précédent.

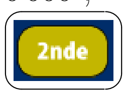
1. Avec un tableur (Excel) :

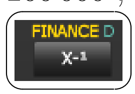


	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Taux	8,00%					
2								
3	Date	Décaissements	Encaissements	Solde				
4	01/01/N	0	0	0				
5	01/01/N+1		150000	150000				
6	01/01/N+2	-400000	200000	-200000				
7	01/01/N+3		250000	250000				
8	01/01/N+4	-400000	200000	-200000				
9	01/01/N+5		200000	200000				
10	01/01/N+6	-400000	150000	-250000				
11								
12		VAN =	-2 552,55 €					
13		« = VAN(C1;D5;D6;D7;D8;D9;D10) +D4»						
14								
15	ATTENTION : LA FONCTION VAN NE TIENT PAS COMPTE DES INVESTISSMENTS A LA DATE 0 !							
16								
17		TRI =	8,61%					
18		« =TRI(D4:D10) »						

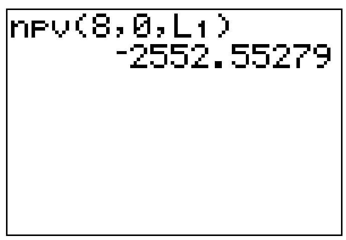
2. Avec la calculatrice : On rentre la liste suivante dans L_1 :

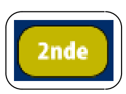
$\{150\,000\ ,\ -200\,000\ ,\ 250\,000\ ,\ -200\,000\ ,\ 200\,000\ ,\ -250\,000\} \to L_1$

Puis on sélectionne dans 

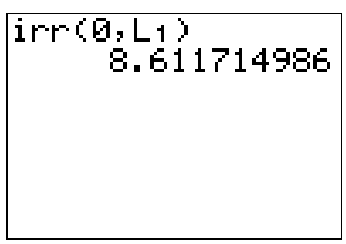


la fonction **7 : npv(** (pour Net Present Value) ou **7 : vActNet(** et on complète par :



Puis on sélectionne dans 

la fonction **8 : irr(** (pour interne rate of return) ou **8 : tauxRi(** et on complète par :



UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2016-2017**

U.F.R. Économie & Gestion

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Chapitre IV : Emprunts indivis

Définition 1. ***Titre de dettes***

• *Un titre de dette est un titre financier qui matérialise l'engagement d'un emprunteur envers un prêteur qui, en contrepartie, met des fonds à sa disposition.*

• *Titre à revenu fixe : l'emprunteur s'engage à payer au détenteur du titre des versements déterminés : paiement des intérêts et remboursement du capital, jusqu'à une certaine échéance (maturité)*

• *La dette s'éteint lorsque le dernier versement est réalisé : l'échéance est ainsi connue.*

• *Il existe deux grands deux grands types de dettes*

— *Emprunt indivis*

— *Emprunt obligataire, où la différence porte essentiellement sur le nombre de prêteurs, voir chapitre suivant*

Définition 2. *Un emprunt indivis est un emprunt accordé à une personne unique par un prêteur unique : l'emprunteur peut être une personne physique ou morale et le prêteur est généralement une banque. Le crédit peut être soit affecté à l'acquisition d'un bien identifié (crédit immobilier ...), soit non affecté (crédit à la consommation ...)*

1 Tableau d'amortissement

• Schéma général :

1. A la date 0, la banque accorde un prêt à M. X
2. A intervalles déterminés, M. X verse des fonds à la banque, pour simplifier le vocabulaire, on parlera d'annuités.

Décomposition des versements de M. X :
L'annuité de la période comprend :
— Pour partie les intérêts sur le capital à rembourser
— et une fraction de l'amortissement (somme correspondant au remboursement du capital)

• On présente les annuités dans un tableau d'amortissement vérifiant :
— Le nombre de lignes est égal au nombre de périodes
— Pour chaque période, on fait apparaître
  — Le capital restant à rembourser (Capital restant dû = CRD) en début de période
  — Les intérêts versés au titre de la période
  — Le montant de l'amortissement remboursé sur la période
  — Le montant de l'annuité versée sur la période
  — Le capital restant dû en fin de période

• **Tableau d'amortissement** pour le remboursement d'un capital emprunté C_0 au taux d'intérêt $r\%$ sur n années :

Période (**p**)	Capital restant dû (CRD) en début de période ($\mathbf{C_{p-1}}$)	Intérêt de la période ($\mathbf{I_p}$)	Amortissement de la période ($\mathbf{M_p}$)	Annuité de la période ($\mathbf{A_p}$)	Capital restant dû en fin de période ($\mathbf{C_p}$)
1	C_0	rC_0	M_1	$rC_0 + M_1$	$C_0 - M_1$
2	C_1	rC_1	M_2	$rC_1 + M_2$	$C_1 - M_2$
$\vdots$					$\vdots$
p	C_{p-1}	rC_{p-1}	M_p	$rC_{p-1} + M_p$	$C_{p-1} - M_p$
$\vdots$					$\vdots$
$n-1$	C_{n-2}	rC_{n-2}	M_{n-1}	$rC_{n-2} + M_{n-1}$	$C_{n-2} - M_{n-1}$
n	C_{n-1}	rC_{n-1}	M_n	$rC_{n-1} + M_n$	0

Remarques immédiates et générales :

• **Remarque 1 :**

$$\text{Pour tout } p \in [\![1, n-1]\!],\ I_p = rC_{p-1} \text{ et } A_p = I_p + M_p = rC_{p-1} + M_p \qquad (\mathbf{IV}.1)$$

• **Remarque 2 :**

$$\text{Pour tout } p \in [\![1, n-1]\!],\ C_p = C_{p-1} - M_p \Longleftrightarrow M_p = C_{p-1} - C_p \qquad (\mathbf{IV}.2)$$

