Choix Intertemporels et dans l'Incertain

6: Quelques Elements d'Assurance

Fabian Gouret

https://sites.google.com/site/fabgouret/

November 28, 2016

Table of contents

1. Introduction

- Dans la partie de choix dans l'incertain, nous avons vu beaucoup d'exercices concernant les assurances (demande et offre).
- Ce chapitre généralise certains résultats obtenus dans les exercices.
- Rappel: les exercices font partis du cours. Certains éléments/résultats obtenus complètent les chapitres! (agent averse au risque ayant, sous certaines conditions intérêt à prendre quand même un peu d'actifs risqués, voire, equity premium puzzle...).
- Les exercices d'assurance étaient assez génériques, mais certains résultats peuvent être généralisés (l'objectif de ce chapitre additionnel).

- Le contrat d'assurance est un contrat de transfert de risque: l'assuré possède un actif qui peut être détruit partiellement ou totalement; en échange d'une prime d'assurance, un assureur accepte de supporter le risque, i.e., de verser une indemnité en cas de réalisation du sinistre.
- D'autres types de contrat implique une forme d'assurance: par exemple le contrat de métayage dans le domaine agricole est un contrat où le producteur est d'accord pour recevoir un pourcentage de la production; en cas de mauvaises récoltes en raison de sécheresse, il subit donc une partie du risque contrairement à du fermage.

- Le transfert de risque est extrêmement important. L'assurance permet de dissocier la décision d'investissement de la décision risquée.
- En groupant les risques de nombreux assurés, l'assureur bénéficie de la Loi des Grands Nombres (qui exprime le fait que les caractéristiques d'un échantillon aléatoire se rapprochent des caractéristiques de la population): la probabilité d'un accident=pourcentage de gens ayant un accident.
- Tant qu'il n'y a pas trop de corrélations entre les risques supportés initialement par les différents assurés, l'assureur peut diversifier son risque, et il est pratique de penser à l'assureur comme quelqu'un de neutre au risque: seul le profit espéré compte (car finalement la probabilité des accidents c'est le pourcentage de gens qui auront un accident).
- L'assureur peut être pensé comme un intermédiaire qui collectionne et disperse les fonds parmi les assurés: les assurés mettent de l'argent dans un pot commun (que garde l'assureur) et prennent dans le pot quand un sinistre arrive (l'assureur leur donne une indemnité en prenant dans le pot). Ce concept est en général appelé principe de mutualité.

- C'est intéressant pour un agent qui a un actif de s'assurer s'il est averse au risque.
- Considérons un agent qui a une richesse; il peut subir une perte aléatoire $\widetilde{x}$.
- Un contrat d'assurance stipule la prime P qui doit être payée par l'agent afin de recevoir une indemnité $I(x)$ qui indique le montant payé par l'assureur pour un perte de montant x.
- Il y a assurance complète si l'assureur rembourse l'assuré du montant total de la perte x, i.e., si $I(x) = x$.
- On appelle prime actuarielle le montant de la prime égale à l'espérance mathématique de l'indemnité versée, i.e., la prime actuarielle est $E[I(\widetilde{x})]$, avec E l'opérateur espérance.
- La prime d'assurance est dite juste/équitable ou actuariellement juste/équitable si elle est égale à la prime actuarielle du contrat: $P = E[I(\widetilde{x})]$ (Profit espéré nul pour l'assureur, i.e., concurrence)
- La souscription à une assurance complète à un montant actuariellement équitable veut dire que la prime d'assurance est donnée par $P = E(\widetilde{x})$

- On montre dans ce chapitre que quand le montant de la prime d'assurance est actuariellement juste, alors l'assurance complète est optimale pour l'agent qui cherche à s'assurer.
- Dans le monde réel, il y a cependant des coûts de transaction. La prime actuarielle est généralement majorée d'un taux de marge appelé taux de chargement. Le chargement permet de couvrir les frais de vente et de gestion, y compris les rémunérations de salariés éventuels de l'assureur.
- Quand on ajoute ce taux de chargement les résultats sont moins évidents.

2. Coassurance

- Considérons un agent averse au risque avec une richesse initiale w_0 et devant supporter un risque de perte $\widetilde{x}$.
- Pour chaque euro payé par la police d'assurance, l'assureur subit un coût λ de coûts de transaction (λ est donc le taux de chargement).
- La prime d'assurance: $P = (1+\lambda)E[I(\widetilde{x})]$ (on est en concurrence!)
- Si la variable $\widetilde{x}$ n'est pas binaire, la couverture du risque peut prendre des formes extrêmement différentes, formes caractérisées par la fonction I.
- Une qui est souvent utilisée est la co-assurance ou contrat de co-assurance.
- Par définition, dans le contrat de co-assurance, l'indemnité est un pourcentage du dommage: $I(x) = \beta x$
- β est appelé le taux de couverture (ou taux de coassurance), $1-\beta$ le taux de rétention.

