Choix Intertemporels et dans l'Incertain

4: Dominance stochastique

Fabian Gouret

https://sites.google.com/site/fabgouret/

October 22, 2012

Table of contents

1. Introduction

- En univers certain, dire que la richesse w est plus grande que w' ne pose aucun problème.
- En univers incertain, c'est plus compliqué...
- Quelle est la plus grande des trois richesses suivantes:
- $W = (\{w; 1\})$; $W' = (\{w - x; 0,5\}; \{w + x; 0,5\})$; et $W'' = (\{w - 2x; 0,6\}; \{w + 3x; 0,4\})$
- Ou, dit autrement, si un agent à une richesse qui passe de W' àW'' est-il plus riche?

1. Introduction

- Il n' y a pas de réponse objective à cette question.
- Cependant il se peut que tous les agents qui préfèrent une grande richesse à une petite préfèrent une richesse W à W'
- On ne dit pas que W est plus grande que W'; On dit que W domine W' pour ces agents.

2. Notion de dominance

- Exemple: Soit $\{A, B, C\}$ un ensemble de vacances possibles pour un couple (Monsieur et Madame) (A désigne des vacances à la montagne; B des vacances à la plage; C des vacances à la campagne)
- Chaque membre du couple peut avoir son propre ordre de préférences sur cet ensemble.
  1. Ordre de préférences de Monsieur: $A \succ B \succ C$
  2. Ordre de préférences de Madame: $A \succ C \succ B$
- Par définition, on dit que A domine B et C pour ce couple. Cette information suffit pour savoir que ce couple choisira A.
- L'intérêt de la notion de dominance est de dispenser de connaître la fonction d'utilité des membres du couple (si elle existe).

2.2 Dominance stochastique et univers incertain

- En univers incertain, si les préférences sont représentables par des fonctions d'utilité espérée, on précise que la dominance est stochastique.

3. La dominance stochastique d'ordre 1

- La richesse W domine stochastiquement la richesse W' à l'ordre 1 si tous lesagents dont les préférences sont représentables par une fonction d'utilité espérée et respectent l'hypothèse de non-satiété préfèrent W à W'.
- N.B. : l'hypothèse de non satiété peut être définie de manière stricte, $u' > 0$, ou de manière large , $u' \geq 0$.

3.1 Théorèmes

Théorème 1

Pour que la richesse finale W domine stochastiquement la richesse W' à l'ordre 1, il est nécessaire mais non suffisant, que l'espérance de E soit supérieure à celle de W':

$$\mathbb{E}(W) > \mathbb{E}(W')$$

Explications/Intuitions: i) C'est nécessaire car les agents neutres au risque préfèrent la richesse finale dont l'espérance est la plus élevée. ii) Ce n'est pas suffisant car un agent qui a de l'aversion pour le risque peut préférer une richesse W' à une richesse W dont l'espérance est plus élevée.

2.3.1 Théorèmes

Théorème 2
La richesse finale W, de fonction de répartition $F(t)$, domine stochastiquement à l'ordre 1 la richesse finale W', de fonction de répartition $G(t)$, si et seulement si:

$$F(t) \leq G(t) \forall t$$

Explications/Intuitions: Comparons les deux richesses:
$W = (\{1; 0,1\}; \{2; 0,4\}\{3; 0,5\});$
$W' = (\{1; 0,2\}; \{2; 0,5\}); \{3; 0,3\})$

Intuition (suite)

- $Prob(W \geq 3) = 0,5$ et $Prob(W' \geq 3) = 0,3$ (De ce point de vue, W est préférable à W')
- $Prob(W \geq 2) = 0,9$ et $Prob(W' \geq 2) = 0,8$ (De ce point de vue, W est aussi préférable à W')
- $Prob(W \geq 1) = 1$ et $Prob(W' \geq 1) = 1$ (De ce point de vue, W est aussi préférable à W')
- Au total, W apparaît préférable à W' parce que pour toute valeur t, on a $Prob(W \geq t) \geq Prob(W' \geq t)$ (avec une valeur de t au moins pour laquelle l'inégalité est stricte).
- Si F est la fonction de répartition de W, et G celle de W', on a :

$$1 - F(t) \geq 1 - G(t)$$

$$F(t) \leq G(t)$$

Dominance et bien-être

- Attention: Ne confondez pas dangerosité et risque!
- Exemple: Si le nombre de tués par accident de la route au cours d'un week-end obéit à la loi de probabilité suivante:

$$X = (\{50; 0,7\}; \{100; 0,2\}\{200; 0,1\})$$

- Cette route devient plus dangereuse le week-end si cette distribution X est remplacée par la distribution Y qui la domine stochastiquement à l'ordre 1:

$$Y = (\{50; 0,2\}; \{100; 0,7\}\{200; 0,1\})$$

- Ne confondez pas désirabilité et dominance! Les nombres peuvent être des quantités non désirées (coûts, tués).
- De même dans le langage courant on dira qu'il est plus risqué de prendre la route si la loi de probabilité du nombre de tués est Y que si elle est X.

Dominance et bien-être (suite)

- Mais il s'agit d'une augmentation de la dangerosité et non d'une augmentation du risque au sens de Markowitz car $\mathbb{V}(X) = 2125 \geq \mathbb{V}(Y) = 1500$

- Vous venez de voir qu'on ne sait pas dire si une richesse aléatoire est plus grande ou plus petite qu'une autre. Mais si elle est unanimement préférée à une autre (pour tout ceux qui préfèrent uen grande richesse), on dit qu'elle la domine stochastiquement à l'ordre 1.
- De même on ne sait pas dire si une richesse aléatoire est plus risquée qu'une autre. Mais si une richesse W est unanimement préférée à une richesse W' par tous les riscophobes, on dit que W domine W' stochastiquement à l'ordre 2.

- Par définition, si une richesse W domine stochastiquement la richesse W' à l'ordre 1, elle la domine aussi à l'ordre 2. (car les riscophobes auxquels nous nous intéressons ont des préférences respectant l'hypothèsede non satiété.)
- Il n'est pas suffisant que W soit préférée à W' par tous les riscophobes pour affirmer que W' est plus risquée. En effet, le caractère plus risqué de W pourrait être compensé par une espérance plus grande!

- La richesse W de la fonction de répartition $F(t)$ domine stochastiquement à l'ordre 2 la richesse W' de fonction de répartition $G(t)$ si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{s} F(t)dt \leq \int_{-\infty}^{s} G(t)dt \ \forall s$$

(avec un ensemble de valeurs s de probabilité non nulle pour lequel l'inégalité est stricte.)