# Choix Intertemporels et dans l'Incertain

## II. Choix intertemporels (en univers certain)

Fabian Gouret

https://sites.google.com/site/fabgouret/

November 27, 2012

# Table of contents

# 1. Introduction

- Analyse de la consommation et de la production en L1 et L2: statique.
- Elle a passé sous silence le fait que les comportements économiques se situent dans une perspective dynamique.
- Si je consomme moins aujourd'hui je consommerai plus dans le futur.
- De même une entreprise peut décider d'investir plus aujoourd'hui pour avoir plus de profit dans l'avenir.

# 2. L'actualisation: principe

- Des discussions de cette nature conduisent les agents à comparer des revenus, des consommations, des recettes... qui se situent à des dates différentes.
- C'est l'opération d'actualisation qui permet d'effectuer ces comparaisons.

- Exemple: considérons un individu a qui l'on propose soit de recevoir 2000 euros aujourd'hui, soit 2100 euros dans 1 an.
- Supposons que cet individu peut prêter ou emprunter à un taux annuel de 7%.
- Quelle alternative choisit-il?
- S'il place 2000 euros aujourd'hui, il disposera de:
- $2000 \times 1,07 = 2140$ euros dans 1 an.
- Conclusion: la première alternative permet d'obtenir 2140 euros dans 1 an et est supérieure à la 2eme alternative de 2100 euros.

- Ce calcul élémentaire montre que c'est le taux d'intérêt qui permet de comparer des montants disponibles à des dates différentes en les ramenant à la même date.
- Nous aurions pu procéder de manière inverse et calculer la somme disponible aujourd'hui qui serait équivalente aux 2100 euros payables dans un an dans la deuxième alternative.
- Soit $A$ ce montant disponible aujourd'hui.
- Pour que l'agent dispose de $A$ aujourd'hui il doit les emprunter et pouvoir les rembourser dans 1 an, intérêts compris, avec les 2100 euros promis.
- $A \times 1,07 = 2100$
- $A = 1962$ euros
- La deuxième alternative permet de recevoir 1962 euros maintenant et est inférieure aux 2000 euros payables aujourd'hui.

- Pour comparer des recettes ou des revenus disponibles à des dates différentes ou des dépenses à effectuer à des dates distinctes, on les ramène à des montants payables aujourd'hui, et c'est cette opération qu'on appelle actualisation.

## Définition générale (Actualisation en temps discret)

Supposons que le temps soit repéré de manière discrète $t = 0, 1, 2...$, qu'il soit possible d'emprunter et/ou de prêter à un taux d'intérêt $i$ par période de temps, et que $A_t$ désigne une recette ou une dépense à recevoir à la date $t$, on appellera valeur actuelle (ou valeur actualisée) de cette recette ou dépense la somme définie par:

$$\overline{A} = \frac{A_t}{(1+i)^t}$$

On dit que $i$ est le taux d'actualisation.

- Exercice: Considérons un individu voulant acheter une voiture, et à qui on propose trois modalités de paiement.
- La première modalité consiste à payer aujourd'hui, i.e. en $t = 0$, le prix du véhicule, soit 16000 euros.
- La deuxième modalité est de payer de manière échelonnée dont les modalités sont fixés par le vendeur: payer 4000 euros en $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$, $t = 5$ et $t = 6$.
- La troisième modalité est une forme de leasing: Il paye 6000 euros en $t = 0$ et $t = 1$ ce qui correspond à une période de location. et en $t = 2$ il rajoute 6000 euros et la voiture lui appartient.
- Calculez les coûts actualisés et dites la solution retenue. ($i = 0,07$)

- Réponse: Le coût actualisé du leasing est de 16848 euros; la modalité 2 à un coût actualisé de 19066 euros. On choisit la modalité 1.

# 3. Consommateur

- En L1 et L2, le consommateur utilisait intégralement son revenu pour consommer.
- Dans la réalité, le revenu d'un ménage se partage entre une partie affectée à la consommation et une partie affectée à l'épargne pour consommer plus tard.

# 3.1 Contrainte budgétaire intertemporelle et taux d'intérêt réel

- Soit deux périodes $t = 0, 1$
- Le consommateur peut prêter et emprunter aux taux d'intéret $i$.
- Le consommateur obtient le revenu $R_0$ en $t = 0$ et $R_1$ en $t = 1$.
- On considère qu'il consomme un bien unique.
- $C_t$ représente la quantité consommée en $t$.
- $p_t$ est le prix unitaire en $t$ du bien consommé.
- Il y a de l'inflation. Le taux d'inflation, i.e. le taux de croissance du prix est $a$.