• **Remarque 3 :** Montant de la dernière annuité A_n : $C_n = 0$ donc $M_n = C_{n-1}$

$$A_n = I_n + M_n = rC_{n-1} + C_{n-1} = (r+1)C_{n-1} = (1+r)M_n \qquad (\mathbf{IV}.3)$$

• **Remarque 4 :**

$$\text{Pour tout } p \in [\![1, n-1]\!],\ A_{p+1} - A_p = rC_p + M_{p+1} - rC_{p-1} - M_p = r(C_p - C_{p-1}) + M_{p+1} - M_p = M_{p+1} - (1+r)M_p \qquad (\mathbf{IV}.4)$$

• **Lois fondamentales :**

Règle N°1 : Le capital emprunté est égal à la somme des amortissements

$$C_0 = \sum_{p=1}^{n} M_p \qquad (\mathbf{IV}.5)$$

Règle N°2 dite règle fondamentale : La valeur actuelle de la suite d'annuités est égale au montant du capital emprunté soit :

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k(1+r)^{-k} \qquad (\mathbf{IV}.6a)$$

Règle N°2bis : La valeur acquise à la fin de l'emprunt par le capital emprunté est égale à la valeur acquise à cette même date par les annuités :

$$C_0(1+r)^n = \sum_{k=1}^{n} A_k(1+r)^{n-k} \qquad (\mathbf{IV}.6b)$$

Règle N°3 : C_p Le capital restant dû après paiement de la $p^{\text{ième}}$ annuité A_p est la différence entre la valeur acquise à la date p par le capital prêté et la somme des valeurs acquises à cette même date par les p annuités déjà versées

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ C_p = C_0(1+r)^p - \sum_{k=1}^{p} A_k(1+r)^{p-k} \qquad (\mathbf{IV}.7)$$

Preuve : Par récurrence

• Initialisation : Pour $p = 1$: $C_0(1+r)^1 - \sum_{k=1}^{1} A_k(1+r)^{1-k} = C_0(1+r) - A_1 = C_0(1+r) - (rC_0 + M_1) = C_0 - M_1 = C_1$

• hérédité : Supposons que $C_p = C_0(1+r)^p - \sum_{k=1}^{p} A_k(1+r)^{p-k}$

$$\begin{aligned} \text{Alors } C_{p+1} &= C_p - M_{p+1} = C_p - (A_{p+1} - rC_p) = C_p(1+r) - A_{p+1} \\ &= \left(C_0(1+r)^p - \sum_{k=1}^{p} A_k(1+r)^{p-k}\right)(1+r) - A_{p+1} \\ &= C_0(1+r)^{1+p} - \sum_{k=1}^{p} A_k(1+r)^{p+1-k} - A_{p+1} \\ &= C_0(1+r)^{1+p} - \sum_{k=1}^{p+1} A_k(1+r)^{p+1-k} \end{aligned}$$

• Conclusion habituelle.

Remarque : On retrouve la règle N°2 lorsque $p = n$ (et $C_n = 0$)

Règle N°4 : Le capital restant dû après paiement de la $p^{\text{ième}}$ annuité A_p est égal à la somme des valeurs actuelles exprimées à cette même date p des $(n-p)$ annuités restantes

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!], C_p = \sum_{k=1}^{n-p} A_{p+k}(1+r)^{-k} \text{ et } C_n = 0 \tag{\textbf{IV}.8}$$

Preuve : Soit $p \in [\![1; n-1]\!]$:

D'après la règle N°3 :$C_p = C_0(1+r)^p - \sum_{k=1}^{p} A_k(1+r)^{p-k}$.

De plus d'après la règle N°2, on a $C_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k(1+r)^{-k}$

$$\begin{aligned}
C_p &= \left(\sum_{k=1}^{n} A_k(1+r)^{-k}\right)(1+r)^p - \sum_{k=1}^{p} A_k(1+r)^{p-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k(1+r)^{p-k} - \sum_{k=1}^{p} A_k(1+r)^{p-k} \\
&= \sum_{k=p+1}^{n} A_k(1+r)^{p-k} \\
&= \sum_{k'=1}^{n-p} A_{k'+p}(1+r)^{-k'} \qquad \text{avec } k' = k - p
\end{aligned}$$

Exemple 1. On effectue un emprunt de 10 000 € à la banque pour une durée de 2 ans à un taux de 6% et on s'engage à amortir cet emprunt à raison de 4 000 € en année 1 et 6 000 € en année 2.

Exemple 2. On effectue un emprunt de 10 000 € à la banque pour une durée de 2 ans à un taux de 6% et on désire rembourser la même somme chaque année.

2 Les différents types de remboursement :

En pratique il y a quatre modes de remboursement :

- Par échéances constantes (annuités constantes)
- Par amortissements constants (par fractions constantes du capital)
- In-fine : le capital emprunté est remboursé en fin de la dernière période : seuls les intérêts sont versés à chaque période.
- Plus rare, on peut envisager un remboursement par des annuités en progression géométrique.

2.1 Remboursement par échéances constantes

Définition 3. *Le remboursement se fait par annuités constantes si*

$$\text{Pour tout entier } p \in [\![1, n]\!],\ A_p = A$$

L'exemple typique de ce type de remboursement est le prêt immobilier

• **Montant de l'annuité :** La règle fondamentale **(N°2)** (**IV**.6a) implique alors immédiatement :

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} A(1+r)^{-k} = A \times \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \text{ donc } A = \frac{rC_0}{1-(1+r)^{-n}} \qquad (\mathbf{IV}.9)$$

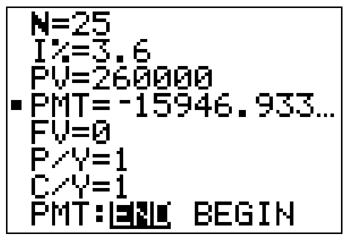
Exemple 3. La banque nous accorde un prêt de 260 000 € sur 25 ans, au taux annuel de 3, 6% : quel sera le montant de l'annuité ?

On a réussi à négocier ce taux pour le faire baisser à 3% : quel est alors le montant de l'annuité ?

