Choix Intertemporels et dans l'Incertain

2: Espérance d'utilité

Fabian Gouret

https://sites.google.com/site/fabgouret/

25 Septembre

Table of contents

1. Introduction

- Dans le chapitre précédent, nous avons vu
  - le paradoxe de Saint-Petersbourg
  - et d'autres paradoxes
- qui nous ont fait douter du fait que les gens en général maximisent l'espérance de gain.
  - On peut rajouter que les gens semblent en général avoir de l'aversion pour le risque (risquophobe): ils préfèrent $\mathbb{E}[x_1 = 10; \pi_1 = 1] = 10$ à $\mathbb{E}[\{x_1 = 12; \pi_1 = 0.5\}; \{x_2 = 8; \pi_2 = 0.5\}] = 10$
- On a proposé d'utiliser une fonction d'utilité de Markowitz pour résoudre ce problème.

- Dans ce chapitre nous généralisons.
- Les différentes attitudes vis à vis du risque sont modellisées en considérant d'abord une fonction d'utilité définie sur les conséquences:
$$u(x)$$
- Et nous considérons l'espérance d'utilité de la loterie:
$$\mathbb{E}U[\{x_1;\pi_1\};...\{x_n;\pi_n\}] = \sum_{i=1}^{n} \pi_i u(x_i)$$
- On appelle fonction d'utilité espérée les fonctions d'utilité dont la valeur est l'espérance non pas de la richesse finale, mais de l'utilité de la richesse finale.

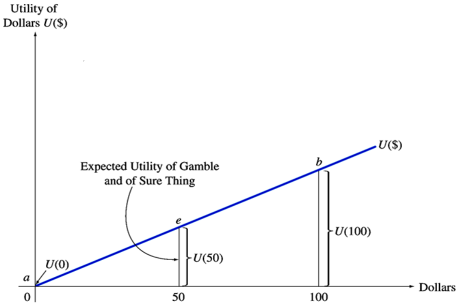
- La courbure de la fonction d'utilité est cruciale comme nous le verrons:
- si $u(x)$ est une fonction concave et croissante, l'agent est risquophobe ou averse au risque (*risk averse*).
- si $u(x)$ est une fonction convexe et croissante, l'agent est risquophile ou aime le risque (*risk lover*).
- si $u(x)$ est une fonction linéaire, l'agent est neutre au risque (*risk neutral*).

- Supposons un individu neutre au risque; sa fonction d'utilité est linéaire.
- $u(x)$ est donnée par $u(x) = x$.
- Il doit choisir entre deux loteries: $(\{9; 1\})$ et $(\{81, \frac{1}{9}\}; \{0, \frac{8}{9}\})$
- Il obtient dans le cas de la loterie certaine $\mathbb{E}U[\{x = 9; \pi = 1\}] = 1 \times 9 = 9$
- Il obtient dans le cas de la loterie incertaine $\mathbb{E}U[\{81; 1/9\}; \{0; 8/9\}] = (1/9) \times 81 = 9$
- Il est indifférent.

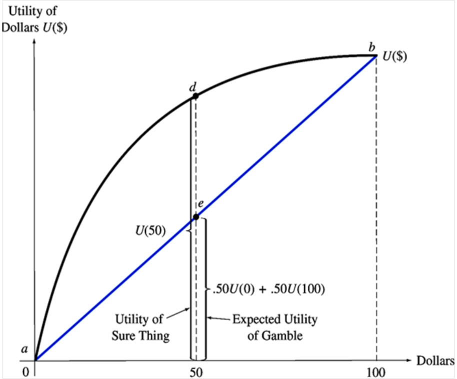
- Supposons maintenant un individu risk averse; sa fonction d'utilité est donc concave.
- $u(x)$ est donnée par $u(x) = x^{0,5}$.
- Il doit choisir entre les deux mêmes loteries: $(\{9; 1\})$ et $(\{81, \frac{1}{9}\}; \{0, \frac{8}{9}\})$
- Il obtient dans le cas de la loterie certaine $\mathbb{E}U[\{x = 9; \pi = 1\}] = 1 \times \sqrt{9} = 3$
- Il obtient dans le cas de la loterie incertaine $\mathbb{E}U[\{81; 1/9\}; \{0; 8/9\}] = (1/9) \times \sqrt{81} = 1$
- Il choisit donc la loterie certaine (dans cet exemple évidemment... dans un autre exemple...)

