Choix Intertemporels et dans l'Incertain

1: Incertain, Loterie, Espérance Mathématique et Analyse Moyenne-Variance

Fabian Gouret

https://sites.google.com/site/fabgouret/

September 13, 2015

Table of contents

1. Introduction

- Microéconomie en L1 et L2 se présente en univers certain.
- Dit autrement, tout est parfaitement prévisible.
  - les agents observent toujours la valeur exacte des quantités sur lesquelles ils prennent leur décision (e.g., les entreprises produisent une quantité d'un bien dont elles connaissent le prix de vente).
  - Les conséquences de leurs décisions sont certaines (e.g., elles savent le profit qu'elles obtiendront avec certitude).
- Pourtant,
  - nous sommes souvent confrontés à des situations risquées ou incertaines: il est possible que je perde mon emploi demain, ma maison peut être détruite par un incendie ou par un tremblement de terre, je peux acheter des actifs risqués...
  - Cela peut affecter nos comportements.

- Il est donc clair que l'on doit prendre en compte le caractère aléatoire de certains évènements.
- Particulièrement important en finance, en particulier dans le domaine de l'assurance et des choix de portefeuilles.
- Si un assureur et le propriétaire d'une maison savent avec certitude que la maison va brûler ou pas dans l'année, il n'y aurait pas de contrat d'assurance car:
    - si le propriétaire sait (avec certitude) que sa maison ne va pas brûler, pourquoi prendre une assurance incendie?
    - un assureur n'a pas intérêt à assurer la maison s'il sait qu'elle va brûler.
- Si je connais le futur parfaitement, j'utilise mon cours de micro de L1-L2 (hypothèse d'information parfaite)... Je n'ai pas besoin de la microéconomie de l'incertain (ce cours).
- En situation d'incertitude l'assurance résout un problème pour la société: ma maison peut brûler (en raison de la foudre); un autre agent peut être disposé à parier avec vous qu'elle ne brûlera pas; il peut vous proposer de lui payer 1000 euros, et promettre en retour que si elle brûle, il vous donnera 200000 euros pour la reconstruire.

Sémantiques

Risque

Nous parlerons de "risque" lorsque une décision peut engendrer plusieurs résultats avec une probabilité connue des résultats.

Incertitude (Keynes, 1921, Knight, 1921)

On parle en général d'incertitude quand les résultats associés à une décision n'ont pas de probabilités connues.

Remarque 1

Cependant, le terme "incertitude" est largement employé comme synonyme de" risque" (e.g., le titre de ce cours). On parle souvent d'ambiguité (Ellsberg, 1961) ou d'ignorance (Arrow et Hurwicz, 1972) quand les probabilités ne sont pas précisément connues.

Remarque 2

Dans ce cours: on parlera essentiellement de risque. Si je parle d'incertitude, je me réfère à une situation risquée... Sauf si le contraire est explicitement mentionné.

Manuels et support

Cayatte, Jean-Louis (2004). Introduction à l'économie de l'incertitude. De Boeck.

Cayatte, Jean-Louis (2009). Microéconomie de l'incertitude. De Boeck.

Eeckhoudt, Louis; Gollier, Christian; Schlesinger, Harris (2005). Economic and financial decisions under risk. Princeton University Press.

Il peut également être utile de jeter un coup d'oeil dans vos manuels de micro de base de L1 et L2. Il y a parfois des chapitres dédiés à la prise de décision en présence de risque; En particulier:

Picard, Pierre (2007). Eléments de microéconomie. 1. Théorie et Applications. Montchretien, 7ème édition. (le chapitre 4, tout particulièrement la partie 4D p.109-120 traite de la prise de décision en présence de risque)

Schotter, Andrew (1996). Microéconomie: une approche contemporaine. Vuibert. (le chapitre 14. Ouvrage disponible à la bibliothèque des cerclades.)