Réponse : $A = \dfrac{rC_0}{1-(1+r)^{-n}} = \dfrac{0,036 \times 260000}{1-(1,036)^{-25}} \approx 15947$ €.

Si $r = 3\%$: $A \approx 14931$ €.

Réponse : Avec la calculatrice :



• **Amortissements :** De la remarque 4 (**IV**.4) on déduit :

$A_{p+1} - A_p = M_{p+1} - (1+r)M_p = 0$ car $A_{p+1} = A_p$, donc

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!],\ M_{p+1} = (1+r)M_p \qquad (\mathbf{IV}.10)$$

La suite des amortissements (M_p) est donc une suite géométrique de raison $(1+r)$

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ M_p = M_1(1+r)^{p-1} \qquad (\mathbf{IV}.11)$$

De la remarque 3 (**IV**.3) on déduit :

$$M_1 = \frac{M_n}{(1+r)^{n-1}} = \frac{A}{(1+r)^n} = \frac{rC_0}{(1+r)^n - 1} \qquad (\mathbf{IV}.12)$$

De la formule (**IV**.11) on déduit :

$$\forall p \in [\![1, n]\!], M_p = \frac{A}{(1+r)^{n-p+1}} \qquad (\mathbf{IV}.13)$$

• **Capital amorti R_p :** c'est le capital que l'on a remboursé après le versement de la $p^{\text{ième}}$ annuité

$$\begin{aligned} R_p &= \sum_{k=1}^{p} M_k = \sum_{k=1}^{p} M_1(1+r)^{k-1} = M_1 \times \frac{1-(1+r)^p}{-r} \\ &= \frac{rC_0}{(1+r)^n - 1} \times \frac{1-(1+r)^p}{-r} = C_0 \times \frac{(1+r)^p - 1}{(1+r)^n - 1} \end{aligned} \qquad (\mathbf{IV}.14)$$

• Capital restant restant dû (CRD) en fin de période :

$$C_p = C_0 - R_p = C_0 \times \frac{(1+r)^n - (1+r)^p}{(1+r)^n - 1} \qquad (\mathbf{IV}.15)$$

Exemple 4. Compléter un tableau d'amortissement pas à pas pour un prêt de 100 000 € sur 5 ans au taux annuel $r = 4,5\%$ (tous les montants sont arrondis à l'euro près, il y aura une légère différence sur la dernière annuité)

Réponse :

L'annuité constante est $A = \dfrac{100000 \times 0,045}{1-(1,045)^{-5}} = 22\,779$ € : on remplit la colonne des annuités.

$C_0 = 100\,000$, $I_1 = C_0 \times \dfrac{4,5}{100} = 4500$, $M_1 = A - I_1 = 22779 - 4500 = 18279$ et $C_1 = C_0 - M_1 = 81721$, ce qui nous permet de remplir la première ligne du tableau d'amortissement.

Les lignes suivantes se remplissent de la même manière :

— On reporte C_p obtenu sur la ligne précédente $C_p = C_{p-1} - M_{p-1}$

— On calcule $I_p = C_p \times \dfrac{4,5}{100}$

— On calcule $M_p = A - I_p$

— On calcule $C_{p+1} = C_p - M_p$

Période (**p**)	Capital restant dû en début de période ($\mathbf{C_{p-1}}$)	Intérêt de la période ($\mathbf{I_p}$)	Amortissement de la période ($\mathbf{M_p}$)	Annuité de la période ($\mathbf{A_p}$)	Capital restant dû en fin de période ($\mathbf{C_p}$)
1	100 000	4 500	18 279	22 779	81 721
2	81 721	3 677	19 102	22 779	62 619
3	62 619	2 818	19 961	22 779	42 658
4	42 658	1 920	20 859	22 779	21 799
5	21 799	981	21 798	22 780	0

Remarque 1 : Avec un tableur Excel : programmer les colonnes

	A	B	C	D	E	F
1	Période (**p**)	CRD en début de période ($\mathbf{C_{p-1}}$)	Intérêt de la période ($\mathbf{I_p}$)	Amortissement de la période ($\mathbf{M_p}$)	Annuité de la période ($\mathbf{A_p}$)	CRD en fin de période ($\mathbf{C_p}$)
2	**1**	10 000	$= B2 \star 0,045$	$= E2 - C2$	22779	$= B2 - D2$
3	**2**	$= F2$			$= E\$2$	
	⋮					

Remarque 2 : Au fur et à mesure des périodes, la part des intérêts diminue et celle de l'amortissent augmente

Remarque 3 : Si on considère des remboursements mensuels, il faut recalculer le taux

Exemple 5. La banque nous accorde un prêt de 260 000 € sur 25 ans, au taux annuel de $3,6\%$: les remboursements sont mensuels. Déterminer le montant de la mensualité dans le cas d'un taux mensuel équivalent, puis d'un taux mensuel proportionnel.

Réponse : Il y a deux façons de calculer le taux mensuel

1) Avec un taux équivalent : $r_{12} = 1,036^{(1/12)} - 1 \approx 0,0029516$: le montant de la mensualité est $a = 1307,47$ €.

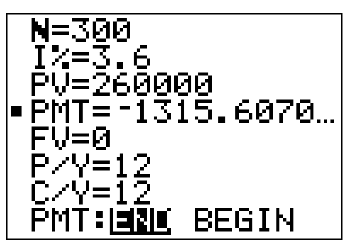
Extrait du Tableau d'amortissement (on ne va pas écrire les 300 lignes ...)