- Supposons maintenant un individu risk lover; sa fonction d'utilité est donc convexe.
- $u(x)$ est donnée par $u(x) = x^2$.
- Il doit choisir entre les deux mêmes loteries que l'agent neutre au risque: $(\{9; 1\})$ et $(\{81, \frac{1}{9}\}; \{0, \frac{8}{9}\})$
- Il obtient dans le cas de la loterie certaine $\mathbb{E}U[\{x = 9; \pi = 1\}] = 1 \times 9^2 = 81$
- Il obtient dans le cas de la loterie incertaine $\mathbb{E}U[\{81; 1/9\}; \{0; 8/9\}] = (1/9) \times 81^2 = 729$
- Il choisit donc la loterie incertaine (dans cet exemple évidemment... dans un autre exemple...).

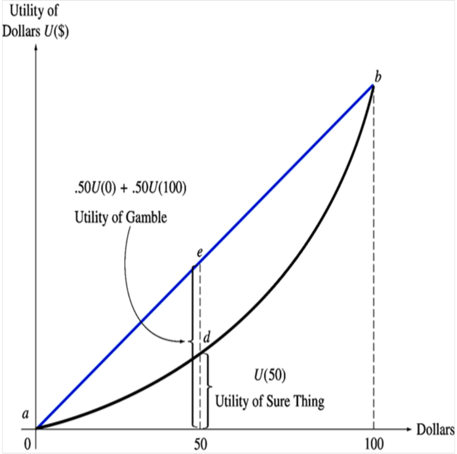
- Considérons un agent qui doit choisir entre une loterie certaine G_1 qui rapporte \$50 ($\{50, 1\}$), et une loterie incertaine G_2 donnée par $(\{100; 0, 50\}; \{0; 0, 50\})$
- On étudie graphiquement les trois situations: neutre au risque, averse au risque et risquophile.



- Si cet agent est neutre envers le risque, il choisira entre deux loteries uniquement sur la base de leur espérance de gain monétaire. La loterie certaine G_1 est évidemment moins risquée que G_2, mais si un agent neutre au risque doit choisir entre les loteries G_1 et G_2, il "oubliera" le fait que G_2 soit plus risquée.
- Ici l'utilité espérée de la loterie G_2 est identique à l'utilité certaine d'avoir \$50 avec la loterie G_1.



- Si cet agent est averse au risque...
- Son espérance d'utilité s'il choisit la loterie risquée est donnée par le point *e*. L'utilité obtenue avec un loterie certaine/un gain certain est au point *d*.


Utility of
Dollars U($)
b
.50U(0) + .50U(100)
Utility of Gamble
e
d
U(50)
Utility of Sure Thing
a
0
50
100
Dollars

Rappel: Inégalité de Jensen

Si $f(x)$ est une fonction concave, alors:

$$\mathbb{E}(f(x)) < f(\mathbb{E}(x))$$

- Nous avons vu dans le chapitre précédent le paradoxe de Saint-Pétersbourg énnoncé par Bernoulli.
- Pour résoudre le paradoxe, et soulignant le fait que les gens n'étaient pas neutre au risque mais plutôt averse au risque, Bernoulli avait proposé de travailler avec l'espérance d'utilité (qu'il appelait l'espérance morale).
- Il avait proposé la fonction suivante:

$$u(x) = \ln(x)$$

- Pourquoi?

Bernoulli: "L'utilité résultant de tout petit accroissement de la richesse sera inversement proportionnel à la quantité de biens antérieurement possédés"

- Autrement dit, pour tout accroissement faible de la richesse Δx, l'accroissement de l'utilité est donnée par:

$$\Delta u(x) = \frac{\Delta x}{x}$$

- $\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \Rightarrow u(x) = \ln(x)$
- On dit desfois que $u(x) = \ln(x)$ est une fonction d'utilité bernoullienne.

- Un agent neutre au risque est prêt à payer l'infini dans le jeu proposé par Bernoulli. Pas très réaliste selon Bernoulli.
- Si l'agent considère l'espérance d'utilité (espérance morale selon Bernoulli):

$$\mathbb{E}(u(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \ln(2^{i})$$

$$\mathbb{E}(u(x)) = \ln 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2^{i}}\right) = 2\ln(2)$$

- L'espérance d'utilité ne donne pas l'infini contrairement à l'espérance de gain.

