UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2013-2014**

LICENCE d'ÉCONOMIE, FINANCE et GESTION

Première année - Semestre 2

Fonctions de plusieurs variables

Chapitre III
Limites et continuité d'une fonction de deux variables

Exercice I
Équivalents en zéro de fonctions d'une variable réelle

Donner un équivalent simple en $x_0 = 0$ des fonctions suivantes ; en déduire la limite en x_0 de ces fonctions :

- $f_1 \ : \ x \mapsto \dfrac{3x^2 - 6x}{4x - 2}$
- $f_2 \ : \ x \mapsto \dfrac{-5x^3 + 4x^2 + 9}{12x^2 - 5x}$
- $f_3 \ : \ x \mapsto \dfrac{\ln(1+2x)}{x^2+1}$
- $f_4 \ : \ x \mapsto \dfrac{(e^x - 1)^2}{1 - e^{2x}}$
- $f_5 \ : \ x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$
- $f_6 \ : \ x \mapsto \dfrac{\ln(x^2 + x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}$

Exercice II

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{2x \ln(1+y)}{\exp(x^2 + x) - 1}$.

1. Déterminer puis représenter le domaine de définition D_f de cette fonction.
2. Donner un équivalent simple de f au voisinage de $O(0, 0)$. En déduire la limite de f en O.
3. Quelle est la limite de f lorsque (x, y) tend vers $(-1^+, 2)$?

Exercice III

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{\ln(1 + 2x^2 + 2y^2)}{5(x^2 + y^2)}$.

Déterminer un équivalent simple de f au voisinage de $O(0, 0)$. f admet-elle une limite en O ?

Exercice IV

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{3x^2 \ln(1 + 2y^2)}{\exp(x^2 y) - 1}$.

1. Donner un équivalent simple de f au voisinage de $O(0, 0)$. En déduire la limite de f en O.
2. Quelle est la limite de f lorsque (x, y) tend vers $(0; 1)$?

Exercice V

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x(e^y-1)}{\ln(1+xy)}$

1. Déterminer puis représenter le domaine de définition D_f de cette fonction.
2. Donner un équivalent simple de f au voisinage de $O(0,0)$.
3. f peut-elle être prolongée par continuité en $(0,0)$?

Exercice VI
Extrait du Test 2 de Mars 2013 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\ (Ox),(Oy)\}$ par :

$$f(x,y) = \frac{(x^2+2x)\ln(1+2y^2)}{e^{xy}-1}$$

1. Donner un équivalent simple de $f(x,y)$ au voisinage de $O(0;0)$
2. Peut-on prolonger f par continuité en $(0,0)$? Si oui, définir le prolongement de f.
3. f admet-elle une limite réelle lorsque (x,y) tend vers $(0;1)$?

Exercice VII
Extrait du Test 2 de Mars 2012 (6,5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2+2x}{4y^2}$

1. Déterminer et représenter le domaine de définition de f. (Unité graphique : 2 cm ou 2 grands carreau)
2. Définir et représenter sur le graphique de **1.** les courbes de niveau 0 et -1 (notées respectivement L_0 et L_{-1}).
3. Étudier la limite de f lorsque (x,y) tend vers $O(0;0)$ en parcourant L_0, puis L_{-1}.
4. f admet-elle une limite en $O(0,0)$? Justifier.

Exercice VIII

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en $(0,0)$?

$a)$ $f_1\ :\ (x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{\exp(x).\exp(y)-1}$; $b)$ $f_2\ :\ (x,y) \mapsto f_2(x,y) = \dfrac{y^2\left(\sqrt{1+x}-1\right)^3}{x^2\ln(1+y)}$

U.F.R. Economie et Gestion **L1 - S2**

Fonctions de plusieurs variables

Chapitre III : Limites & continuité - Corrigé de quelques exercices

Exercice I

- $f_1(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{4x - 2} \underset{0}{\sim} \dfrac{-6x}{-2}$, soit $f_1(x) \underset{0}{\sim} 3x$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$

- $f_2(x) = \dfrac{-5x^3 + 4x^2 + 9}{12x^2 - 5x} \underset{0}{\sim} \dfrac{9}{-5x}$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_2(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{9}{-5x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_2(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{9}{-5x} = +\infty$.