Période (p)	Capital restant dû en début de période C_(p-1)	Intérêts de la période I_p	Amortissements de la période M_p	Mensualité de la période A_p	Capital restant dû en fin de période C_p
Mois 1	260000,00	767,42	540,06	1307,48	259459,94
Mois 2	259459,94	765,82	541,66	1307,48	258918,28
Mois 3	258918,28	764,23	543,25	1307,48	258375,03
Mois 4	258375,03	762,62	544,86	1307,48	257830,17
Mois 5	257830,17	761,01	546,47	1307,48	257283,70
Mois 6	257283,70	759,40	548,08	1307,48	256735,62
Mois 7	256735,62	757,78	549,70	1307,48	256185,93
Mois 8	256185,93	756,16	551,32	1307,48	255634,61
Mois 9	255634,61	754,53	552,95	1307,48	255081,66
Mois 10	255081,66	752,90	554,58	1307,48	254527,08
Mois 11	254527,08	751,26	556,22	1307,48	253970,87
Mois 12	253970,87	749,62	557,86	1307,48	253413,01
...	...				...
Mois 294	9043,13	26,69	1280,79	1307,48	7762,35
Mois 295	7762,35	22,91	1284,57	1307,48	6477,78
Mois 296	6477,78	19,12	1288,36	1307,48	5189,42
Mois 297	5189,42	15,32	1292,16	1307,48	3897,25
Mois 298	3897,25	11,50	1295,98	1307,48	2601,28
Mois 299	2601,28	7,68	1299,80	1307,48	1301,47
Mois 300	1301,47	3,84	1303,64	1307,48	-2,16

FIGURE 1 – exemple 5 avec taux mensuel équivalent

2) Avec un taux proportionnel (méthode de la banque, on va très vite comprendre pourquoi) : $r'_{12} = \dfrac{0,036}{12} = 0,003$: le remboursement mensuel serait alors de $a' = 1315,61$ €.

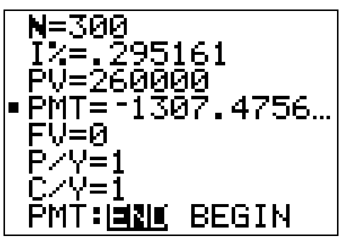
Remarque : Avec la TI 82, le taux calculé est le taux proportionnel



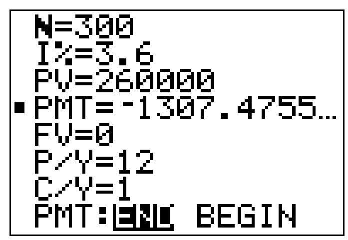
Si on veut déterminer la mensualité avec un taux équivalent, on peut le calculer « à la main » et procéder comme ceci :

Période (p)	Capital restant dû en début de période C_(p-1)	Intérêts de la période I_p	Amortissements de la période M_p	Mensualité de la période A_p	Capital restant dû en fin de période C_p
Mois 1	260000,00	780,00	535,61	1315,61	259464,39
Mois 2	259464,39	778,39	537,22	1315,61	258927,17
Mois 3	258927,17	776,78	538,83	1315,61	258388,34
Mois 4	258388,34	775,17	540,44	1315,61	257847,90
Mois 5	257847,90	773,54	542,07	1315,61	257305,83
Mois 6	257305,83	771,92	543,69	1315,61	256762,14
Mois 7	256762,14	770,29	545,32	1315,61	256216,82
Mois 8	256216,82	768,65	546,96	1315,61	255669,86
Mois 9	255669,86	767,01	548,60	1315,61	255121,26
Mois 10	255121,26	765,36	550,25	1315,61	254571,01
Mois 11	254571,01	763,71	551,90	1315,61	254019,11
Mois 12	254019,11	762,06	553,55	1315,61	253465,56
...					
Mois 294	9098,34	27,30	1288,31	1315,61	7810,03
Mois 295	7810,03	23,43	1292,18	1315,61	6517,85
Mois 296	6517,85	19,55	1296,06	1315,61	5221,79
Mois 297	5221,79	15,67	1299,94	1315,61	3921,85
Mois 298	3921,85	11,77	1303,84	1315,61	2618,00
Mois 299	2618,00	7,85	1307,76	1315,61	1310,25
Mois 300	1310,25	3,93	1311,68	1315,61	-1,43

FIGURE 2 – exemple 5 avec taux mensuel proportionnel



ou bien directement



2.2 Remboursement par amortissements constants :

Définition 4. *Le remboursement est dit par amortissements constants si à la fin de chaque période, le capital remboursé est une constante égale au capital emprunté divisé par le nombre de périodes de remboursement*

- **Amortissements :** La règle N°1 (**IV**.5), permet de déduire immédiatement :

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ M_p = M \iff \forall p \in [\![1, n]\!],\ M_p = \frac{C_0}{n} \qquad (\mathbf{IV}.16)$$

- **Annuités :**

$$\forall p \in [\![1, n]\!], A_p = A_1 - r(p-1)\frac{C_0}{n} \qquad (\mathbf{IV}.17)$$

Remarque : On peut donner la valeur de $A_1 = M_I + I_1 = \frac{C_0}{n} + rC_0$

• **Intérêts & Capital restant dû :** On vérifie aisément que les suites (C_p) et (I_p) sont également des suites arithmétiques.

$$\forall p \in [\![1,n]\!], C_p = \left(1 - \frac{p}{n}\right) C_0 \text{ et } I_p = \left(r - \frac{r(p-1)}{n}\right) C_0 \qquad (\textbf{IV}.18)$$

Exemple 6. Une entreprise emprunte 1 000 000 € au taux de 8% sur 5 ans : le remboursement se fait par amortissements constants, égaux donc à 200 000 € chacun

2.3 Remboursement *in fine*

Définition 5. *Le remboursement de l'emprunt est dit « In-fine » lorsque le capital emprunté C_0 n'est remboursé qu'à la fin de la dernière période ; cela signifie que :*

— *Le capital restant dû est toujours le même !*

— *Les intérêts calculés sur la base du CRD sont également toujours les mêmes : ceux-ci sont versés chaque année.*

• **Capital restant dû :**

$$\forall p \in [\![1,n-1]\!],\ C_p = C_0 \text{ et } C_n = 0 \qquad (\textbf{IV}.19\text{a})$$

• **Amortissements :**

$$\forall p \in [\![1,n-1]\!],\ M_p = 0 \text{ et } M_n = C_0 \qquad (\textbf{IV}.19\text{b})$$

