TD 3 : Croissance démographique, progrès technique et croissance économique.

Exercice 1 :

1) Rendements d'échelle :

$$f(\lambda K,\lambda L)=(\lambda K)^{\propto}\times(\lambda L)^{\beta}=\lambda^{\propto}K^{\propto}\times\lambda^{\propto}L^{\beta}=\lambda^{\propto+\beta}\left(K^{\propto}L^{\beta}\right)=\lambda^{\propto+\beta}f(K,L)$$

- Constant si $\propto+\beta=1$
- Croissant si $\propto+\beta>1$
- Décroissant si $\propto+\beta=1$

2) On part de : $\delta k^{*}=sf(k^{*})$

$\Leftrightarrow\ \delta K=sf(K^{*})$ [Pour des raisons pratiques je n'ai pas mis d'étoile sur K dans la suite].

$\Leftrightarrow\ \delta K=s\times K^{\alpha}L^{\beta}$ [Je vais essayer d'isoler K* car c'est lui qu'on veut.]

$\Leftrightarrow\dfrac{K}{K^{\propto}}=\dfrac{s}{\delta}L^{\beta}$

$\Leftrightarrow K^{1-\propto}=\dfrac{s}{\delta}L^{\beta}$ [Rappel : $\dfrac{x^{a}}{x^{b}}=x^{a-b}$]

$\Leftrightarrow K=\left(\dfrac{s}{\delta}L^{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\propto}}$ [Rappel : $x^{a}=y\Leftrightarrow x=y^{\frac{1}{a}}$]

$\Leftrightarrow K=\left(\dfrac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\propto}}\times L^{\frac{\beta}{1-\propto}}$ [Rappel : $(x^{a})^{b}=x^{ab}$]

$\Leftrightarrow k=\left(\dfrac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\propto}}\times\dfrac{L^{\frac{\beta}{1-\propto}}}{L}$

$\Leftrightarrow\ k=\left(\dfrac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\propto}}\times L^{\frac{\beta}{1-\propto}-\frac{1(1-\propto)}{1-\propto}}$

$\Leftrightarrow k^{*}=\left(\dfrac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\propto}}\times L^{\frac{\beta+\propto-1}{1-\propto}}$

3) Si vous avez un doute remplacez dans l'équation juste au-dessus par des valeurs « aléatoires ».
Si $\propto+\beta<1\rightarrow$ Baisse du k. (L augmente plus vite que K.)
Si $\propto+\beta>1\rightarrow$ Augmentation du k. (L augmente moins vite que K.)
Si $\propto+\beta=1\rightarrow$ Pas de variation du k. (L augmente aussi vite que K.)

[Pour cet exercice si $\propto+\beta<1$ alors $\frac{\beta+\propto-1}{1-\propto}<1$, imaginons que ça fasse $0{,}3$: $L^{0,3}<L^{1}$ et donc fera baisser k. Posons $k=x\times L$; $x\times L^{0,3}<x\times L^{1}$; ça doit être clair je pense.]

5) *Oui y a pas de question 4.*
[Rappel : $x^{0}=1$]
K dépendra de la population et de sa croissance, plus elle sera élevé plus il sera élevé car si rendements constants $\propto+\beta=1$ et donc que $L^{\frac{\beta}{1-\propto}}=L$ quand on remplace on voit que ça donne $K=\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\propto}}\times L$ par conséquent plus L sera élevé plus K le sera, remplacez par des valeurs si doute.
k ne dépendra pas de la population et de sa croissance si les rendements sont constats $\propto+\beta=1$ et donc $\frac{\beta+\propto-1}{1-\propto}=\frac{1-1}{1-\propto}=0$, quand on remplace on a $k^{*}=\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\propto}}\times 1$. Il ne dépendra pas de L.

Exercice 2 :

1) E représente l'efficience du travail et EL le nombre de travailleurs efficient.
Quand le progrès technique augmente, le nombre de travailleurs efficient augmente donc la production augmente.
Si par combinaison productive on entend $K^{\propto} \times (EL)^{\beta}$ alors oui car plus β est élevé plus le progrès technique à d'effet.
Les nouvelles technologies, les infrastructures par exemple accroissent la valeur de E.