- On a donc:

$$p_1 = (1 + a)p_0$$

- En $t = 0$ l'individu peut consommer d'avantage que ne le permet son revenu courant $R_0$; Alternativement il peut épargner et consommer moins que le revenu courant pour acheter en $t = 1$ une quantité de bien plus importante que ne le permettrait le revenu futur $R_1$. On note $E$ l'épargne nette du consommateur en $t = 0$ (cette épargne est négative si emprunt).
- On a donc en $t = 0$:

$$p_0 C_0 + E = R_0$$

- On a en $t = 1$:

$$p_1 C_1 = R_1 + (1 + i)E$$

- En éliminant $E$ entre ces deux relations, on obtient:

$$p_0 C_0 + \frac{p_1 C_1}{1+i} = R_0 + \frac{R_1}{1+i}$$

- Cette égalité est appelée la contrainte budgétaire intertemporelle du consommateur.
- Elle souligne le fait que la somme des dépenses de consommation actualisées doit être égale à la somme des revenus actualisés.

- Notons $\Omega = R_0 + \frac{R_1}{1+i}$
- Faisons l'hypothèse que $p_0 = 1$, donc $p_1 = 1 + a$
- La contrainte de budget intertemporelle s'écrit alors:

$$C_0 + \frac{1+a}{1+i} C_1 = \Omega$$

- Dessiner la contrainte de budget dans un plan $(C_0, C_1)$
- Quelle est la pente de la droite de budget?

- Cette pente de budget (en valeur absolue) représente le supplément de consommation accessible en $t = 1$ si on réduit de une unité la quantité achetée en $t = 0$. Si on note cette pente $1 + r$, on a:

$$1 + r = \frac{1 + i}{1 + a}$$

- $r$ est appelé le taux d'intérêt réel.
- Remarquez que:

$$(1 + r)(1 + a) = 1 + i$$

$$i = r + a + ar$$

- $ar$ est souvent négligé car les taux sont de l'ordre de quelques pour-cent, et vous avez dû voir:
- $r \simeq i - a$

# 3.2 Arbitrage consommation-épargne

- Notre consommateur a des préférences qui portent sur les couples $(C_0, C_1)$; elles déterminent des courbes d'indifférence et peuvent être représentées par une fonction d'utilité $U(C_0, C_1)$ appelée fonction d'utilité intertemporelle.
- Notre consommateur va maximiser cette utilité sous la contrainte budgétaire intertemporelle:

$$\max U(C_0, C_1)$$

$$\text{s.c.} \;\; C_0 + \frac{1+a}{1+i} C_1 = \Omega$$

- La combinaison optimale $(C_0^*, C_1^*)$ est donnée par le point de tangence entre la courbe d'indifférence et la droite de budget.
- Le choix du consommateur peut être caractérisé en introduisant le TMS de la consommation future à la consommation courante, i.e.:

$$-\frac{dC_1}{dC_0} = \frac{\partial U/\partial C_0}{\partial U/\partial C_1}$$

- Ce TMS représente le supplément de consommation future compensant une réduction unitaire de consommation courante, à utilité inchangée.
- Si ce taux est noté $1+R$, i.e. si on note $\frac{\partial U/\partial C_0}{\partial U/\partial C_1} = 1+R$, on dit que $R$ est le taux d'escompte psychologique.

- Du point de vue du consommateur, 1 unité de consommation en $t = 0$ est équivalente à 1 unité en $t = 1$
- Vous remarquerez que pour la combinaison $(C_0^*, C_1^*)$, on a:

$$(1 + i)/(1 + a) = 1 + R$$

- Dit autrement $R = r$
- Pour la combinaison choisit par le consommateur le taux d'escompte psychologique est égal au taux d'intérêt réel.
- Pourquoi?

- Car selon la définition du taux d'escompte psychologique, une augmentation de la consommation future égale à $1 + R$ suffit à maintenir inchangée la satisfaction du consommateur.
- Si $r > R$ la satisfaction a forcément augmenté.
- La seul situation ou on ne peut pas augmenter la satisfaction c'est quand $r = R$.

# 3.3 L'équilibre des prêts et des emprunts et la détermination du taux d'intérêt

- Dans un économie où certains souhaitent emprunter et d'autres des placements en $t = 0$, un équilibre des fonds prêtables apparaît lorsque $i$ est à un niveau pour lequel la somme des emprunts que souhaitent effectuer certains agents est égale au montant total des placements désirés par les autres agents.
- Faire le graphique pour une économie de deux agents.

# 3.4 Exemple

- Soit une économie composée de deux types d'agents.
- Les consommateurs de type 1 perçoivent des revenus égaux à 200 à chaque période.
- Les consommateurs de type 2 reçoivent 20 à la première période, et 100 à la deuxième.

- 500 consommateurs sont de type 1, 1000 consommateurs sont de type 2.
- Chaque consommateur à des préférences représentables par:

$$U(C_0, C_1) = 20C_0^{0,5} + C_1$$

- On suppose que l'inflation est égale à 0. Dit autrement: les consommateurs sont certains que $a = 0$.
- Question: Quel taux d'intérêt équilibre les prêts et les emprunts dans cette économie?