- $f_3(x) = \dfrac{\ln(1 + 2x)}{x^2 + 1}$
  Posons $u(x) = 2x$, alors $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, comme $\ln(1 + u) \underset{0}{\sim} u$, on a $\ln(1 + 2x) \underset{0}{\sim} 2x$
  Donc par quotient, $f_3(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{2x}{1}$, soit $f_3(x) \underset{0}{\sim} 2x$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$

- $f_4(x) = \dfrac{(e^x - 1)^2}{1 - e^{2x}}$
  Pour le numérateur, $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, donc $(e^x - 1)^2 \underset{0}{\sim} x^2$
  Pour le dénominateur, $1 - e^{2x} = -(e^{2x} - 1)$: posons $u(x) = 2x$, alors $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, comme $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$, on a $-(e^{2x} - 1) \underset{0}{\sim} -2x$
  Donc par quotient, $f_4(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{-2x}$, soit $f_4(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{-x}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f_4(x) = \cdots = 0$

- $f_5(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$
  Pour le numérateur, posons $u(x) = x^2$, alors $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, comme $\sqrt{1 + u} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{u}{2}$, on a $\sqrt{1 + x^2} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
  Donc par quotient, $f_5(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2/2}{x}$, soit $f_5(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f_5(x) = \cdots = 0$

- $f_6(x) = \dfrac{\ln(x^2 + x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}$
  Posons $u(x) = x + x^2$, alors $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, comme $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, on a $\ln(1+x+x^2) \underset{0}{\sim} x+x^2$
  Et comme $\sqrt{1 + u} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{u}{2}$, on a $\sqrt{x^2 + x + 1} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2 + x}{2}$
  Par quotient, $f_6(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x + x^2}{\frac{x+x^2}{2}} = 2$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f_6(x) = 0$

Exercice II

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{2x\ln(1+y)}{e^{x^2+x}-1}$.

1. f est définie en (x,y) si et seulement si :
$\left\{\begin{array}{lcl} 1+y & > & 0 \\ e^{x^2+x} & \neq & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & > & -1 \\ x^2+x & \neq & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & > & 0 \\ x\neq 0 & \text{et} & x\neq -1 \end{array}\right.$
D_f est le demi-plan strictement au-dessus de la droite d'équation $y=-1$, privé des deux droites verticales d'équations $x=-1$ et $x=0$.

2. • Pour le numérateur, $\ln(1+y) \underset{0}{\sim} y$, donc $2x\ln(1+y) \underset{0}{\sim} 2xy$
• Pour le dénominateur, posons $u(x) = x^2+x$, alors $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, comme $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$, on a $e^{x^2+x}-1 \underset{0}{\sim} x^2+x \underset{0}{\sim} x$
Donc par quotient, $f(x,y) \underset{(0;0)}{\sim} \dfrac{2xy}{x}$, soit $f(x,y) \underset{(0;0)}{\sim} 2y$,
ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} 2y = 0$.

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1^+,2)} 2x\ln(1+y) = -2\ln 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} x^2+x = 0$ et $x^2+x<0$, si $x\in]-1;0[$ (faire un tableau de signes) donc $e^{x^2+x}<1$ sur cet intervalle, et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} e^{x^2+x}-1 = 0^-$,
donc par quotient $\lim\limits_{(x,y)\to(-1^+,2)} f(x,y) = +\infty$

Exercice III

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+2x^2+2y^2)}{5(x^2+y^2)}$.

• Pour le numérateur, posons $u(x,y) = 2x^2+2y^2$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} u(x,y) = 0$, comme $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, on a $\ln(1+2x^2+2y^2) \underset{(0;0)}{\sim} 2x^2+2y^2$

Par quotient $f(x,y) \underset{(0;0)}{\sim} \dfrac{2x^2+2y^2}{5x^2+5y^2}$, soit $f(x,y) \underset{(0;0)}{\sim} \dfrac{2}{5}$, ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} f(x,y) = \dfrac{2}{5}$.

Exercice IV

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{3x^2\ln(1+2y^2)}{\exp(x^2y)-1}$.