- Le taux de couverture/co-assurance β est choisi par l'assuré en considérant la règle de tarification suivante:

$$P(\beta) = (1+\lambda)E[I(\widetilde{x})] = \beta(1+\lambda)E(\widetilde{x})$$

- La richesse finale de l'assuré avec perte aléatoire $\widetilde{x}$ et taux de coassurance β est:

$$\widetilde{y}(\widetilde{x},\beta) = w_0 - \beta(1+\lambda)E(\widetilde{x}) - (1-\beta)\widetilde{x}$$

- Quand $\beta = 1$, on a assurance complète, et la richesse finale n'est plus aléatoire (quelque soit l'état du monde qui sort, nous aurons la même richesse finale):

$$y(\widetilde{x},\beta) = w_0 - \beta(1+\lambda)E(\widetilde{x})$$

- Quand $\beta = 0$ on a la situation ou aucune assurance n'est achetée:

$$\widetilde{y}(\widetilde{x},\beta) = w_0 - \widetilde{x}$$

- Le problème de l'agent est de trouver le taux optimal de couverture β^*
- L'assuré choisit le taux de co-assurance qui maximise l'espérance d'utilité de la richesse finale:

$$\max_{\beta} H(\beta) = E[u(\widetilde{y})] = E[u(w_0 - \beta(1+\lambda)E(\widetilde{x}) - (1-\beta)\widetilde{x})]$$

- Les dérivées premières et secondes sont:

$$H^{'}(\beta) = \frac{\partial E[u(\widetilde{y})]}{\partial \beta} = E[(\widetilde{x} - (1+\lambda)E(\widetilde{x}))u'(\widetilde{y})]$$

et

$$H^{''}(\beta) = \frac{\partial^2 E[u(\widetilde{y})]}{\partial \beta^2} = E[(\widetilde{x} - (1+\lambda)E(\widetilde{x}))^2 u''(\widetilde{y})]$$

- Remarquez que $(\widetilde{x} - (1+\lambda)E(\widetilde{x}))^2 > 0$ est toujours positif et u'' toujours négatif (en raison de l'aversion au risque). Cela veut dire que l'espérance d'utilité de notre assuré est une fonction concave du taux de co-assurance.
- Nous avons donc que

$$H^{'}(\beta^*) = E[(\widetilde{x} - (1+\lambda)E(\widetilde{x}))u'(\widetilde{y})] = 0$$

est une condition nécessaire et suffisante pour la maximisation de $H(\beta)$.

- Remarquez aussi que si $\beta = 1$, alors:

$$H^{'}(1) = E[[\widetilde{x} - (1+\lambda)E(\widetilde{x})]u'[w_0 - (1+\lambda)E(\widetilde{x})]] = E[-\lambda u'(.)E(\widetilde{x})]$$

- S' il n'y a pas de coûts de transaction (i.e., taux de chargement=0), alors on voit que $H^{'}(1) = 0$.
- Autrement dit, quand $\lambda = 0$, il y a assurance complète.
- Ce n'est pas surprenant. Rappelez vous que:

$$\widetilde{y}(\widetilde{x}, \beta) = w_0 - \beta(1+\lambda)E(\widetilde{x}) - (1-\beta)\widetilde{x}$$

Si $\lambda = 0$, alors

$$\widetilde{y}(\widetilde{x}, \beta) = w_0 - \beta E(\widetilde{x}) - (1-\beta)\widetilde{x}$$

- Si on considère maintenant $E(\widetilde{y})$, nous voyons que la richesse finale espérée n'est pas influencée par notre choix d'assurance, i.e., est identique quelque soit β.
- Si deux loteries ont la même espérance de gains, mais que l'une est plus risquée, quelqu'un averse au risque préfère la moins risquée.
- Quelqu'un qui est averse au risque va donc préférer cette richesse espérée avec un risque nul ($\beta = 1$)!

- Considérez maintenant que $\lambda > 0$ et $\beta = 1$, donc

$$H^{'}(1) = E[[\widetilde{x} - (1+\lambda)E(\widetilde{x})]u'[w_0 - (1+\lambda)E(\widetilde{x})]] = E[-\lambda u'(.)E(\widetilde{x})]$$

- Donc H' est négatif si $\beta = 1$.
- Cela veut dire qu'en réduisant le taux de couverture de 1 à un plus petit taux, on augmente l'espérance d'utilité de l'agent.
- On a donc $\beta^* < 1$ si $\lambda > 0$

- On a obtenu le théorème de Mossin (1968):
- Une assurance complète ($\beta^* = 1$) est optimale si le prix est actuariellement équitable (i.e., si le taux de chargement est nul). Une assurance partielle ($\beta^* < 1$) est optimale si la prime inclut un taux de chargement positif.