- Un problème de prise de décision en situation d'incertitude se caractérise d'abord par 3 premiers éléments:
  - un ensemble d'actions possibles A. Un élément $a \in A$ est une action que l'agent que l'on étudie peut exécuter.
  - un ensemble d'états de la nature E. Un élément $e \in E$ est un état de la nature qui peut se réaliser.
  - une fonction c qui associe à chaque couple de $A \times E$ une conséquence/un résultat (parmi toutes les conséquences/résultats possibles X).
- En croisant les différentes informations, on obtient donc les gains potentiels de l'agent dans les différentes cas. Il y a une incertitude concernant le résultat de chaque action.

Matrice de décision (cas général fini: *n* états, *m* actions)

$$
\begin{array}{lcccccc}
\hline
 & e_1 & e_2 & \cdots & e_i & \cdots & e_n \\
 & & & & & & \\
a_1 & c(a_1, e_1) & c(a_1, e_2) & \cdots & c(a_1, e_i) & \cdots & c(a_1, e_n) \\
a_2 & c(a_2, e_1) & c(a_2, e_2) & \cdots & c(a_2, e_i) & \cdots & c(a_2, e_n) \\
\vdots & & & & & & \\
a_j & c(a_j, e_1) & c(a_j, e_2) & \cdots & c(a_j, e_i) & \cdots & c(a_j, e_n) \\
\vdots & & & & & & \\
a_m & c(a_m, e_1) & c(a_m, e_2) & \cdots & c(a_m, e_i) & \cdots & c(a_m, e_n) \\
\hline
\end{array}
$$

Matrice de décision: Exemple

On considère 2 évènements:

- e_1: "Tremblement de terre".
- e_2: " Pas de tremblement de terre".

	Tremblement de terre	Pas de tremblement
s'assurer	$X - z$	$X - z$
ne pas s'assurer	0	X

Remarque 4

Dans notre exemple, remarquez qu'il n'y a plus d'incertitude concernant le résultat de l'action "s'assurer".

- Dans ce cours, on fait l'hypothèse que les agents connaissent les probabilités d'occurence des résultats, i.e. objectives.
- Pas si illogique: on parle de risque-client dans le domaine de l'assurance, risque défaut dans la banque...
- Dans l'exemple précédent, il peut avoir une probabilité de 10 pour cent qu'il y ait un tremblement de terre.
- Si je ne m'assure pas, j'ai 10 pour cent de chance d'obtenir 0, 90 pour cent d'obtenir X.
- J'ai donc une loterie associée à l'alternative "ne pas s'assurer" qui est:

$$(\{0, 0.10\}; \{X, 0.90\})$$

- Autre exemple: Un portefeuille donné d'actifs peut donner différent rendements: r_1, r_2..., r_n (Pourquoi? la bourse peut aller plus ou moins bien...).

$$(\{r_1, \pi_1\}; \{r_2, \pi_2\}; \ldots \{r_i, \pi_i\}; \ldots, \{r_n, \pi_n\})$$

- Une loterie (d'une alternative) peut donc se résumer de la façon suivante:

$$(\{x_1, \pi_1\}; \{x_2, \pi_2\}; \ldots \{x_i, \pi_i\}; \ldots, \{x_n, \pi_n\})$$

  , avec

$$0 < \pi_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$$

- les gains x_i sont risqués car ils n'arrivent pas de manière certaine.
- L'espérance de gain (ou la valeur espérée de la loterie) est:

$$\mathbb{E}[(\{x_1, \pi_1\}; \ldots \{x_i, \pi_i\}; \ldots, \{x_n, \pi_n\})] = \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i$$

Quel critère utiliser pour choisir entre les différentes loteries?

- La première réaction d'un agent peut être de choisir l'investissement qui fournit la valeur monétaire espérée maximale (de manière générale l'espérance de gain).
- Mais ce critère a de nombreuses limites. Nous allons voir 3 arguments expliquant ses limites: le philanthrope sadique, le paradoxe de Saint-Pétersbourg, et un exemple concernant le domaine de l'assurance nous montrant que l'existence d'un marché de l'assurance est problématique si nous considérons un tel critère.