• **Intérêts :**

$$\forall p \in [\![1,n]\!],\ I_p = rC_p = rC_0 \qquad (\textbf{IV}.19\text{c})$$

• **Annuités :**

$$\forall p \in [\![1,n-1]\!],\ A_p = I_p + M_p = rC_0 \text{ et } A_n = (1+r)C_0 \qquad (\textbf{IV}.19\text{d})$$

• **Capital amorti :**

$$\forall p \in [\![1,n-1]\!], R_p = 0 \text{ et } R_n = C_0 \qquad (\textbf{IV}.19\text{e})$$

Remarque : Avantage / inconvénient

— Le remboursement est différé

— Risqué pour le prêteur : de faibles rentrées de fonds, sauf l'année n : en pratique il est peu utilisé pour les emprunts indivis mais l'est souvent pour les emprunts obligataires

Exemple 7. On reprend l'exemple de l' entreprise qui emprunte 1 000 000 € au taux de 8% sur 5 ans : le remboursement se fait *in fine*. Construire le tableau d'amortissement.

2.4 Cas des annuités en progression géométrique de raison $q \neq 0$ et de première annuité A_1 :

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ A_p = q^{p-1} A_1 \qquad (\mathbf{IV}.20)$$

• **Premier cas :** $1 + r \neq q$

$$C_0 = \frac{A_1\left((1+r)^n - q^n\right)}{(1+r)^n(1+r-q)} \qquad (\mathbf{IV}.21)$$

• **Second cas :** $1 + r = q$

$$C_0 = \frac{nA_1}{1+r} \Longleftrightarrow A_1 = C_0\frac{1+r}{n} \qquad (\mathbf{IV}.22)$$

Exemple 8. La banque propose à un particulier un prêt de 12 000 € au taux annuel de r%. Ce prêt est amortissable en 5 ans par annuités non constantes : chaque annuité est majorée de 10% par rapport à la précédente

Construire le tableau d'amortissement de cet emprunt dans les deux cas suivants

1. $r = 9\%$
2. $r = 10\%$

Voir le fichier contenant les deux tableur mis en ligne

3 Le coût réel d'un emprunt - TEG & TAEG

3.1 Problématique : Frais générés par un emprunt

• La problématique : Le particulier ou l'entreprise qui contracte un emprunt a généralement, outre le paiement des intérêts sur le capital à rembourser, à régler d'autres frais, comme les commissions bancaires (frais de dossier, frais de virements) ou une assurance (souvent obligatoire).

Ainsi, le taux d'intérêt nominal ne reflète généralement pas le coût réel de l'emprunt

• La solution : calculer le taux d'intérêt qui égalise valeur actuelle des encaissements et valeur actuelle de tous les décaissements. Dans le cas d'un emprunt de montant C_0, on cherche **le taux actuariel** x tel que :

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} A'_k(1+x)^{-p}$$

où A'_k est le montant total des décaissements de l'année k (annuité + frais + commissions + impôts éventuels)

Définition 6. *Dans le cas d'un emprunt, le taux effectif global (TEG) égalise la somme prêtée et la valeur actuelle des décaissements (en incluant frais, impôts et commissions de toutes natures) Le TEG est un taux annuel calculé de façon actuarielle*

Remarque : Dans le cas d'une période inférieure à l'année (par ex. le mois), historiquement le TEG était exprimé sous forme de taux proportionnel, cependant une directive européenne de 1998 (appliquée en France en 2002) impose que le TGE soit exprimé sous forme de taux équivalent, SAUF dans le cadre d'un crédit immobilier ou d'un prêt à une entreprise où la banque conserve encore l'ancienne expression du TEG (taux proportionnel). Lorsque le TEG est exprimé sous forme de taux équivalent, on parle de TAEG (taux annuel équivalent global)

3.2 Taux effectif pour un particulier

Exemple 9. Crédit à la consommation. On emprunte 15000 € sur une durée 3 ans au taux annuel de 6%. La banque prélève l'année 0 des frais de dossiers de 30 € et des frais de virement de $0,5$ € à chaque versement d'une mensualité (de montant constant). Calculer le TAEG.

3.3 Taux effectif pour une entreprise

Pour le cas d'une entreprise, il faut tenir compte de deux facteurs supplémentaires :

• Charges déductibles du résultat imposables : les intérêts (pas toute l'annuité !, seulement la partie « intérêts »

• Les différentes commissions versées à des intermédiaires financiers

Exemple 10. Crédit accordé à une entreprise. Une entreprise fait un emprunt in-fine, d'un montant 500 000 € remboursable dans 5 ans, au taux nominal de 9%. Les frais de dossier versés à la banque sont égaux à 6 000 €, et le taux d'imposition : $T = 33,33\%$

Réponse :

— Intérêts annuels : 45 000 € l'entreprise n'aura seulement à sa charge : $45000 \times (1 - T) = 30000$ €. En effet, notre modélisation considère qu'elle déduit de sa mensualité la réduction liée aux impôts, même si ce sont deux phénomènes qui ont lieu en deux temps différents.

— A la date 0 : l'entreprise touche 500 000 € et supporte les frais de dossier à hauteur de $6000 \times (1 - T) = 4000$ € : on considère qu'elle reçoit donc 496 000 €

— L'entreprise verse donc les annuités : $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 30\,000$ eu et $A_5 = 530\,000$ €

— On cherche x t.q. :

$$500000 - 4000 = \frac{30000}{1+x} + \frac{30000}{(1+x)^2} + \frac{30000}{(1+x)^3} + \frac{30000}{(1+x)^4} + + \frac{530000}{(1+x)^5}$$

$$496 = 30\left(\frac{1-(1+x)^{-4}}{x}\right) + \frac{530}{(1+x)^5}$$

— Solution : $x = 6,191\%$ coût réel net de l'emprunt pour la firme.
Avec la calculatrice, on implémente la liste les valeurs :
$\{30\,000\,,\,30\,000\,,\,30\,000\,,\,30\,000\,,\,530\,000\} \rightarrow L_1$

```
irr(-496000,L1)
     6.190904491
```

UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2016-2017**

U.F.R. Économie & Gestion

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Chapitre V : Emprunts obligataires

1 Présentation

Dans ce chapitre il s'agit d'une entreprise, d'une collectivité ou d'un état qui fait appel à l'épargne collective pour disposer de moyens financiers.