1. • Pour le numérateur, posons $u(y) = 2y^2$, alors $\lim\limits_{y\to 0} u(y) = 0$, comme $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, on a $\ln(1+2y^2) \underset{0}{\sim} 2y^2$.
• Pour le dénominateur, posons $v(x,y) = x^2y$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} u(x,y) = 0$, comme $e^v - 1 \underset{0}{\sim} v$, on a $e^{x^2y}-1 \underset{(0;0)}{\sim} x^2y$
Par produit et quotient, $f(x,y) \underset{(0;0)}{\sim} \dfrac{3x^2.2y^2}{x^2y}$, soit $f(x,y) \underset{(0;0)}{\sim} 6y$,
ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} 6y = 0$.

2. • Pour le numérateur, $\ln(1+2y^2) \underset{1}{\sim} \ln 3$, donc $3x^2 \ln(1+2y^2) \underset{0}{\sim} 3x^2 \ln 3$.

   • Pour le dénominateur, $v(x,y) = x^2 y$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0;1)} u(x,y) = 0$, comme $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$, on a $e^{x^2y} - 1 \underset{(0;1)}{\sim} x^2 y \underset{(0;1)}{\sim} x^2$

   Par produit et quotient, $f(x,y) \underset{(0;1)}{\sim} \dfrac{3x^2 \ln 3}{x^2}$, soit $f(x,y) \underset{(0;1)}{\sim} 3\ln 3$, ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0;1)} f(x,y) = 3\ln 3$.

Exercice V

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x(e^y - 1)}{\ln(1+xy)}$

1. f est définie en (x,y) si et seulement si
   $\begin{cases} 1+xy & > & 0 \\ 1+xy & \neq & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y & > & \dfrac{-1}{x} \\ xy & \neq & 0 \end{cases}$ D_f est donc la partie du plan comprise entre les deux branches de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{-1}{x}$, dont sont exclues les deux axes du repère.
2. • pour le numérateur, $e^y - 1 \underset{0}{\sim} y$

   • pour le dénominateur, posons $u(x,y) = xy$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = 0$, comme $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, on a $\ln(1+xy) \underset{(0;0)}{\sim} xy$

   Donc par produit et quotient, $f(x,y) \underset{(0;0)}{\sim} \dfrac{xy}{xy}$, soit $f(x,y) \underset{(0;0)}{\sim} 1$, ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} f(x,y) = 1$.
3. f peut être prolongée en $(0;0)$, par la fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\begin{cases} \tilde{f}(x,y) = f(x,y) = \dfrac{x(e^y-1)}{\ln(1+xy)} & \text{si} \quad (x;y) \in \mathcal{D}_f \\ \tilde{f}(x,y) = 1 & \text{si} \quad (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

Exercice VI (Mars 2013 - 5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\ (Ox), (Oy)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{(x^2+2x)\ln(1+2y^2)}{e^{xy} - 1}$$

1. • **2,5 points** • Numérateur : **(0,25 point)** on a $x^2 + 2x \underset{0}{\sim} 2x$

   (0,75 point) Posons $u(y) = 2y^2$, alors $\lim\limits_{y\to 0} u(y) = 0$

   De plus $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, donc par changement de variable, $\ln(1+2y^2) \underset{0}{\sim} 2y^2$

   • Dénominateur : **(1 point)** Posons $v(x,y) = xy$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) = 0$

   Comme $e^v - 1 \underset{0}{\sim} v$, on a $e^{xy} - 1 \underset{(0,0)}{\sim} xy$

   (0,5 point) Par quotient $f(x,y) \underset{(0,0)}{\sim} \dfrac{2x \cdot 2y^2}{xy}$ soit $f(x,y) \underset{(0,0)}{\sim} 4y$

2. • **1 point** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 4y = 0$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. On peut donc prolonger f par continuité en $O(0;0)$ par $\tilde{f}$ définie par $\begin{cases} \tilde{f}(x,y) = f(x,y) & \text{si} \quad (x;y) \in D_f \\ \tilde{f}(x,y) = 0 & \text{si} \quad (x;y) = (0;0) \end{cases}$

3. • **1,5 point** Comme au 1., on a $x^2+2x \underset{0}{\sim} 2x$ et $e^{xy}-1 \underset{(0,0)}{\sim} xy$, de plus $\lim\limits_{y\to1} \ln(1+2y^2) = \ln 3$
   Donc, par quotient $f(x,y) \underset{(0,1)}{\sim} \dfrac{2x\ln 3}{xy}$ soit $f(x,y) \underset{(0,1)}{\sim} \dfrac{2\ln 3}{y}$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0;1)} \dfrac{2\ln 3}{y} = 2\ln 3$, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0;1)} f(x,y) = 2\ln 3$

