Correction contrôle continu

du lundi, 17 novembre 2014

Exercice 1 *(9 points)*

Soit $f(x,y) = (1-x^2-y^2)^{1/2}\ln(2x-y)$

1. Domaine de définition de f

   $D_f = \{(x,y) \in IR^2 :\ 1-x^2-y^2 \geq 0 \quad et \quad 2x-y>0\}$ *(1 point)*

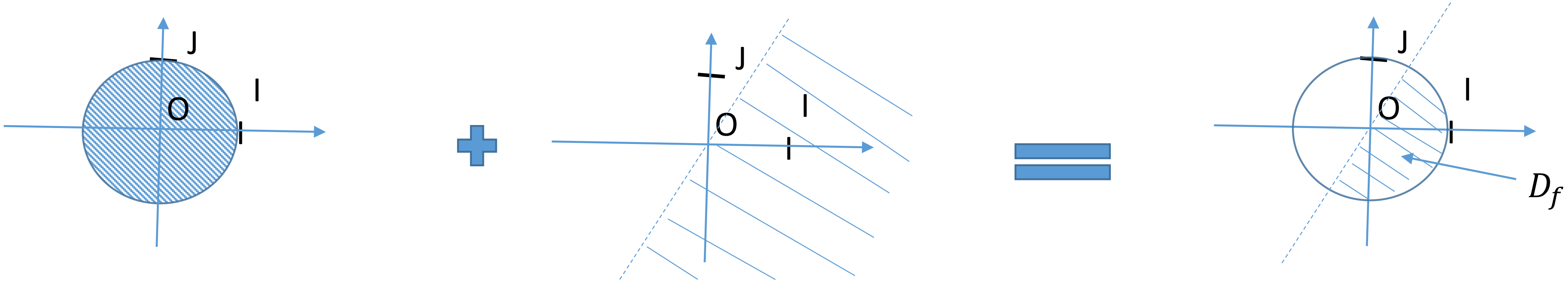
2. Tracer le domaine de définition

   - $1-x^2-y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 1$ or $x^2+y^2=1$ est l'équation du cercle $C(O,1)$

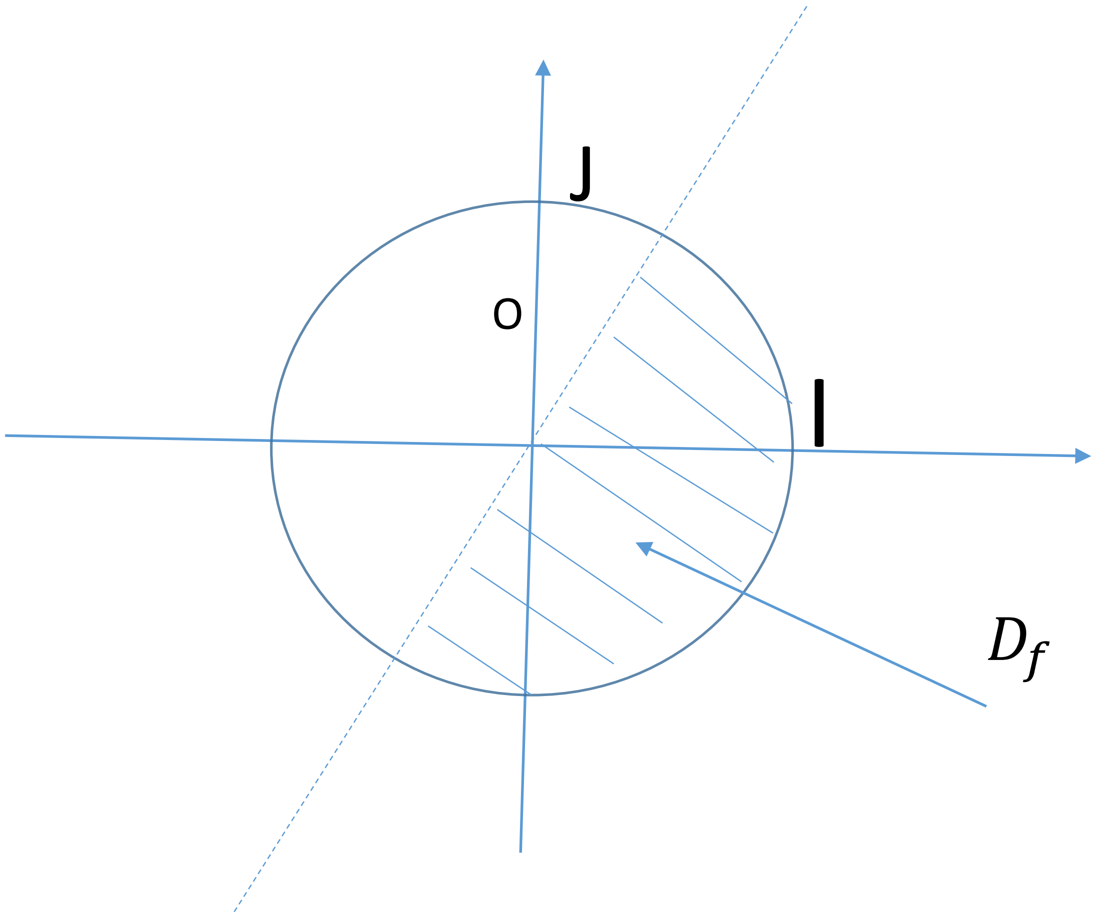
     On vérifie que 0 (0, 0)∈ D_1, en effet $0^2+0^2=0 \leq 1$ *(1 point)*