Définition 1. *On parle d'emprunt obligataire lorsque l'emprunteur (dit aussi « l'émetteur de l'emprunt ») s'adresse à un grand nombre de prêteurs (appelés obligataires) : le montant C_0 de l'emprunt (ou nominal) est fractionné en N titres de créance (ou coupures) d'égale valeur. L'emprunteur est dans l'obligation de payer les intérêts et de rembourser le capital emprunté au(x) prêteur(s) : c'est pourquoi ces titres sont appelés* ***obligations****.*

Définition 2. *Lorsqu'une obligation est émise par un état, on parle* ***d'emprunt d'état*** *ou de* ***bon du trésor*** *si le titre est émis dans sa propre devise. Si l'obligation est émise en devises étrangères, elle s'appellera* ***obligation souveraine*** *: ces obligations permettent aux états de se financer sur la scène internationale*

Lorsqu'une obligation est émise par une entreprise privée, on parle de ***corporate bond****.*

Remarques : Dans ce chapitre, on ne considèrera que les obligations « classiques » dont le taux d'intérêt est fixe et qui sont remboursées en liquidités (Il existe des variantes de remboursement comme par ex. des obligations convertibles en actions, ou des obligations remboursables par anticipation. Il existe également des obligations à taux variable *floating rate note* dont le coupon est aléatoire et généralement indexé sur un taux de référence, dans ce cas le prix de remboursement n'est pas fixé non plus mais également indexé)

Enfin, l'émission d'un emprunt obligataire va faire naître un risque de non-remboursement de la dette de la part de l'émetteur (on parle de risque de défaut de l'obligation) : plus le risque est important, plus le prêteur exigera une rémunération élevée. Dans ce chapitre nous nous limiterons aux obligations sans risque de défaut

Notations :

- C_0 : Le nominal du capital emprunté.
- C_p, $p \in [\![1; n]\!]$: le capital restant dû après le paiement de la $p^{\text{ième}}$ échéance.
- N : le nombre d'obligations émise lors de l'émission.
- V_N : la valeur nominale d'une obligation.

La société emprunteuse peut émettre l'obligation à une valeur inférieure à son nominal et la rembourser à une valeur supérieure à son nominal.

- V_R : la valeur de remboursement . Lorsque l'obligation est remboursée à sa valeur nominale, on dit qu'elle est remboursée au pair.
- V_E : la valeur d'émission : lorsqu'une obligation est émise à sa valeur nominale, on dit qu'elle est émise au pair.
- r : le taux d'intérêt de l'obligation, également appelé taux facial ou taux nominal : c'est le taux qui, associé à la valeur nominale permet de calculer le coupon (voir infra)
- r' : taux d'intérêt effectif ou taux réel (lorsque $V_R \neq V_N$, voir paragraphe 3.2.b))
- x : le taux de revient pour l'emprunteur : en effet les banques qui s'occupent des opérations matérielles d'émission (et de vente auprès des souscripteurs) d'un emprunt obligataire rémunèrent leur intervention en prélevant des commissions sur les sommes qui leur sont versées : l'emprunteur doit donc rembourser l'emprunt à un taux supérieur au taux de rendement r.
- C : le coupon : c.a.d. l'intérêt annuel qui demeure constant tout au long de l'existence de l'emprunt.
- n : la durée en années : cette durée est fixée dès l'émission des obligations.
- M_p : l'amortissement lors du paiement de la $p^{\text{ième}}$ échéance.
- μ_p : le nombre d'obligations remboursées à la $p^{\text{ième}}$ échéance.
- d_p : le nombre d'obligations encore vivantes après la $p^{\text{ième}}$ échéance.
- A_p : l'annuité de la période p pour l'emprunteur.

2 Propriétés générales

Définition 3. *Le prix d'émission V_E représente le prix de l'obligation sur le marché primaire. Dans ce cas le montant total emprunté C_0' est différent du nominal ...*

$$C_0 = N \times V_N \text{ et } C_0' = N \times V_E \tag{V.1}$$

Remarque : Si $V_E \neq V_N$: le coupon se calcule toujours à partir de V_N :

$$C = r \times V_N \tag{V.2}$$

Définition 4. *Lorsque l'obligation n'est pas émise au pair, l'emprunteur émet l'obligation à une valeur inférieure à son nominal. La prime d'émission est définie par :*

$$P_E = V_N - V_E \text{ si } V_N > V_E \tag{V.3}$$

Définition 5. *Dans le cas d'un remboursement de l'obligation qui ne se fait pas au pair : la prime de remboursement est définie par :*

$$P_R = V_R - V_N \ si \ V_N < V_R \tag{V.4}$$

Remarque : Si $V_R \neq V_N$: l'amortissement de la période se calcule avec V_R :

$$\forall p \in [\![1;n]\!], \ M_p = \mu_p \times V_R \tag{V.5}$$

On a cependant toujours :

$$d_p = d_{p-1} - \mu_p \tag{V.6}$$

3 Différents types de remboursements

3.1 Obligations *in fine* :

Définition 6. *Les obligations sont dites « in fine » si l'emprunteur rembourse les obligations à la fin de la période : les annuités versées correspondent uniquement aux intérêts.*

Ainsi, chaque année $p \in [\![1;n-1]\!]$, l'emprunteur verse les intérêts, et à la fin de la dernière année il rembourse **de plus** la totalité des N obligations émises (i.e. le capital emprunté remboursé à la valeur de remboursement)

$$\forall p \in [\![1;n-1]\!], \ A_p = I = rC_0 = rNV_N = NC \text{ et } A_n = rNV_N + NV_R \tag{V.7}$$

Exemple 1. Soit une obligation à échéance 10 ans dont la valeur nominale est de 1500 € et dont le taux d'intérêt est de $r = 8\%$. On suppose que l'obligation est remboursée *in fine* au pair. Calculer le coupon annuel et le remboursement final.