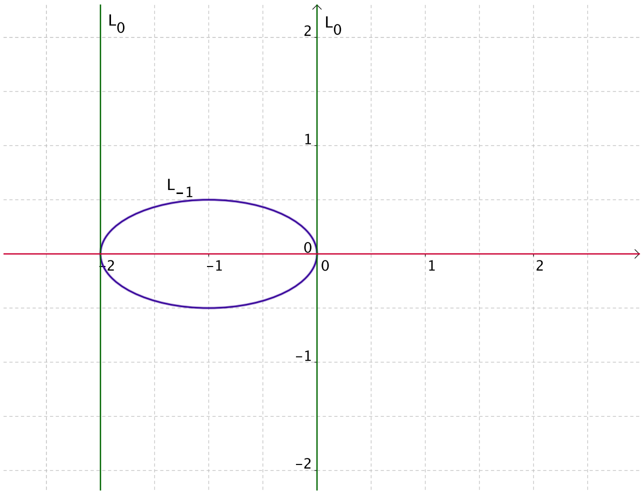
Exercice VII (Mars 2012 - 6,5 points)

1. • **0,5 point** La fonction f est définie en (x,y) si et seulement si $4y^2 \neq 0$, i.e. $y \neq 0$. Donc $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus (Ox)$

2. • **1,5 point** $L_0 = \Big\{(x,y) \in D_f /\ f(x,y) = 0\Big\}$. Donc
$$\begin{aligned}
(x,y) \in L_0 &\iff \frac{x^2+2x}{4y^2} = 0 \text{ et } y \neq 0 \\
&\iff x^2+2x = 0 \text{ et } y \neq 0 \\
&\iff x(x+2) = 0 \text{ et } y \neq 0 \\
&\iff x = -2 \text{ ou } \ x = 0 \text{ et } y \neq 0
\end{aligned}$$
   L_0 est donc l'union des deux droites D_1 et D_2 d'équations respectives $x = -2$ et $x = 0$ privées respectivement de $(-2;0)$ et $(0;0)$.
   • **2 points** $L_{-1} = \Big\{(x,y) \in D_f /\ f(x,y) = -1\Big\}$. Donc
$$\begin{aligned}
(x,y) \in L_{-1} &\iff \frac{x^2+2x}{4y^2} = -1 \text{ et } y \neq 0 \\
&\iff x^2+2x = -4y^2 \text{ et } y \neq 0 \\
&\iff x^2+2x+4y^2 = 0 \text{ et } y \neq 0 \\
&\iff (x+1)^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \text{ et } y \neq 0
\end{aligned}$$
   L_{-1} est donc l'ellipse de centre $\Omega(-1;0)$, de coefficients $\alpha = 1$ et $\beta = \dfrac{1}{2}$, privée des points $(-2;0)$ et $(0;0)$
   • **Figure 1 point**

3. • **Bonus 0,5 point** On remarque tout d'abord que le point $M_0(0;0)$ est un point d'accumulation pour les deux lignes de niveaux L_0 et L_{-1} : le calcul de la limite de $f(x;y)$ lorsque $(x;y)$ tend vers M_0 en parcourant L_0 (respectivement L_{-1}) est donc raisonnable.
   • **0,5 point** $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\(x,y)\in L_0}} f(x;y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\(x,y)\in L_0}} 0 = 0$ par définition de la ligne de niveau L_0
   • **0,5 point** De même $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\(x,y)\in L_{-1}}} f(x;y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\(x,y)\in L_{-1}}} -1 = -1$

4. • **0,5 point** D'après la question 3, on a trouvé deux limites différentes lorsque $(x;y)$ tend vers M_0 en parcourant deux chemins différents : f n'a donc pas de limite en $M_0(0;0)$.



Exercice VIII

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en $(0,0)$?