   - $2x-y>0 \Leftrightarrow y<2x$ or y $=2x$ est l'équation d'une droite.

     On vérifie que $I(1,0) \in D_2$, en effet $0<2\times 1=2$ *(1 point)*



(2 points)



D_f n'est pas un ouvert : en effet, le point $I(1,0) \in D_f$ mais $\nexists r > 0 : \ B_0(I,r) \subseteq D_f$ *(1 point)*

D_f n'est pas un fermé car D_f^C n'est pas un ouvert : *(1 point)*

en effet, le point $O(0,0) \in D_f^C$ mais $\nexists r > 0 : \ B_0(O,r) \subseteq D_f^C$

(1 point)

Exercice 2

$$g(t) = (2t+1)f(3t^2+1, t^3+t)$$

Calcul de la dérivée de g en fonction des partielles de

$$g'(t) = 2f(3t^2+1, t^3+t) + (2t+1)\left[6t\frac{\partial f}{\partial x}(3t^2+1, t^3+t) + (3t^2+1)\frac{\partial f}{\partial y}(3t^2+1, t^3+t)\right]$$

$$g'(t) = 2f(3t^2+1, t^3+t) + (2t+1)6t\frac{\partial f}{\partial x}(3t^2+1, t^3+t) + (2t+1)(3t^2+1)\frac{\partial f}{\partial y}(3t^2+1, t^3+t)$$

(1 point) *(1 point)* *(1 point)*

Exercice 3

$$g(s,t) = (s^2 + 3t^2 + 1)^{1/2} f(3s^2+t,\ 2+t^3)$$

Calculer les dérivées partielles premières de g en fonction des dérivés partielles de f.

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = \frac{2s}{2(s^2+3t^2+1)^{1/2}} f(3s^2+t,\ 2+t^3) + (s^2 + 3t^2 + 1)^{1/2}\left[6s\frac{\partial f}{\partial x}(-) + 0\frac{\partial f}{\partial y}(-)\right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = \frac{s}{(s^2+3t^2+1)^{1/2}} f(3s^2+t,\ 2+t^3) + 6s(s^2 + 3t^2 + 1)^{1/2}\frac{\partial f}{\partial x}(3s^2+t,\ 2+t^3)$$ *(3 points)*

$$\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = \frac{6t}{2(s^2+3t^2+1)^{1/2}} f(3s^2+t,\ 2+t^3) + (s^2 + 3t^2 + 1)^{1/2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(-) + 6t^2\frac{\partial f}{\partial y}(-)\right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = \frac{3t}{(s^2+3t^2+1)^{1/2}} f(3s^2+t,\ 2+t^3) + (s^2 + 3t^2 + 1)^{1/2}\frac{\partial f}{\partial x}(-) + 6t^2(s^2 + 3t^2 + 1)^{1/2}\frac{\partial f}{\partial y}(-)$$

(3 points)

Exercice 4

$f\,:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y) = e^{3x} - xy + y^2$

L' équation $f(x,y) = 2$ permet-elle d'écrire y en fonction de x au voisinage du point $X^* = (0,1)$?

Rappel des hypothèses

1. D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
2. $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, fonction C^p, p > 0
3. $(x^*, y^*) \in D$ tel que : $f(x^*, y^*) = 2$
4. $\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \neq 0$

Exercice 4

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y) = e^{3x} - xy + y^2$

1. $D = \mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ *(0,5 point)*

2. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, est une fonction C^p, $\forall p > 0$ *(0,5 point)*

3. $(0\,,1\,) \in \mathbb{R}^2$ et $f(0\,,1\,) = e^0 - 0 + 1^2$

$$= 1 + 1 = 2$$ *(0,5 point)*

4. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y\,) = \dfrac{\partial}{\partial y}[e^{3x} - xy + y^2]$

$$= -x + 2y$$ *(0,5 point)*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1\,) = -0 + 2 = 2 \neq 0$$ *(0,5 point)*