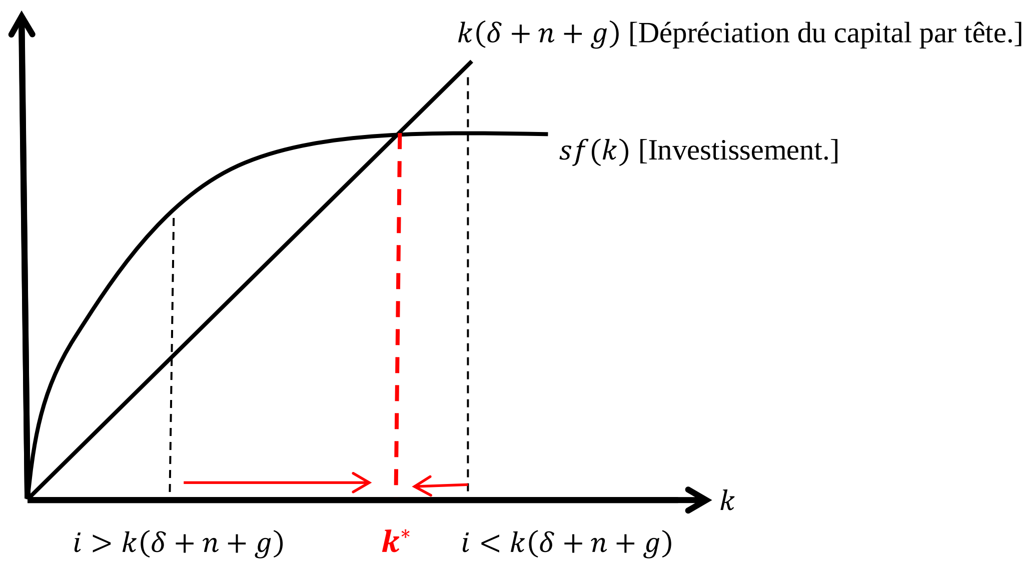
2) $Y = f(K, EL) = K^{\frac{1}{3}} \times (EL)^{\frac{2}{3}}$
$f(\lambda K, \lambda EL) = (\lambda K)^{\frac{1}{3}} \times (\lambda EL)^{\frac{2}{3}} = \lambda^{\frac{1}{3}} \times K^{\frac{1}{3}} \times \lambda^{\frac{2}{3}} \times (EL)^{\frac{2}{3}} = \lambda \left[K^{\frac{1}{3}} \times (EL)^{\frac{2}{3}}\right] = \lambda f(K, EL)$

3) $Y = K^{\frac{1}{3}} \times (EL)^{\frac{2}{3}}$
$\Leftrightarrow \frac{Y}{EL} = K^{\frac{1}{3}} \times \frac{(EL)^{\frac{2}{3}}}{EL} = K^{\frac{1}{3}} \times (EL)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{K}{EL}\right)^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \boldsymbol{y = k^{\frac{1}{3}}}$ [Rappel : $1^x = 1$]

4) $I = sY = sK^{\frac{1}{3}} \times (EL)^{\frac{2}{3}}$
$\frac{I}{EL} = s \times \frac{Y}{EL} \Leftrightarrow i = sy \Leftrightarrow i = sk^{\frac{1}{3}}$
$i = sk^{\frac{1}{3}} = sf(k)$

5) Constant ça veut se traduit mathématiquement par $\Delta k = 0$
$\Delta k = i - (\delta + n + g)k \Leftrightarrow 0 = i - (\delta + n + g)k \Leftrightarrow i = (\delta + n + g)k$
Il doit être égal au capital par tête compte tenu de la dépréciation, de la croissance démographique et du progrès technique.