$a)$ $f_1 \ : \ (x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{\exp(x).\exp(y)-1} = \dfrac{x+y}{e^{x+y}-1}$

Pour le dénominateur, posons $u(x,y) = x+y$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} u(x,y) = 0$, et comme $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$, on a donc : $e^{x+y}-1 \underset{(0;0)}{\sim} x+y$

Ainsi, par quotient, $f_1(x,y) \underset{(0;0)}{\sim} \dfrac{x+y}{x+y}$ c.a.d. $f_1(x,y) \underset{(0;0)}{\sim} 1$, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} f_1(x,y) = 1$: f_1 peut être prolongée en $(0;0)$, par la fonction $\tilde{f}_1$ définie par

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(x,y) = f_1(x,y) = \dfrac{x+y}{e^{x+y}-1} & \text{si} \quad (x;y) \in \mathcal{D}_{f_1} \\ \tilde{f}_1(x,y) = 1 & \text{si} \quad (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

$b)$ $f_2 \ : \ (x,y) \mapsto f_2(x,y) = \dfrac{y^2\left(\sqrt{1+x}-1\right)^3}{x^2\ln(1+y)}$

- pour le numérateur, $\sqrt{1+x}-1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$, donc $(\sqrt{1+x}-1)^3 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{8}$
- pour le dénominateur, $\ln(1+y) \underset{0}{\sim} y$

Donc par produit et quotient, $f_2(x,y) \underset{(0;0)}{\sim} \dfrac{y^2\frac{x^3}{8}}{x^2y}$, soit $f_2(x,y) \underset{(0;0)}{\sim} \dfrac{xy}{8}$,

ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} f_2(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{8} = 0$: f_2 peut être prolongée en $(0;0)$, par la fonction $\tilde{f}_2$ définie par

$$\begin{cases} \tilde{f}_2(x,y) = f_2(x,y) = \dfrac{y^2\left(\sqrt{1+x}-1\right)^3}{x^2\ln(1+y)} & \text{si} \quad (x;y) \in \mathcal{D}_{f_2} \\ \tilde{f}_2(x,y) = 0 & \text{si} \quad (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

UNIVERSITÉ DE CERGY | **Licence d'Économie et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion | **L1 - S2**

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

TEST 2 - Mars 2013 - 1h 30 min

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Questions de cours - 8 points

Les 4 parties qui suivent sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$.

   a. Donner la définition de la courbe de niveau $k \in \mathbb{R}$ de f.

   b. On considère la fonction f définie par :

   $$f(x,y) = \frac{2x^2+2x}{x^2-y^2}$$

   Définir puis représenter l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f (le plan étant muni d'un repère orthonormé d'unité 2 cm (ou 2 carreaux))

   Définir précisément la courbe de niveau 1, notée L_1, puis représenter L_1 sur le graphique précédent.

2. Soit f la fonction définie par :

   $$f(x,y) = x - y + 3x^2y - e^{2x-3y} - 5$$

   Définir les fonctions partielles de f au point $M_0(2;-3)$.

3. On considère la fonction f définie par :

   $$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

   (f est définie sur le même ensemble que la fonction de la question 1*b*.)

   Montrer que f n'admet pas de limite en $O(0;0)$ en étudiant la limite de f lorsque (x,y) tend vers O en parcourant les droites de $\mathcal{D}_f$ passant par l'origine.

4. En utilisant des équivalents, donner une valeur approchée de $A = \dfrac{\ln(0,98)}{(e^{0,1}-1)^2}$

Exercice 1 - 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\ (Ox), (Oy)\}$ par :

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + 2x)\ln(1 + 2y^2)}{e^{xy} - 1}$$

1. Donner un équivalent simple de $f(x, y)$ au voisinage de $O(0; 0)$
2. Peut-on prolonger f par continuité en $(0, 0)$? Si oui, définir le prolongement de f.
3. f admet-elle une limite réelle lorsque (x, y) tend vers $(0; 1)$?

Exercice 2 - 4 points

Soient f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$ et k un nombre réel.

1. Donner la définition de f est homogène de degré k.
2. Donner l'expression de l'identité d'Euler pour une telle fonction f homogène de degré k.
3. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0; 0)\}$ par $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.
   Montrer que f est homogène, puis vérifier l'identité d'Euler pour la fonction f.