D'après le <u>théorème des fonctions implicites</u>, l'équation $f(x,y)=2$ définit y en fonction de x au voisinage de $(x^*,y^*)=(0,1)$. *(1,5 point)*

En d'autres termes,

$$\exists\alpha>0, \exists\beta>0 \; et \; \exists\varphi : \begin{array}{ccc}]-\alpha,\ \alpha[& \longrightarrow &]1-\beta,\ 1+\beta[\\ x & \longmapsto & y \end{array}$$

Tel que : $\forall(x,y)\in\,]-\alpha,\ \alpha[\times]1-\beta,\ 1+\beta[,\ f(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)$

(2 points)

S'écrit encore : $\forall x\in\,]-\alpha,\ \alpha[, f\big(x,\varphi(x)\big)=2$

Ecrire la formule de développement limité à l'ordre 2 de φ au voisinage de $x^* = 0$

Puisque f est C^2, alors φ est aussi C^2 et la formule de développement limité de φ au voisinage de $x^* = 0$ est donnée par :

$$\varphi(x) = \varphi(x^*) + (x - x^*)\varphi'(x^*) + \frac{(x - x^*)^2}{2}\varphi''(x^*) + |x - x^*|^2\varepsilon(x)$$

Avec $\lim\limits_{x \to x^*} \varepsilon(x) = 0$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(0) + x^2\varepsilon(x)$$

Avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Il faut calculer : $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$

Calcul de $\varphi(0)$

On sait que :

$\forall (x,y) \in \left]-\alpha, \quad \alpha\right[\times \left]1-\beta, \quad 1+\beta\right[, \quad f(x,y) = 2 \iff y = \varphi(x)$

Or $(0\,,1\,) \in \left]-\alpha,\ \alpha\right[\times \left]1-\beta,\ 1+\beta\right[$

de plus $\quad f(0\,,1\,) = e^0 - 0 + 1^2$

$$= 1 + 1 = 2$$

(2 points)

On en déduit que de ce qui précède que : $1 = \varphi(0)$

Calcul de $\varphi'(0)$

$\forall x \in]-\alpha,\ \alpha[, f\big(x,\varphi(x)\big) = 2$

$$\Longrightarrow \forall x \in]-\alpha,\alpha[, \qquad \frac{df}{dx}\big[f\big(x,\varphi(x)\big)\big] = 0$$

$$\Longrightarrow \forall x \in]-\alpha,\alpha[, \quad \frac{\partial f}{\partial x}\big(x,\varphi(x)\big) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x,\varphi(x)\big) = 0$$

En particulier, pour $x^* = 0 \in]-\alpha,\alpha[$, on a $\varphi(x^*)=\varphi(0) = 1$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + \varphi'(0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,1\ ) = 0$$

(3 points)

$$\Longrightarrow \varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1\ )}$$

or $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y\ ) = 3e^{3x} - y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y\ ) = -x + 2y$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1\ ) = 2 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,1\ )$

$$\Longrightarrow \varphi'(0) = -\frac{2}{2} = -1$$

Calcul de $\varphi''(0)$

$\forall x \in\,]-\alpha,\ \alpha[, f\big(x,\varphi(x)\big) = 2$

$$\Longrightarrow \forall x \in\,]-\alpha,\alpha[, \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}\Big[f\big(x,\varphi(x)\big)\Big] = 0$$

$$\Longrightarrow \forall x \in\,]-\alpha,\alpha[, \quad \frac{df}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\big(x,\varphi(x)\big) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x,\varphi(x)\big)\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \forall x \in\,]-\alpha,\alpha[, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(x,\varphi(x)\big) + \varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(x,\varphi(x)\big) + \varphi''(x)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x,\varphi(x)\big)$$

$$+\varphi'(x)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\big(x,\varphi(x)\big) + \varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(x,\varphi(x)\big)\right] = 0$$

En particulier, pour $x^* = 0 \in]-\alpha, \alpha[$, on a $\varphi(x^*)$=$\varphi(0) = 1$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(x, \varphi(x)\big) + \varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(x, \varphi(x)\big) + \varphi''(x)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \varphi(x)\big)$$

$$+\varphi'(x)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\big(x, \varphi(x)\big) + \varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(x, \varphi(x)\big)\right] = 0$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) + \varphi'(0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) + \varphi''(0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) + \varphi'(0)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) + \varphi'(0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1)\right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) + \varphi'(0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) + \varphi''(0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) + \varphi'(0)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) + \varphi'(0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1)\right] = 0$$

$\varphi(0)=1,\qquad \varphi'(0) = -1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 9e^{3x} \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)=1$ (5 points)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1)$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 2$

On trouve : $\varphi''(0) = -\frac{13}{2}$

Et $\varphi(x) = 1 - x - \frac{13}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ (2 points)

Fin

Merci Pour Votre Attention