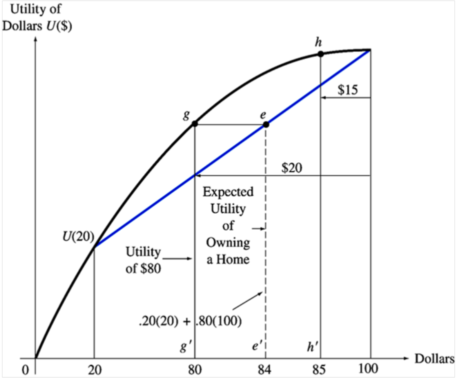
- Bernoulli signale également que dans une correspondance privée, le mathématicien Gabriel Cramer (1704-1752) proposa:

$$u(x) = \sqrt{x}$$

Objectif

- L'hypothèse d'utilité espérée peut être utilisée pour résoudre des problèmes concrets dans le domaine de la finance/assurance.
- C'est par exemple utile pour calculer une prime de risque.
- C'est quoi la prime de risque?
- Cette section y répond. Nous expliquerons également ce qu'est l'équivalent certain.

- Un agent (averse au risque) possède une maison d'une valeur de \$100000.
- Elle peut brûler avec une probabilité de 0,20. Dans ce cas l'agent ne possèdera plus qu'un terrain d'une valeur de \$20000.
- Nous avons donc une loterie $(\{20; 0,20\}; \{100; 0,80\})$



- L'utilité espérée de cette loterie $(\{20; 0,20\}; \{100; 0,80\})$ est donnée par la hauteur $e'e$.
- $g'g$ donne le même montant d'utilité mais de manière certaine.

- \$80 est l'équivalent certain: c'est la richesse certaine procurant la même utilité que la loterie.
- \$$84 - 80 = 4$ est la prime de risque.

Définition (Equivalent certain)

L'équivalent certain $\overline{x}$ est la valeur certaine procurant la même utilité que la loterie:

$$u(\overline{x}) = \mathbb{E}U[\{x_1; \pi_1\}; ...\{x_n; \pi_n\}]$$

C'est donc également le montant *maximal* qu'un agent est disposé à payer pour participer à la loterie.

Définition (Prime de risque)

La prime de risque π est la différence entre le gain espérée de la loterie et l'équivalent certain:

$$\pi = \mathbb{E}[\{x_1; \pi_1\}; ...\{x_n; \pi_n\}] - \overline{x}$$

Si j'ai le choix entre une loterie certaine où je gagne $\overline{x}$ et une loterie incertaine, π est la différence minimale entre le gain espérée de la loterie incertaine et celui de la loterie certaine pour que j'accepte la loterie incertaine. Par exemple, si je suis averse au risque, c'est le montant qu'il faut me promettre pour compenser le risque de la loterie incertaine.

- Pour comprendre... Supposons le jeu suivant.
- Option 1: Il y a 2 portes. Derrière l'une d'entre elles, il y a \$1000; derrière l'autre, \$0.
- Option 2: Vous pouvez choisir de n'ouvrir aucune porte et dans ce cas, on vous donne \$500.
- Les deux options ont la même valeur espérée (\$500), la pime de risque offerte pour choisir l'option 1 est \$0.
- Si vous êtes averse au risque, vous choisissez l'option 2.
- Pour vous incitez à choisir l'option 1, je mets \$1600 derrière la bonne porte.
- La valeur espérée de l'option 1 passe à \$800
- Ceux qui ont une prime de risque de \$300 ou moins choisissent l'option 1.

Remarque sémantique sur le terme prime

L'expression "prime de risque" n'a pas le même sens que "prime d'assurance". La prime d'assurance désigne la somme versée par l'assuré à son assureur. La prime de risque fait référence à une récompense ou supplément. Considérez un risquophobe possédant une richesse certaine ω auquel on propose d'ajouter gratuitement une partie aléatoire X d'espérance nulle. S'il est risquophobe, il refuse cette proposition. Considérons qu'on lui rajoute un supplément certain a tel qu'il accepte X. Quelle est la plus petite valeur de a?

$$u(\omega) = \mathbb{E}(u(\omega + X + a))$$

La prime de risque π qu'il attache à la richesse $\omega + X + a$ est donnée par:

$$u(\mathbb{E}(\omega + X + a) - \pi) = \mathbb{E}(u(\omega + X + a))$$

Remarque sémantique sur le terme prime (suite et fin)

On remarque donc que

$$u(\omega) = u(\mathbb{E}(\omega + X + a) - \pi)$$

Comme $\mathbb{E}(X) = 0$, on a:

$$u(\omega) = u(\omega + a - \pi)$$

Dans ce cas, $a = \pi$. La prime de risque se présente bien comme le supplément qu'il faut ajouter à X pour que le risquophobe accepte le risque. Cette manière de présenter les choses explique le recours au mot "prime".