Exercice 3 - 3 points

1. Donner la définition du vecteur gradient au point $M_0(x_0, y_0)$ (que l'on note $\overrightarrow{grad\ f}(M_0)$)
2. Donner un vecteur normal au plan tangent au graphe $\mathcal{G}_f$ de f au point $M_0'(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, puis une équation cartésienne de ce plan tangent.
3. On considère la fonction f définie par : $f(x, y) = x^2 e^{x-y}$
   Donner une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{G}_f$ au point $M_0'(1; 1; 1)$

UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Economie et Gestion

Licence d'Économie et Gestion
L1 - S2

Fonctions de plusieurs variables

Corrigé du TEST 2 (Mars 2013)

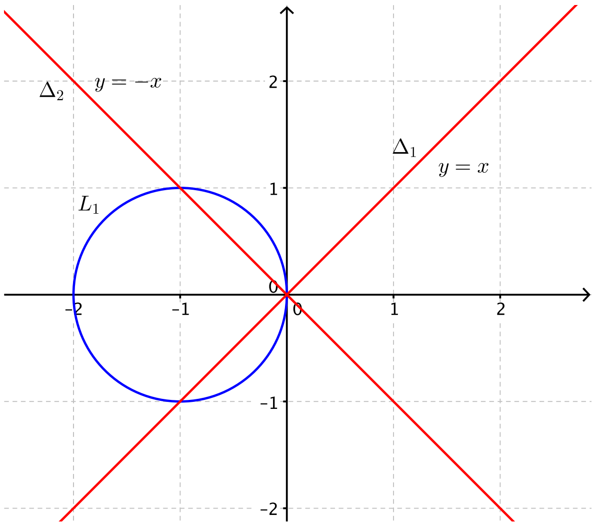
Questions de cours - (3,5+1+2+1,5 =) 8 points

1. a. • **0,5 point** Notons L_k la ligne de niveau k de f :

$$L_k = \{(x, y) \in D_f /\ f(x, y) = k\}$$

b. • **3 points** Soit f définie par $\dfrac{2x^2 + 2x}{y^2 - x^2}$

($\mathbf{D_f}$: 1 point) $(x, y) \in D_f \iff x^2 - y^2 \neq 0 \iff (x - y)(x + y) \neq 0 \iff y \neq \pm x$
$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{\Delta_1; \Delta_2\}$, où Δ_1 et Δ_2 sont les deux bissectrices du repère.
(Figure : 0,5 point)



($\mathbf{L_1}$: 1,5 point, dont 0,5 point pour préciser les 3 points exclus)

$L_1 = \{(x, y) \in D_f / \dfrac{2x^2 + 2x}{x^2 - y^2} = 1\}$

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2 + 2x}{x^2 - y^2} = 1 &\iff 2x^2 + 2x = x^2 - y^2 \text{ et } (x, y) \in D_f \\
&\iff x^2 + 2x + y^2 = 0 \text{ et } (x, y) \in D_f \\
&\iff (x + 1)^2 + y^2 = 1 \text{ et } (x, y) \in D_f
\end{aligned}$$

L_1 est donc le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon 1, privé des points O, $(-1; -1)$ et $(-1; 1)$.

2. • **1 point** Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x - y + 3x^2y - e^{2x-3y} - 5$. Fonctions partielles de f au point $M_0(2; -3)$
F_1 est définie par $F_1(x) = f(x; -3) = x + 3 - 9x^2 - e^{2x+9} - 5 = -9x^2 + x - 2 - e^{2x+9}$
et F_2 est définie par $F_2(y) = f(2; y) = 2 - y + 12y - e^{4-3y} - 5 = 11y - 3 - e^{4-3y}$

3. • **2 points** On considère la fonction f définie sur $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{\Delta_1; \Delta_2\}$ par

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

(0,5 point) Soit Δ_m la droite d'équation $y = mx$, $m \neq \pm 1$: Remarquons tout d'abord que O est un point d'accumulation de toutes ces droites car $O \in \Delta_m$

(1 point) On a $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\ y=mx}} f(x, y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\ y=mx}} \dfrac{2x \cdot mx}{x^2 - m^2x^2} = \dfrac{2m}{1 - m^2}$

(0,5 point) Ainsi, par exemple $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\ y=2x}} f(x, y) = \dfrac{-4}{3} \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\ y=3x}} f(x, y) = \dfrac{-6}{8}$: on a trouvé deux valeurs différentes pour la limite de f lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$ en parcourant deux chemins différents, f n'admet donc pas de limite en $O(0, 0)$.

