TD1 : La fonction de production.

Exercice 1 :

1.a)
Les rendements sont constants lorsque la production varie dans les mêmes proportions que les facteurs de production : $\lambda Y = F(\lambda K;\ \lambda L) = \lambda F(K; L)$
Exemple :

$K = 40; L = 10 \quad Y = (KL)^{\frac{1}{2}} = K^{\frac{1}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \propto + \beta = 1$

$Y = (40)^{1/2} \times (10)^{1/2} = (400)^{1/2} = 20$

$\rightarrow \lambda = 2 \quad K = 80 \quad L = 20$

$Y = (80 \times 20)^{1/2} = 40$

1.b)
Cette propriété semble vérifiée au niveau macroéconomique, à l'échelle agrégée.

2)
$Y = F(K; L) \Leftrightarrow \frac{Y}{L} = \frac{F(K;L)}{L} \Leftrightarrow \frac{Y}{L} = F(\frac{K}{L}; 1) \Leftrightarrow y = F(k; 1) \Leftrightarrow y = f(k)$

3.a)
$Y = K^{\propto} \times L^{1-\propto}$

$(\lambda K)^{\propto}(\lambda L)^{1-\propto} = \lambda^{\propto} \times K^{\propto} \times \lambda^{1-\propto} \times L^{1-\propto} = \lambda^{\propto+1-\propto} \times K^{\propto} \times L^{1-\propto} = \lambda \times K^{\propto} \times L^{1-\propto} = \lambda Y$

3.b)
$\frac{Y}{L} = \frac{K^{\propto} \times L^{1-\propto}}{L} \Leftrightarrow \frac{Y}{L} = K^{\propto} \times \frac{L^{1-\propto}}{L} \Leftrightarrow \frac{Y}{L} = K^{\propto} \times L^{-\propto} \Leftrightarrow \frac{Y}{L} = K^{\propto} \times \frac{1}{L^{\propto}} \Leftrightarrow \frac{Y}{L} = (\frac{K}{L})^{\propto} \Leftrightarrow y = k^{\propto}$

3.c)
I: Productivité marginale: On fait varier à la marge un seul facteur de production comme embaucher un travailleur supplémentaire, cela donne le surcroit d'output (ici de production).
$PmL = \frac{dY}{dL}$ Et $PmK = \frac{dY}{dK}$
Deux grandes différences entre la productivité marginale et le rendement d'échelle :
Productivité marginale : On fait varier <u>un seul</u> facteur et <u>d'une unité</u> pour voir les répercussions.
Rendement d'échelle : On fait varier les <u>deux</u> facteurs du <u>nombre d'unités qu'on veut</u>.

II : $PmK = \frac{dY}{dK} = \propto K^{\propto-1} \times L^{1-\propto} = \propto \frac{K^{\propto} \times L^{1-\propto}}{K} = \propto \frac{Y}{K}$

$PmL = \frac{dY}{dL} = K^{\propto}(1-\propto)L^{1-\propto-1} = (1-\propto)\frac{K^{\propto} \times L^{1-\propto}}{L} = (1-\propto)\frac{Y}{L}$

III : $y = k^{*}$

$$PmK = \frac{dY}{dK} = \propto k^{\propto-1} = \propto \left(\frac{K}{L}\right)^{\propto-1} = \propto K^{\propto-1} \times L^{1-\propto} = \propto \frac{K^{\propto} \times L^{1-\propto}}{K} = \propto \frac{Y}{K}$$

4)

$$\frac{PmK \times K}{Y} = \frac{\frac{\propto Y}{K} \times K}{Y} = \frac{\propto Y}{Y} = \propto = 0{,}3$$

$$\frac{PmL \times L}{Y} = \frac{(1-\propto)\frac{Y}{L} \times L}{Y} = \frac{(1-\propto)Y}{Y} = (1-\propto) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

5.a)

$$Y_2 = K^{\propto}{}_2 \times L^{1-\propto}{}_2 = (\frac{K_1}{6})^{\propto} \times (\frac{L_1}{6})^{1-\propto} = \frac{K^{\propto}{}_1}{6^{\propto}} \times \frac{L^{1-\propto}{}_1}{6^{1-\propto}} = \frac{K^{\propto}{}_1 \times L^{1-\propto}{}_1}{6^{\propto+1-\propto}} = \frac{Y_1}{6} = \frac{240}{6} = 40$$

Le résultat est prévisible car le résultat varie dans les mêmes proportions que les facteurs car rendement d'échelles constant.

5.b)

$$y_1 = \frac{Y_1}{L_1} = \frac{240}{120} = 2 \qquad\qquad y_2 = \frac{Y_2}{L_2} = \frac{40}{20} = 2$$

5.c)

$y = k^*$

$y_1 = k^*{}_1 \Leftrightarrow (k^*{}_1)^{1/\propto} = (y_1)^{1/\propto} = 2^{10/3} = 10{,}08$

$y_2 = k^*{}_2 = 2^{10/3} = 10{,}08$

$\Leftrightarrow k^*{}_1 = k^*{}_2 = 10{,}08$

5.d)

$PmK_1 = \propto K^{\propto-1} = 0{,}3 \times (10{,}08)^{-0{,}7} = 0{,}06$

$PmK_2 = \propto K^{\propto-1} = 0{,}3 \times (10{,}08)^{-0{,}7} = 0{,}06$

$\Leftrightarrow PmK_1 = PmK_2 = 0{,}06$

Exercice 2 :

Rappel : $\Delta y = \Delta x + \Delta z \; si \; y = x \times z$

1) $k = \frac{K}{L} \Leftrightarrow K = k \times L \Leftrightarrow \Delta K = \Delta k + \Delta L \Leftrightarrow \Delta k = \Delta K - \Delta L$

2) $Y = AK^{\propto}L^{1-\propto}$

$\Delta Y = \Delta A + \propto \Delta K + (1-\propto)\Delta L$

Ps : Normalement il y a aucune erreur, mais on sait jamais ^^.

Walid Yousfi