Université de Cergy-Pontoise *UFR économie et gestion*

L2 Gestion, 2014 - 2015

Statistiques

Correction contrôle du 04 mars 2015

Exercice 1 (9 pts)

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ et $E(X) = Var(X) = \lambda$ **(0.5×3pt)**
2. (a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ **(1pt)**.

   (b)
   - Si $k > 0$, alors $P(Y = k/X = n) = 0$.
   - Si $k \leq n$, alors comme les individus ont des comportements indépendants, $Y/X = n$ peut être considéré comme le nombre de succès obtenus au cours de n épreuves identiques et indépendantes avec pour probabilité de succès p. Ainsi, la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est binomiale de paramètres n et p. D'où $P(Y = k/X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

     (0,5pt + 2pts).
3. Les événements $(\{X = n\})_{n\in N}$ sont deux à deux disjoints. Ainsi,

$$P(Y=k) = P(\{Y=k\} \cap \{X \in \mathbb{N}\}) = P\Big(\bigcup_{n\geq 0}\{Y=k, X=n\}\Big) = \sum_{n\geq 0} P(Y=k, X=n)$$

$$= \sum_{n\geq 0} P(Y=k/X=n)P(X=n) = \sum_{n\geq k} P(Y=k/X=n)P(X=n) \quad \textbf{(1,5pts)}.$$

4. La probabilité qu'il y ait au moins un achat pour un jour donné est

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y<1) = 1 - P(Y=0) = 1 - e^{-\lambda\times p}\frac{(\lambda\times p)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda\times p} \quad \textbf{(1pt)}.$$

5. On a $X = Y + Z$. Donc $E(Z) = E(X) - E(Y) = \lambda - \lambda \times p = \lambda(1-p)$ **(0,5pt + 1pt)**.

Exercice 2 (4 pts)
Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}[0,1]$. La densité de X est $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

(i) $E(e^X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^x f(x)dx = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$ **(2pts)**.

(ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(X^k) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx = \int_0^1 x^k dx = [\frac{1}{k+1}x^{k+1}]_0^1 = \frac{1}{k+1}$ **(2pts)**.

Exercice 3 (8 pts)
Dans la suite, Y est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et de fonction de répartition F. On utilisera la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ pour obtenir les valeurs de F.

1. Soit X la variable aléatoire égale au coût hebdomadaire occasionné par une voiture. D'après l'énoncé, $X \sim \mathcal{N}(150, 25^2)$. La probabilité que le coût occasionné par une voiture excède le prix de location est

$$P(X > 200) = 1 - P(X \leq 200) = 1 - P\Big(\frac{X-150}{25} \leq \frac{200-150}{25}\Big) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - F(2)$$
$$= 1 - 0,9772 = 0,0228 \quad \textbf{(2pts)}.$$

2. (a) Soit X la variable aléatoire égale au montant des achats effectués ; alors, $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. D'après l'énoncé, $P(X \leq 50) = 0,3085$ et $P(50 \leq X \leq 100) = 0,6687$. Ainsi,

$$P(X \leq 50) = P\Big(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{50-m}{\sigma}\Big) = P\Big(Y \leq \frac{50-m}{\sigma}\Big) = F\Big(\frac{50-m}{\sigma}\Big) = 0,3085.$$

On sait (voir cours) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = 1 - F(x)$. Donc $F\Big(-\frac{50-m}{\sigma}\Big) = 1 - F\Big(\frac{50-m}{\sigma}\Big) = 1 - 0,3085 = 0.6915$. Par conséquent, on obtient (par la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$), $-\frac{50-m}{\sigma} = \frac{1}{2}$ i.e. $2m - \sigma = 100$ **(2pts)**.
De même, on a

$$P(50 \leq X \leq 100) = P\Big(\frac{50-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{100-m}{\sigma}\Big) = P\Big(\frac{50-m}{\sigma} \leq Y \leq \frac{100-m}{\sigma}\Big)$$
$$= P\Big(Y \leq \frac{100-m}{\sigma}\Big) - P\Big(Y \leq \frac{50-m}{\sigma}\Big) = F\Big(\frac{100-m}{\sigma}\Big) - 0,3085 = 0,6687.$$

Donc, $F\Big(\frac{100-m}{\sigma}\Big) = 0,6687 + 0,3085 = 0,9772$. Et par la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on obtient $\frac{100-m}{\sigma} = 2$ i.e. $m + 2\sigma = 100$ **(1pt)**.

En résolvant le système d'équations $\begin{cases} 2m - \sigma = 100 \\ m + 2\sigma = 100 \end{cases}$, on obtient $\begin{cases} m = 60 \\ \sigma = 20. \end{cases}$ **(1pt)**

(b) On cherche $a \geq 0$ tel que $P(X > a) = 0,05$. On a

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - P\Big(\frac{X-60}{20} \leq \frac{a-60}{20}\Big) = 1 - P\Big(Y \leq \frac{a-60}{20}\Big) = 1 - F\Big(\frac{a-60}{20}\Big).$$

Ainsi, $P(X > a) = 0,05$ entraîne $1 - F\Big(\frac{a-60}{20}\Big) = 0.05$ i.e. $F\Big(\frac{a-60}{20}\Big) = 1 - 0,05 = 0,95$ i.e. $\frac{a-60}{20} = 1,645$ (par la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$). D'où $a = 92,9$. Donc, il faut attribuer cette remise à partir de $92,9$€ **(2pts)**.