1er argument: le philanthrope sadique

- Soit un patient qui quitte l'hôpital avec une mauvaise nouvelle: il lui reste deux jours à vivre à moins qu'il puisse payer 100 000 euros pour une opération du coeur.
- Il n'a pas d'argent.
- Il se rend chez un "philanthrope sadique" qui lui offre un choix entre deux jeux:
  - le jeu 1: il a 50 pour cent de chance de gagner 50 000 euros et 50 pour cent de chance de gagner 75 000 euros.
  - le jeu 2: il a 99 pour cent de chance de ne rien recevoir et 1 pour cent de chance de gagner 100 000 euros.
- Si notre patient maximise son espérance de gain monétaire il choisit le jeu 1. Pourquoi?

$\mathbb{E}(\text{gain monétaire}|\text{jeu 1}) = 0,5 \times 50000 + 0,5 \times 75000 = 62500 >$
$\mathbb{E}(\text{gain monétaire}|\text{jeu 2}) = 0.01 \times 100000 = 1000$

- Problème: Il y a cependant un problème logique à utiliser comme critère une maximisation de l'espérance de gain monétaire: si le patient joue le jeu 1, il mourra de manière certaine! Alors que s'il joue le jeu 2, il a 1 pour cent de chance de survivre.
- Les individus sont intéressés non pas par l'argent mais par ce que l'argent va apporter comme satisfaction.
- Il y a une "utilité" de la vie et une "utilité" de la mort.

2ème argument: le paradoxe de Saint-Pétersbourg

- Paradoxe énnoncé par Daniel Bernoulli[1]

Remarque 5 (préliminaire)

Si un agent retient comme critère de choix la maximisation de l'espérance de gain monétaire, alors il devrait être indifférent entre deux jeux ayant des espérances de gain monétaires identiques. Si un tel agent doit choisir entre un jeu lui offrant 500 euros de manière certaine et un jeu lui offrant 50 pour cent de recevoir 1000 euros et 50 pour cent de ne rien recevoir, i.e. 0 euros, remarquez qu'il est disposé à payer jusqu'à 500 euros pour participer au jeu 2.

[1] Bernoulli, Daniel (1738). Specimen theoriae novae de mensura sortis. *Transactions de l'Académie de Saint-Petersbourg*, 5.

- L'expérimentation de Bernoulli: On jette une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à ce qu'elle tombe sur face. Il y a une chance sur 2 que le côté face apparaisse pour un jet donné. Si le côté face apparaît au premier jet, le joueur gagne 2 euros; s'il apparaît au second jet $2^2 = 4$ euros...; s'il apparaît au Nème jet: 2^N
- On peut écrire la loterie correspondant au gain du joueur:

$$(\left\{2, \frac{1}{2}\right\}; \left\{4, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}; \ldots \left\{2^N, \left(\frac{1}{2}\right)^N\right\}; \ldots)$$

- L'espérance de gain monétaire est donc:

$$\mathbb{E}(G) = \underbrace{2 \times \frac{1}{2}}_{1} + \underbrace{4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{1} + \underbrace{2^N \left(\frac{1}{2}\right)^N}_{1} + \cdots = +\infty$$

Conclusion de l'expérience de Bernoulli

Si une personne retient comme critère de choix la maximisation de l'espérance de gain monétaire, elle est disposée à payer une somme d'un montant infini pour prendre part au jeu (Cf. Remarque 5). Cependant qui semble prêt à payer même un gros montant pour participer à ce jeu? Personne. Cet exemple montre donc que les individus ne maximisent pas l'espérance de gain monétaire.

