Chapitre 0. Dvppt limités d'une fct en un pt m_0

Préliminaires

Défini° : Soient f & g définies & non identiquemt nulles au voisinage de m_0 (m_0 pouvant ê ∞). On dit que f est négligeable devant g au voisinage de m_0 ssi & seulemt si :

$$\lim_{x \to m_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$ & on notera $f << g$ au voisinage de m_0

Exemple : 1) Au voisinage de $+\infty$ $\ln x << x << e^x$ — demontrer que c'est negligeable

il faut faire le rapport des deux — car $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (cr comparée) → cela signifie qu'elle est negligeable

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ & $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$ d'après

2) Au voisinage de 0^+ ($=]0;+\infty[$).

$$x^2 << x << \sqrt{x}$$

car $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$ & $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} = 0$

Nota° de Landau : Lorsque $f << g$ au voisinage de m_0, on notera : $f(x) = o\,g(x)$ (on le lit petit o de $g(x)$). En particulier, si $\lim_{x \to m_0} f(x) = 0$ alors on écrira $f(x) = o(1)$. En effet $\lim_{x \to m_0} \frac{f(x)}{1} = 0$

($f(x)$ est negligeable devant 1 $\Rightarrow f(x) << 1$, ici $g(x)$ vaut 1)

I. Developpem^t limités au voisinage de 0

1. Defini°

Soit f une fct définie au voisinage de 0. Alors on dit que f admet un developpem^t limité d'ordre n (noté DL_n) au voisinage de 0 si & seulem^t s'il $\exists$..

a) Un polynôme P_n de degrés n.
$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

b) Une fonc° $\mathcal{E}$ defini sur le voisinage telle que $\lim\limits_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0$.

& $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x_n + x^n \times \mathcal{E}(x)$

Le polynome $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ est appelé la partie régulière ou encore la partie principale du DL_n

Le terme $x^n \mathcal{E}(x)$ est appelé le reste.

En utilisant la nota° de Landau, puisque $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^n \mathcal{E}(x)}{x^n} = \lim\limits_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0$

On a $x^n \mathcal{E}(x) = o(x^n)$, & par suite $f(x)$ s'écrit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$

Exemple : Montrons que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$ au voisinage de 0

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

↳ SG de raison x & de 1er terme 1

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Montrons que $\frac{x^{n+1}}{1-x} = O(x^n)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{n+1}}{(1-x)x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{1-x} = O(x^n)$$

2 Proposi°s

- Propos° 1 : (Unicité du DL)

Si f admet un DL_n, alors le DL est unique

- Propos° 2 : (Troncature)

Si f admet un DL_n, elle admet un DL_p où $p < n$ qui est la troncature du DL_n de à l'ordre p & on a :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p + O(x^p)$$

Exemple : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^2)$ (DL_2)

- Propos° 3 :

Si f admet un DL_n et si f est paire (respectivem^t impaire) alors la partie régulière du DL_n est paire (respectivem^t impaire)

- Propos° 4 :

Si f est dérivable en 0, alors f admet un DL_1 &

$f(x) = f(0) + x f'(0) + O(x)$

La partie régulière : $P(x) = f(0) + f'(0)x$.

Remarque : Une fct donnée n'admet pas nécessairement de DL

3. Calcul des DL

• Formule de Taylor Young

Soit f une fct définie sur un voisinage de 0 & n fois dérivable en 0. Alors on a $\forall x$ appartenant à ce voisinage

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

• DL usuels au voisinage de 0

* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
* $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$
* $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
* $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

• Règles combinatoires

Soient f & g deux fcts admettant les DL_n suivants :

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$

$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + o(x^n)$ → Les deux $o(x^n)$ ne sont pas égaux

Propos° 5 (Σ de DL)

La fct somme $f+g$ admet le DL_n suivant :

$$(f+g)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \dots + (a_n+b_n)x^n + o(x^n)$$

Exercice : Calculons le DL_3 de $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$

Posons $f(x) = \sqrt{1+x}$ & $g(x) = \sqrt{1-x}$

Calculons le DL de chaque fct à l'aide de la formule de Taylor :

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

- $f(0) = 1$. - $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$

- $f''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-2} \Rightarrow f''(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)$

- $f'''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-3} \Rightarrow f'''(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)$

Donc $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^2}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{x^3}{3!}\right) + O(x^3)$

Comme $g(x) = f(-x)$ on a $g(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^2}{2!} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{x^3}{3!} + O(x^3)$

$\Rightarrow f(x) + g(x) = 2 - \frac{1}{4}x^2 + O(x^3)$: L'ordre du DL

- **Propos° 6** (Produit de DL)

La fct produit $f \times g$ admet un DL en effectuant le produit des deux parties principales & en ne conservant de la partie principale que les termes de degrés $\leq n$

$(f \times g)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \dots + a_nb_0)x^n + O(x^n)$

Exercice : Déterminons le DL_3 de $\frac{e^x}{1-x}$

On sait que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^3)$

& $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^3)$

$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{6}\right)(1 + x + x^2 + x^3) = (1 + x + x^2 + x^3) + x + x^2 + x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^3)$

$= 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + O(x^3)$

d'où $\frac{e^x}{1-x} = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + O(x^3)$

Exemple : Determinons le DL_3 de $\ln(1+x)$

• Propos° 7 : (Compos° de DL)