6) Rappel : $sf(k) = i$
$\Delta k = sf(k) - (\delta + n + g)k = sk^{\frac{1}{3}} - k(\delta + n + g) = 0$



7)

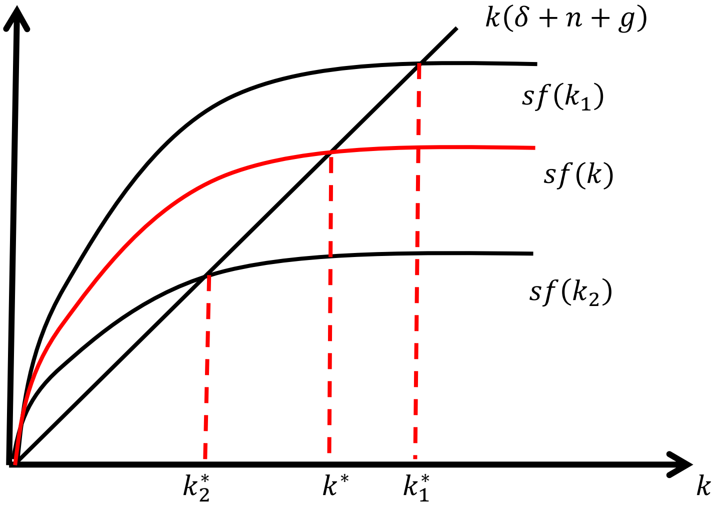
$\Delta k = sf(k) - (\delta + n + g)k$

$\Leftrightarrow sk^{\frac{1}{3}} - (\delta + n + g)k = 0$

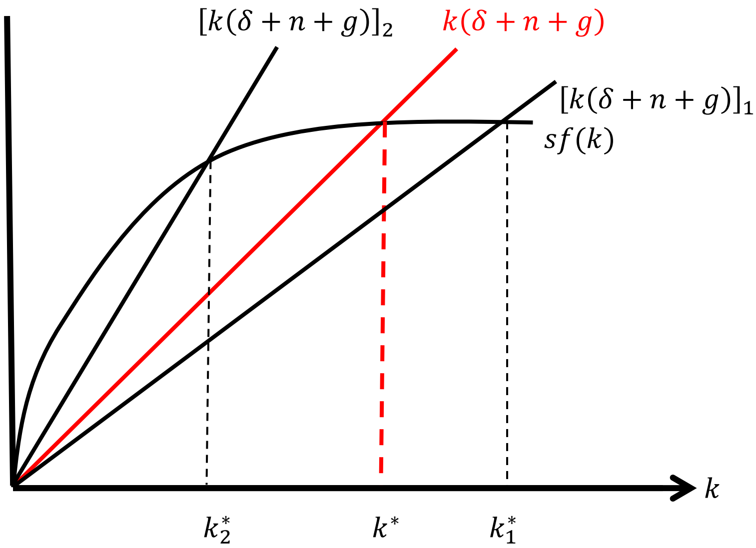
$\Leftrightarrow sk^{\frac{1}{3}} = (\delta + n + g)k \;\Leftrightarrow \frac{k^{\frac{1}{3}}}{k} = \frac{(\delta+n+g)}{s} \Leftrightarrow k^{-\frac{2}{3}} = \frac{(\delta+n+g)}{s} \Leftrightarrow k = \left[\frac{(\delta+n+g)}{s}\right]^{\frac{-3}{2}}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{k} = \left[\frac{s}{(\delta+n+g)}\right]^{\frac{3}{2}}$

Le fait que la PmK est décroissante nous garantit qu'on revient à l'Etat stationnaire.
[Pour les deux graph', le rouge ne signifie rien ; c'est juste pour pas confondre les courbes/droites.]



On a fait varier $sf(k)$, quand $sf(k)$ augmente, il en est de même pour k^* ; vise versa.



On fait varier $k(\delta + n + g)$, quand $k(\delta + n + g)$augmente, k^* diminue ; vise versa.

8) $k = \frac{K}{EL}$ $\quad y = \frac{Y}{EL}$ $\quad g$

$\Leftrightarrow K = kEL$ $\quad \Leftrightarrow Y = yEL \leftarrow n$

$n + g$

$\Leftrightarrow \frac{K}{L} = kE$ $\quad \Leftrightarrow \frac{Y}{L} = yE$ *[Il s'agit des taux en fonction desquels les facteurs et la production vont évoluer]*

g *(Oui d'après le corrigé ils évoluent tous au tauxg.)*