3ème argument: l'existence du marché de l'assurance

- L'existence même d'un marché de l'assurance est problématique si nous considérons un tel critère.
- Exemple: Un agent possède une richesse ω. Il possède également une voiture d'une valeur v. Il l'assure pour un montant $z \leq v$. S'il l'assure pour z il paye une prime d'un montant βz avec $\beta \in [0, 1]$. La probabilité du sinistre est p. Notre objectif sera de trouver le montant z auquel l'assuré est prêt à assurer sa voiture.
- Question 1: A quelle loterie fait face l'assuré qui assure sa voiture du montant z?

$$G = \left\{ \begin{array}{cc} \omega + z - \beta z & \omega + v - \beta z \\ p & (1-p) \end{array} \right.$$

- Question 2: Quelle est l'espérance de gain?

$$\mathbb{E}(G) = p(\omega + z - \beta z) + (1-p)(\omega + v - \beta z)$$
$$\mathbb{E}(G) = \omega + (1-p)v + (p-\beta)z$$

- Si un assuré a comme critère de choix la maximisation de l'espérance de gain, il va choisir:

$$z^* = \arg\max_{z \in [0,v]} \mathbb{E}(G)$$

- La dérivée de l'espérance de gain par rapport à z est

$$\frac{\partial \mathbb{E}(G)}{\partial z} = p - \beta$$

- Question 3: Quel est le montant z^* choisi?

Il y a 3 cas.

Cas 1 Si $p < \beta$, alors $\frac{\partial \mathbb{E}(G)}{\partial z} < 0$: l'individu décide de ne pas s'assurer donc $z^* = 0$. Pourquoi? Car c'est le cas où l'espérance de remboursement pz est inférieure à la prime versée par l'assuré βz.

Cas 2 Si $p > \beta$, alors $\frac{\partial \mathbb{E}(G)}{\partial z} > 0$: l'individu décide de s'assurer totalement donc $z^* = v$.

Cas 3 Si $p = \beta$, alors il y a indétermination.

Il y a plusieurs éléments contre-intuitifs dans ces résultats.

Remarque 6

Les cas 1 et 2 nous donnent des solutions avec une assurance complète ou rien. Le cas 3 est une situation d'intédermination. Nous n'avons néanmoins pas considérer le comportement de l'assureur. Dans le Cas 1, l'espérance de remboursement est inférieure à la prime versée par l'assuré. C'est donc rentable pour l'assureur. Mais l'assuré ne veut pas s'assurer. Dans le cas 2, c'est le contraire. Dans le cas 3, l'espérance de remboursement est égale à la prime versée. Comme l'assurance a un coût de mise en oeuvre (frais de dossier, salaire de l'assureur...) on aura $pz > \beta z - c$, donc l'opération n'est jamais rentable pour l'assureur.

Remarque 7

Vous pourriez développer le programme de l'assureur et retrouver ce qui a été dit dans la Remarque 6. La loterie de l'assureur serait:

$$G = \left\{ \begin{array}{cc} \beta z - z - c & \beta z - c \\ p & (1-p) \end{array} \right.$$

Conclusion: l'espérance de gains ne semble pas un bon critère car:

- ce n'est pas le gain qui importe mais l'utilité du gain (rappelez vous le philanthrope sadique).
- Il ne semble pas bien décrire le comportement des individus. Ceux-ci semblent avoir une aversion au risque (terme qui sera mieux défini par la suite): l'expérience de Bernoulli montre qu'un agent devrait être prêt à investir "énormément" s'il avait comme critère de choix la maximisation du gain, mais personne ne semble prêt à investir beaucoup d'argent.
- Si tel était le cas, il n'y aurait pas de marché de l'assurance.

- Qu'est ce que maximisent les individus alors?
- Nous verrons dans le prochain chapitre que les agents maximisent l'espérance d'utilité. On parle d'utilité espérée de Von Neumann et Morgenstern[2]
- Avant de parler du critère d'espérance d'utilité, nous allons introduire ce qui est desfois appelé une utilité de Markowitz.[3]
- Remarquez que nous avons suggéré que le problème de la maximisation de l'espérance de gain était qu'il manquait une mesure du risque dans la fonction objective de l'agent. Les individus peuvent être réticents à prendre trop de risque. Markowitz introduit directement une mesure de risque dans la fonction d'utilité.