Remarque : 1 point (/ 1,5) pour l'étudiant qui étudie seulement deux droites.

4. **1,5 point** On utilise $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$, donc $\ln 0,98 = \ln(1 - 0,02) \approx -0,02$

et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, donc $e^{0,1} - 1 \approx 0,1$ et $\left(e^{0,1} - 1\right)^2 \approx 0,01$

D'où $A \approx \dfrac{-0,02}{0,01}$, i.e. $A \approx -2$ (La calculatrice donne $A \approx -1,83...$)

Exercice 1 - 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\ (Ox), (Oy)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + 2x)\ln(1 + 2y^2)}{e^{xy} - 1}$$

1. • **2,5 points** • Numérateur : **(0,25 point)** on a $x^2 + 2x \underset{0}{\sim} 2x$

(0,75 point) Posons $u(y) = 2y^2$, alors $\lim\limits_{y\to 0} u(y) = 0$

De plus $\ln(1 + u) \underset{0}{\sim} u$, donc par changement de variable, $\ln(1 + 2y^2) \underset{0}{\sim} 2y^2$

• Dénominateur : **(1 point)** Posons $v(x, y) = xy$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} v(x, y) = 0$

Comme $e^v - 1 \underset{0}{\sim} v$, on a $e^{xy} - 1 \underset{(0,0)}{\sim} xy$

(0,5 point) Par quotient $f(x, y) \underset{(0,0)}{\sim} \dfrac{2x \cdot 2y^2}{xy}$ soit $f(x, y) \underset{(0,0)}{\sim} 4y$

2. • **1 point** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 4y = 0$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. On peut donc prolonger f par continuité en $O(0; 0)$ par $\tilde{f}$ définie par $\begin{cases} \tilde{f}(x, y) = f(x, y) & \text{si} \quad (x; y) \in D_f \\ \tilde{f}(x, y) = 0 & \text{si} \quad (x; y) = (0; 0) \end{cases}$

3. • **1,5 point** Comme au 1., on a $x^2+2x \underset{0}{\sim} 2x$ et $e^{xy}-1 \underset{(0,0)}{\sim} xy$, de plus $\lim\limits_{y\to 1} \ln(1+2y^2) = \ln 3$

Donc, par quotient $f(x, y) \underset{(0,1)}{\sim} \dfrac{2x \ln 3}{xy}$ soit $f(x, y) \underset{(0,1)}{\sim} \dfrac{2 \ln 3}{y}$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0;1)} \dfrac{2 \ln 3}{y} = 2 \ln 3$, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0;1)} f(x, y) = 2 \ln 3$

Exercice 2 - 4 points

1. • **1 point** f définie sur D_f est homogène de degré k si et seulement si
$$\forall t > 0, \forall (x,y) \in D_f,\ (tx, ty) \in D_f \text{ et } f(tx,ty) = t^k f(x,y)$$
2. • **0,5 point** Si f est homogène de degré k, pour tout $(x,y) \in D_f$,
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = k.f(x,y)$$
3. • **2,5 points** Soit f définie par $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$:

   (1 point) Soit $t > 0$, $f(tx,ty) = \dfrac{tx}{(tx)^2+(ty)^2} = \dfrac{tx}{t^2(x^2+y^2)} = \dfrac{x}{t(x^2+y^2)} = t^{-1}\ f(x,y)$: f est donc homogène de degré $k = -1$

   (1 point)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

   (0,5 point) d'où :
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^3+xy^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = -f(x,y)$$

Exercice 3 - 3 points

1. • **0,5 point** $\overrightarrow{grad}\ f(M_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$
2. • **1 point**

   (0,5 point) Un vecteur normal au plan tangent au graphe $\mathcal{G}_f$ de f au point $M_0'(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ est : $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$

   (0,5 point) Une équation cartésienne de ce plan tangent est :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) - (z - f(x_0,y_0)) = 0$$
3. • **1,5 point** Soit f la fonction définie par $f(x,y) = x^2e^{x-y}$

   (0,5 point) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{x-y} + x^2e^{x-y}$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1;1) = 3$

   (0,5 point) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2e^{x-y}$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1;1) = -1$

   (0,5 point) Donc le plan tangent a pour équation : $3(x-1)-(y-1)-(z-1) = 0$, soit
$$3x - y - z - 1 = 0$$