# 3.5 Exemple 2

- Un individu vit 2 périodes. Il dispose en première période d'un revenu $R_1$ et en deuxième période d'un revenu $R_2$.
- En $t = 1$ il peut épargner une partie de son revenu $R_1$ pour la période $t = 2$.
- Alternativement il peut emprunter sur ses revenus futurs pour augmenter sa consommation en $t = 1$.
- L'emprunt et l'épargne se font au taux d'intérêt $r$.
- $S$ est l'épargne nette.

- La consommation est donnée par $C_1 = R_1 - S$ en $t = 1$ et par $C_2 = R_2 + (1 + r)S$ en $t = 2$.
- L'utilité de notre individu est donnée par:

$$U(C_1, C_2) = C_1^{0,5} + \delta C_2^{0,5} \text{ avec } \delta > 0$$

- Questions: 1. Déterminez le niveau optimal de l'épargne $S$. Comment varie cette épargne en fonction de $R_1$, $R_2$ et $r$.
- 2. Soit la richesse actualisée de notre consommateur donnée par

$$W = R_1 + R_2/(1+r)$$

  Montrez que quand l'épargne est choisie de façon optimale les consommations $C_1$ et $C_2$ ne dépendent que de la richesse actualisée de notre consommateur et du taux d'intérêt.

# 4. Une représentation des choix intertemporels de l'entreprise

- Tout comme les consommateurs, les entreprises ont à prendre des décisions qui ne s'apprécient que dans le long terme.
- Renouveler ou acheter des équipements, ouvrir une usine qui génère des dépenses immédiates mais un profit futur.
- En micro L1 et L2, on parle souvent de facteurs fixes et facteurs variables.
- Pourquoi?

- En opposant court terme et long terme, on néglige une question fondamentale: celle du processus d'ajustement par lequel les entreprises vont progressivement modifier la quantité d'actifs dont elles disposent pour se rapprocher plus ou moins rapidement de la situation optimale de long terme.
- Pour décrire cet ajustement, il faut se placer dans un cadre intertemporel.

# 4.1. Le modèle

- On considère 3 périodes: $t = 0, 1, 2$
- On prend en compte le décalage qui existe inévitablement entre l'achat des facteurs de production et la vente de produits fabriqués via ces facteurs: les dépenses relatives à la période $t$ se font en $t$, mais les recettes relatives à cette dépense se font en $t + 1$.
- Les équipements de l'entreprise définissent le facteur capital.
- Ce capital peut être hétérogène en pratique. Pour simplifier on considère que l'entreprise utilise un type d'équipement.

- Le capital est l'unique facteur fixe de l'entreprise et on note $C(Y, K)$ la fonction de coût variable à court terme. Cette fonction vérifie les hypothèses suivantes:

$$\frac{\partial C}{\partial Y} > 0 \,,\, \frac{\partial C}{\partial K} < 0$$

- Un stock de capital plus important réduit le coût des facteurs variables nécessaires pour produire une certaine quantité de bien.
- Du fait des délais d'installation le capital en $t+1$ est la somme des investissements en $t$, du capital en $t$ moins la dépréciation.

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

où $\delta$ est le taux de dépréciation physique du capital.

- Le coût de l'investissement sera noté

$$\pi_t I_t + \Phi(I_t)$$

- Le premier terme correspond à la valeur des biens d'équipements achetés en quantité $t$ au prix unitaire $\pi_t$
- Le deuxième terme correspond aux coûts d'ajustement: coûts internes dus à l'installation de ouveaux équipements: formation de main d'oeuvre, manque à gagner dû aux perturbations éventuelles causées par l'installation des équipements nouveaux...
- $\Phi' > 0, \; \Phi'' > 0, \; \Phi(0) = 0$

- Pour financer ses dépenses, l'entreprise peut emprunter au taux d'intérêt $i$, les emprunts étant remboursés une période plus tard. Si l'entreprise emprunte $A_t$ en $t$, elle rembourse $(1+i)A_t$ en $t+1$.
- A chaque date $t$ l'entreprise distribue des dividendes à ses actionnaires.
- Le montant des dividendes distribuables $R_t$ est un solde entre ressources et emplois.

$$R_t = \underbrace{p_t Y_{t-1} + A_t}_{\textit{Ressources}} - \underbrace{C(Y_t, K_t) - \pi_t I_t - \Phi(I_t) - (1+i)A_{t-1}}_{\textit{Emplois}}$$

# 4.2. La valeur boursière de l'entrperise

- Il convient maintenant d'exprimer la fonction objectif de l'entreprise.
- Une hypothèse naturelle est de dire qu'elle se conforme à l'intérêt de ses actionnaires.
- Ces actionnaires sont également consommateurs. Les consommations qu'un individu peut réaliser sont définies par deux paramètres: le taux d'intérêt et le revenu (voir Section 3).
- Les propriétaires souhaitent donc a priori maximiser leurs dividendes: ils maximisent la somme actualisée des dividendes.