- Notez qu'un agent neutre au risque à un équivalent certain égal au gain espéré:
$$u(\overline{x}) = \mathbb{E}U[\{x_1; \pi_1\}; ...\{x_n; \pi_n\}]$$
$$\overline{x} = x_1\pi_1 + ...x_n\pi_n$$
- Notez qu'un agent ayant de l'aversion au risque à un équivalent certain inférieur au gain espéré:
$$\overline{x} < x_1\pi_1 + ...x_n\pi_n$$
- Notez qu'un agent ayant de l'amour pour le risque à un équivalent certain supérieur au gain espéré:
$$\overline{x} > x_1\pi_1 + ...x_n\pi_n$$

- Notez qu'un agent neutre au risque à une prime de risque égale à 0.
- Notez qu'un agent ayant de l'aversion à une prime de risque positive.
- Notez qu'un agent ayant de l'amour pour le risque à une prime de risque négative.

- Supposons maintenant un individu avec $u(x) = x^{0,5}$.
- $(\{81, \frac{1}{9}\}; \{0, \frac{8}{9}\})$
- $\mathbb{E}(U) = (1/9)\sqrt{81} = 1$
- Donc $u(\overline{x}) = 1$
- On sait que l'équivalent certain est égal à 1 car $\sqrt{1} = 1$.
- La prime de risque est de 8.

- Nous avons vu que: quand les individus sont confrontés à des risques, ils évaluent les gains en terme d'utilité et choisissent la loterie qui fournit l'utilité espérée la plus élevée.
- Nous avons noté que lorsque les individus essayent d'évaluer un risque, ils se comportent comme s'ils affectaient des niveaux d'utilités à des gains potentiels.
- Pour être plus précis, disons que les individus se comportent comme s'ils avaient des fonctions d'utilités cardinales.

- Dans votre cours de Micro en L1 (Théorie du consommateur en univers certain), vous avez considéré des utilités ordinales: les valeurs de l'utilité assignées aux objets n'ont pas d'importance. Tout ce qui importait était de savoir quel objet aura l'utilité la plus élevée.
- Exemple. Supposez que nous sommes en présence d'une orange, une pomme, une Heineken. Il nous est demandé d'indiquer l'ordre de notre préférence. Notre fonction d'utilité ordinale affecte à la Heineken une valeur d'utilité de 100, à l'orange une valeur de 50, à la pomme 70. Si on doit choisir, on choisira la Heineken car elle nous apporte plus d'utilité.
- Si notre fonction d'utilité ordinale affecte une valeur d'utilité de 5 à la Heineken, 2 à l'orange et 4 à la pomme, le résultat est identique: je choisirai la Heineken.
- En ce sens les valeurs d'utilité affectées aux objets par une fonction d'utilité ordinale sont sans intérêt tant que l'ordre de préférence est inchangé.

- En situation risquée, nous avons besoin d'un concept plus robuste que l'utilité ordinale.
- On a besoin de ce que les économistes appellent une fonction d'utilité cardinale.
- Exemple: Rappelez vous les deux fonctions d'utilités ordinales pour la Heineken, la pomme et l'orange.
- On suppose que l'on doit choisir entre la certitude d'avoir une pomme, et la probabilité équiprobable d'avoir une Heineken ou une orange.
- Si on utilise l'échelle de valeurs de notre première fonction d'utilité ordinale, l'utilité de l'évènement certain est 70 et l'utilité espérée du jeu est est $0,5 \times 100 + 0,5 \times 50 = 75$. On doit donc choisir le jeu qui apporte une utilité espérée supérieure à celle de l'évènement certain.

- Si on utilise l'echelle de valeurs de notre seconde fonction d'utilité ordinale, l'utilité de l'évènement certain est 4; l'utilité espérée du jeu est $0,5 \times 5 + 0,5 \times 2 = 3,5$
- On prend donc la décision opposée! On choisit l'évènement certain!
- L'utilité ordinale n'est pas un concept robuste pour la prise de décision en situation d'incertitude.

- Dans la micro de L1, une fonction d'utilité n'est définie qu'à une fonction croissante près. Une transformation monotone et croissante ne change pas l'ordre des préférences.
- Pas pour l'espérance d'utilité!

- La courbure de la fonction d'utilité est très importante pour le choix parmis des loteries.
- On ne peut pas accepter des transformations monotones et croissantes qui changent la courbure de u.
- La seule transformation qui ne change pas la courbure c'est une transformation affine croissante:

$$a \times u(w) + b$$