---

[2] Von Neumann, John et Morgenstern, Oskar (1947). *Theory of Games and Economic Behavior*. Seconde Edition, Princeton University Press.

[3] Du nom d'Harry Markowitz, économiste célèbre qui a obtenu le prix nobel d'économie en 1990 pour ses travaux pionniers en économie financière.

- La mesure retenue par Markowitz est la variance.
- Rappel:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]$$

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - \mathbb{E}(X)\right]^2 p_i \text{ si distribution discrète}$$

- Et la fonction d'utilité de Markowitz est:

$$U(w) = g(\mathbb{E}(w), \mathbb{V}(w))$$

  - On considère que l'utilité croît avec l'espérance de richesse: $\frac{\partial g}{\partial \mathbb{E}(w)} > 0$
  - On considère aussi que l'utilité décroit avec la variance de la richesse: $\frac{\partial g}{\partial \mathbb{V}(w)} < 0$
  - Quand l'utilité décroît avec la variance de la richesse, on dit que l'agent est averse au risque ou risquophobe.

- On utilise en général (et on utilisera) la forme suivante:

$$U(w) = \mathbb{E}(w) - \gamma \mathbb{V}(w) \text{ avec } \gamma > 0$$

- $-\gamma$ mesure l'aversion pour le risque.

Remarque 8

Remarquez que si $\gamma < 0$, notre agent à de l'amour pour le risque, i.e. il est risquophile. Si $\gamma > 0$ il est risquophobe. Par contre si $\gamma = 0$, il est neutre au risque (cela revient à l'agent qui maximise l'espérance de gain).

- Analyse graphique des courbes d'iso-utilité dans le plan $(\mathbb{V}(w), \mathbb{E}(w))$

Rappelez vous le problème d'assurance vu précédemment:

$$G = \begin{cases} \omega + z - \beta z & \omega + v - \beta z \\ p & (1-p) \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(G) = \omega + (1-p)v + (p-\beta)z$$

$$\mathbb{V}(G) = p(\omega + z - \beta z - \mathbb{E}(G))^2 + (1-p)(\omega + v - \beta z - \mathbb{E}(G))^2 = p(1-p)(z-v)^2$$

Si on travaille avec une fonction d'utilité quadratique, on aura:

$$U(G) = \mathbb{E}(G) - \gamma \mathbb{V}(G)$$

$$U(G) = \omega + (1-p)v + (p-\beta)z - \gamma p(1-p)(z-v)^2$$

- Utilité d'1 euro de couverture en plus:

$$\frac{\partial U(G)}{\partial z} = p - \beta - \gamma 2p(1-p)(z-v)$$

- Solution en coin si:

$$\frac{\partial^2 U(G)}{\partial z^2} = -\gamma 2p(1-p) > 0$$

- Donc si $\gamma > 0$ (i.e. agent risquophobe), on n'a pas de solution en coin mais une solution intérieure.

- Si tel est le cas, il va choisir:

$$z^* = v - \frac{\beta - p}{2\gamma p(1-p)}$$

- L'agent risquophobe demande une assurance partielle ($z^* < v$).
- Notez que si $p \to \beta$: assurance complète.

Remarque 9

Remarquez que si $\gamma < 0$, notre agent à de l'amour pour le risque, i.e. il est risquophile.

$$\frac{\partial^2 u(G)}{\partial z^2} = -\gamma 2p(1-p) > 0$$

, donc $z = 0$ ou $z = v$ (car fonction convexe donc solution en coin). On peut calculer l'utilité avec $z = 0$ et $z = v$, et on verra que l'utilité maximale est quand $z = 0$. La demande pour le risquophile est donc de 0. Pour le neutre au risque l'analyse est similaire à celui qui maximise l'espérance de gain.

Remarque 10

On a juste analysé la demande d'assurance. On aurait pu regarder l'existence d'un marché. Celui-ci ne peut exister que si l'assureur peut faire un profit, soit si $\beta > p$.