- S'ils peuvent réaliser des emprunts et des placements au taux $i$, on a comme somme actualisée des dividendes:

$$W = R_0 + \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2}$$

- $W$ est appelé la valeur boursière de l'entreprise.
- Elle indique ce que des tiers seraient prêt à payer pour l'acquérir, i.e. pour pouvoir bénéficier des versements de dividendes présents et futurs auxquels ses propriétaires ont droit.
- Si l'entreprise est effectivement côté en bourse $W$ représente la valeur aux prix de marché de l'ensemble de ses actions.

- Calculons cette valeur boursière en détail.
- Il n'y a que trois périodes. Ce que j'investis en $t = 0$ augmente mon capital en $t = 1$ et donc impacte ma production en $t = 2$.
- Je n'investirai pas en $t = 1$, ni en $t = 2$.
- Donc $I_1 = I_2 = 0$
- De plus $D = p_0 Y_{-1} - (1 + i)A_{-1}$ qui intervient dans la définition de $R_0$ est une donnée déterminée par les décisions passées.
- Comme l'horizon est fixée à $t = 2$, elle ne va pas engager de frais pour des productions ultérieures, donc $C(Y_2, K_2) = I_2 = \Phi(I_2) = A_2 = 0$

$$R_0 = A_0 + D - C(Y_0, K_0) - \pi_0 I_0 - \Phi(I_0)$$
$$R_1 = p_1 Y_0 + A_1 - C(Y_1, K_1) - (1+i)A_0$$
$$R_2 = p_2 Y_1 - (1+i)A_1$$

Cela implique:

$$W = A_0 + D - C(Y_0, K_0) - \pi_0 I_0 - \Phi(I_0)$$

$$+\frac{1}{1+i}[p_1 Y_0 + A_1 - C(Y_1, K_1) - (1+i)A_0]$$

$$+\frac{1}{(1+i)^2}[p_2 Y_1 - (1+i)A_1]$$

- En se rappelant que $K_1 = (1-\delta)K_0 + I_0$, on obtient:

$$W = \frac{p_1 Y_0}{1+i} - C(Y_0, K_0) - \pi_0 I_0 - \Phi(I_0) + D$$

$$+ \frac{1}{(1+i)}[\frac{p_2 Y_1}{1+i} - C(Y_1, (1-\delta)K_0 + I_0)]$$

- Cette expression de la valeur boursière met en évidence une propriété fondamentale: la neutralité de la politique de financement.
- Les variables $A_0$ et $A_1$ qui définissent la politique de financement de l'entreprise ne modifient pas la valeur actualisée des dividendes distribuables!

- Evidemment ce résultat dépend des hypothèses posées, et en particulier du fait que le taux d'emprunt est égal autaux d'actualisation des actionnaires.
- Les conséquences sont importantes:
- Pour la détermination de ses décisions de production et d'investissement, l'entreprise n'a pas à se soucier des préférences de ses actionnaires concernant l'echelonnement intertemporel de leurs consommations.

# 4.3. L'investissement optimal

- L'entreprise a trois choses à déterminer si l'on regarde la valeur boursière: $I_0$, $Y_0$, $Y_1$
- $\frac{\partial W}{\partial Y_0} = \frac{p_1}{1+i} - \frac{\partial C(Y_0,K_0)}{\partial Y_0} = 0$
- $\frac{\partial W}{\partial Y_1} = \frac{1}{(1+i)}[\frac{p_2}{1+i} - \frac{\partial C(Y_1,K_1)}{\partial Y_1}] = 0$
- $\frac{\partial W}{\partial I_0} = -\pi_0 - \Phi'(I_0) - \frac{1}{(1+i)}\frac{\partial C(Y_1,K_1)}{\partial K_1} = 0$
- Que représentent les deux premières conditions? Et la troisième?

- Les deux premières conditions disent que la recette marginale est égale au coût marginal. La seul différence avec la formulation e L1 et L2 c'est le prix futur actualisé. Ceci est dû au fait que le produit est vendu à la période suivante ici.
- La troisième condition caractérise l'investissement optimal

$$\pi_0 + \Phi'(I_0) = -\frac{1}{(1+i)}\frac{\partial C(Y_1, K_1)}{\partial K_1}$$

- Le terme de gauche c'est le supplément de dépense causé par l'acquisition d'une unité de capital.
- Le terme de droite représente la valeur actuelle des profits supplémentaires (cf la réduction des coûts variables)