3.2 Cas des annuités quasi constantes :

• a) Cas où $\mathbf{V_N = V_R}$

$$\forall p \in [\![1;n]\!], \ A_p = A$$

L'amortissement M_p est réparti entre $\mu_p = \dfrac{M_p}{V_N}$ obligations tirées au sort à l'occasion du $p^{\text{ième}}$ tirage parmi les N obligations émises.

- Si $p = 1$: $A = rC_0 + M_1 = rNV_N + \mu_1 V_N$
- Si $p = 2$: $A = rC_1 + M_2 = rd_1 V_N + \mu_2 V_N$

$$\forall p \in [\![1,n]\!], \ A = rC_{p-1} + M_p = rd_{p-1}V_N + \mu_p V_N \tag{V.8}$$

Remarque : Les propriétés vues dans le *Chapitre IV : « Emprunts indivis »* restent valables :

Comparaison emprunt indivis / emprunt obligataire
dans le cas d'annuités constantes, et où $V_N = V_R$

Emprunts indivis	N°	Emprunts obligataires	N°
$A = C_0 \dfrac{r}{1-(1+r)^{-n}}$	(**IV**.9)	$A = NV_N \dfrac{r}{1-(1+r)^{-n}}$	(**V**.9)
Amortissement $M_{p+1} = (1+r)M_p$	(**IV**.10)	Amortissement $\mu_{p+1} = \mu_p(1+r)$	(**V**.10)
Premier amortissement $M_1 = C_0 \dfrac{r}{(1+r)^n - 1}$	(**IV**.12)	Nbre d'obligations amorties lors du premier tirage $\mu_1 = \dfrac{M_1}{V_N} = \dfrac{C_0}{V_N} \dfrac{r}{(1+r)^n - 1} = N \dfrac{r}{(1+r)^n - 1}$	(**V**.11)
$p^{\text{ième}}$ amortissement $M_p = M_1(1+r)^{p-1}$	(**IV**.11)	Nbre d'obligations amorties lors du $p^{\text{ième}}$ tirage $\mu_p = \dfrac{M_p}{V_N} = \dfrac{M_1(1+r)^{p-1}}{V_N} = \mu_1(1+r)^{p-1}$	(**V**.12)
Capital amorti après p échéances $R_p = C_0 \dfrac{(1+r)^p - 1}{(1+r)^n - 1}$	(**IV**.14)	Nbre d'obligations amorties après p échéances $\dfrac{C_0}{V_N} \dfrac{(1+r)^p - 1}{(1+r)^n - 1} = N \dfrac{(1+r)^p - 1}{(1+r)^n - 1}$	(**V**.13)
Capital restant dû après p échéances $C_p = C_0 \dfrac{(1+r)^n - (1+r)^p}{(1+r)^n - 1}$	(**IV**.15)	Nbre d'obligations encore vivantes après p échéances $d_p = \dfrac{C_p}{V_N} = N \dfrac{(1+r)^n - (1+r)^p}{(1+r)^n - 1}$	(**V**.14)

Remarque : A propos du nombre d'obligations remboursées à chaque période μ_p : les calculs de l'amortissement ne donnent pas *a priori* un nombre entier $\mu_p = \dfrac{M_p}{V_R}$: il y a alors plusieurs méthodes pour arrondir ce quotient à l'entier et obtenir *in fine* une somme $\sum_{p=1}^{n} \mu_p = N$. La plus simple est d'arrondir le quotient à l'entier le plus proche puis de répartir le différentiel sur les derniers amortissements.

Exemple 2. Un emprunt obligataire est émis par une entreprise. Le montant total de 10 000 000 € est divisé en 100 000 obligations de 100 € chacune. Le taux d'intérêt annuel est de 7% et l'amortissement en 5 échéances annuelles constantes.

• Remarque : Taux actuariel : taux de revient pour l'emprunteur / taux de rendement pour l'obligataire

Dans le but de faciliter son emprunt obligataire, une entreprise peut décider d'émettre ses obligations à un prix d'émission (V_E) inférieur à sa valeur nominale. Le coupon reste calculé par rapport à la valeur nominale et au taux d'intérêt r.

L'obligataire peut se demander à quel taux de rendement il place réellement son argent :

Lorsque $V_E < V_N$: le taux actuariel t égalise à la date 0 les sommes reçues et la valeur actualisée de la suite des annuités évaluées au taux t

$$NV_E = \sum_{k=1}^{n} A_k(1+t)^{-k} = A \times \left(\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right) = NV_N \times \left(\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right) \times \left(\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right) \quad (\mathbf{V}.15)$$

Ainsi, dans le cas d'annuités constantes, ce taux est indépendant du nombre d'obligations émises.

Remarque : Ce taux actuariel est un taux moyen qui n'est pas le même lorsque l'on considère les cas particuliers selon que l'obligataire est remboursé après une, deux ... ou n années de placement.

Exemple 3. Un emprunt obligataire portant sur 100 000 obligations de valeur nominale $V_N = 10$ € au taux d'intérêt $r = 7\%$ est proposé à une valeur d'émission $V_E = 9,98$ €. On suppose que le remboursement se fait par 10 annuités constantes. Déterminer le taux actuariel t.

• b) Cas où $\mathbf{V_N \neq V_R}$:

• Taux d'intérêt effectif ou taux réel :

$$r' = r\frac{V_N}{V_R} = \frac{C}{V_R} \quad (\mathbf{V}.16)$$

(où le coupon $C = rV_N$ toujours)

• Annuités : La $p^{\text{ième}}$ annuité A_p versée comprend les intérêts à verser aux obligations encore vivantes ET l'amortissement des obligations sorties au tirage (amortissement effectué à la valeur V_R ici)

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ A_p = rd_{p-1}V_N + \mu_p V_R \quad (\mathbf{V}.17)$$

On rappelle que l'on se place dans le cas où les annuités sont constantes :

• Obligations amorties :

$(\mu_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$ est une suite géométrique de raison $1 + r'$ et de premier terme μ_1, où

$$\mu_1 = \frac{Nr'}{(1+r')^n - 1} \quad (\mathbf{V}.18)$$

• Valeur théorique de l'annuité A_1 :

$$A_1 = \frac{NV_Rr'}{1-(1+r')^{-n}} \quad (\mathbf{V}.19)$$

Remarque : Cette valeur de A_1 est donc la valeur théorique de toutes les annuités : dans la pratique, les annuités diffèrent légèrement, du fait que l'on amortit un nombre entier d'obligations chaque année.

• **Amortissement :**

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ M_p = \mu_p V_R = \mu_1 (1+r')^{p-1} V_R = \frac{Nr'(1+r')^{p-1} V_R}{(1+r')^n - 1} \qquad (\mathbf{V}.20)$$

Exemple 4. Une entreprise émet un emprunt obligataire de 1 000 000 € sous la forme de 100000 obligations de valeur nominale $V_N = 10$ € au taux d'intérêt nominal $r = 8,2\%$

L'amortissement se fait en 5 annuités constantes comprenant le coupon annuel et le remboursement des obligations au prix de remboursement $V_R = 10,25$ €.

Exemple de calcul de taux actuariel

Rappel : Le taux nominal diffère du taux de rentabilité effectif pour le souscripteur (ou du coût effectif pour l'émetteur) du fait :

- Des primes d'émission ou de remboursement
- Des frais d'intermédiaires
- De la fiscalité

• Comme pour les emprunts indivis, on utilise le taux actuariel et non le taux nominal pour évaluer le taux de rendement effectif (ou le taux de revient effectif pour l'émetteur).

• Le taux actuariel d'une obligation est le taux d'actualisation qui égalise le prix d'émission et la somme des flux futurs actualisés.

• Le prix d'émission et les flux futurs sont ajustés afin de tenir compte des différents frais supportés par l'émetteur ou le souscripteur.

• En général, pour une obligation donnée, le taux actuariel n'est pas le même selon que l'on se place du côté de l'émetteur ou du souscripteur.

Exemple 5.

La société DUMOUSTOIR émet un emprunt de 8 millions d'euros réparti en $N = 8\,000$ obligations de nominal $V_N = 1000$ €, remboursable in-fine dans 4 ans, avec $V_E = 990$ € et $V_R = 1\,020$ €. Les intérêts sont versés annuellement au taux $r = 5\%$.

On a :

- Le taux d'imposition de la société DUMOUSTOIR est $T = \dfrac{1}{3}$

- La banque en charge de l'opération retient 5% du capital levé pour le compte de la société DUMOUSTOIR le jour de l'émission.

1. Quel est le coût actuariel effectif ?

M. Kermarec décide d'acheter une obligation DUMOUSTOIR le jour de l'émission et de la conserver jusqu'à l'échéance. On suppose que les frais de transactions sont négligeables.

2. Quel est le taux de rendement actuariel pour M. Kermarec ?

3.3 Remboursement par séries égales ou à tranches annuelles constantes

Dans ce type de remboursement, l'amortissement est identique en fin de chaque période. Dans ce paragraphe on suppose que $V_N = V_R$

• **Amortissements :**

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ \mu_p = \frac{N}{n} \text{ et } M_p = M = \mu_p V_N \qquad (\mathbf{V}.21)$$

• **Capital restant dû :** La suite $(C_p)_{p\in[\![0,n]\!]}$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{-NV_N}{n}$ et de premier terme C_0

$$\forall p \in [\![0, n]\!],\ C_p = C_0 - \frac{p}{n} NV_N = C_0 \left(1 - \frac{p}{n}\right) \qquad (\mathbf{V}.22)$$

• **Intérêts annuels :** On note I_p le montant des intérêts de la période p

La suite $(I_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{-rNV_N}{n}$ et de premier terme $I_1 = rC_0$

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ I_p = rC_0 - (p-1)\frac{rNV_N}{n} \qquad (\mathbf{V}.23)$$

• **Annuités :** La suite $(A_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{-rNV_N}{n}$ et de premier terme $A_1 = rC_0 + M$

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ A_p = rC_0 + M - (p-1)\frac{rNV_N}{n} \qquad (\mathbf{V}.24)$$

Exemple 6. Une société émet un emprunt obligataire de 800 000 € aux conditions suivantes :

— Nominal d'une obligation : 100 €.

— Obligations émises et remboursées au pair

— Amortissement en 8 ans par tranches égales

— Taux annuel d'intérêt : 6%

Présenter le tableau d'amortissement

Réponse : $N = 8\,000$ obligations émises

La société rembourse chaque année $\mu = \dfrac{C_0}{nV_N} = \dfrac{800000}{8 \times 100} = 1000$ obligations.

Période ($\mathbf{p}$)	Obligations encore vivantes en début de période ($\mathbf{d_{p-1}}$)	Intérêt de la période ($\mathbf{I_p}$)	Obligations à amortir en fin de période ($\boldsymbol{\mu_p}$)	Annuité de la période ($\mathbf{A_p}$)	Obligations encore vivantes en fin de période ($\mathbf{d_p}$)
Année 1	8 000	48 000	1 000	148 000	7 000
Année 2	7 000	42 000	1 000	142 000	6 000
Année 3	6 000	36 000	1 000	136 000	5 000
Année 4	5 000	30 000	1 000	130 000	4 000
Année 5	4 000	24 000	1 000	124 000	3 000
Année 6	3 000	18 000	1 000	118 000	2 000
Année 7	2 000	12 000	1 000	112 000	1 000
Année 8	1 000	6 000	1 000	106 000	0