Si $g(0) = 0$ la fct composée $f \circ g$ admet un DL_n dont la partie régulière est constituée des termes de degré au plus égal à n de la composée des parties régulières càd en développant l'expression :

$$a_0 + a_1(b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n) + \dots + a_n(b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n)^n$$

Et en regroupant les termes de m̂ degrés & ne conservant que les termes de degré $\leq n$

Exemple : Determinons le DL3 de $\sqrt[3]{x^2+x+1}$

$f(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{1/3}$ & $g(x) = x + x^2$

On a bien $g(0) = 0$ dc on peut appliquer la propos° 7 :

On pose $f(u) = (1+u)^{1/3}$ avec $u = x + x^2$

Calculons le DL3 de $(1+u)^{1/3}$

$$(1+u)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + \frac{5}{81}u^3 + o(x^3)$$

Calcul intermediaires :

$u = x + x^2$

$u^2 = (x+x^2)^2 = x^2 + 2x^3 + o(x^3)$ normalem' c'est $x^2 + 2x^3 + x^4 + \dots$ mais on conserve que les termes de degrés ≤ 3

$u^3 = (x+x^2)^3 = x^3 + o(x^3)$

Par suite, $\sqrt[3]{x^2+x+1} = 1 + \frac{1}{3}(x+x^2) - \frac{1}{9}(x^2+2x^3) + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3)$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}x^2 - \frac{13}{81}x^3 + o(x^3)$$

• Propos° 8 : Soit f une fct derivable au voisinage de 0. Si la fct dérivée f' admet le DL_n $f'(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ alors f admet le DL_{n+1}

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \dots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Exemple : Determinons le DL_3 de $\ln(1+x)$

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$$

Calculons le DL_2 de $\frac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

D'où $\ln(1+x) = \ln(1) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

II Developpem^t limités en $m \neq 0$

1. Developpem^{t}s limités en $x_0 \neq 0$

a Defini°:

Soit f une fct definie sur voisinage d'un reel $x_0 \neq 0$. On dit qu'elle admet un developpem^t limité d'ordre n au voisinage de x_0 si & seulem^t s'ils existent :

a. un polynome P d'ordre n

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

b. une fct $\varepsilon(x-x_0)$ definie sur ce voisinage telle que $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$ & $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 \dots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0)$ ou encore en utilisant la nota° de Landau on a $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$

Formule de Taylor young.

Soit f une fct definie sur un voisinage de x_0 & n fois derivable en x_0. Alors $\forall x \in$ à ce voisinage

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$$

Pour la détermina° de a DL_n on peut s'appuyer soit sur un DL_n au voisinage de 0 en posant $h = x - x_0$, soit sur la formule de Taylor.

__AN__: Calculons un DL_2 de $f(x) = e^{x-1}$ au voisinage de 1.

__1ère méthode :__ Posons $h = x - 1$

$h = x - 1 \iff x = 1 + h.$

Il vient $f(1+x) = e^{h}$

Calculons le DL_2 de e^{h} au voisinage de 0.

$$e^{h} = 1 + h + \frac{h^2}{2} + O(h^2) \iff e^{x-1} = 1 + (x+1) + \frac{(x-1)^2}{2} + O((x-1)^2)$$

__2ème méthode :__ Formule de Taylor Young.

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + O((x-1)^2)$$

$f(1) = e^{1-1} = e^{0} = 1$

$f'(x) = (e^{x-1})' = e^{x-1}$

$f'(1) = e^{0} = 1$

$f''(x) = (e^{x-1})' = e^{x-1}$ $\quad f''(1) = e^{0} = 1$

d'où $e^{x-1} = 1 + (x-1) + \dfrac{(x-1)^2}{2!} + O((x-1)^2)$

2. Développem^{t}s limités au voisinage $+\infty$ (respectivem^{t} $-\infty$)

Soit f une fct définie au voisinage de $+\infty$ (resp $-\infty$)
On appelle dévpp^{t} limité d'ordre n au voisinage de $+\infty$ (respectivem^{t} $-\infty$), l'écriture :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + O\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Pour la détermin° de a DL_n on peut s'appuyer sur un DL_n au voisinage de 0 en posant $h = \frac{1}{x}$ & en remplaçant x par $\frac{1}{h}$ & on calcule de DL_n de $\tilde{f}(h) = f\left(\frac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0

AN : Calculons DL_3 de $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$

posons $h = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{h}$

$$\tilde{f}(h) = \ln\left(\frac{1 + 1/h}{\frac{1}{h}}\right) = \ln(1+h)$$

Calculons le DL_3 de $\ln(1+h)$ au voisinage de 0

$$\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)$$

Ce qui donne :

pas compris

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$(\ln(1+h))' = \frac{1}{1+h} \qquad (\ln(1+h))'' = ((1+h)^{-1})' = -\frac{1}{(1+h)^2}$$

Variables aléatoires & lois de probabilité

1 Définitions

Défini° 1 : On appelle variable aléatoire (on notera v.a) définie sur $(\Omega ; a ; P)$

une applica° $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui transporte la mesure de probabilité P sur l'espace de départ

Défini° 2 : on appelle variable aléatoire définie sur $(\Omega ; a, P)$ une applica° $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad X^{-1}(]-\infty ; x[) \in a$

Si $X(\Omega)$ est fini ou infini denombrable X est dite discrete.

Si $X(\Omega)$ est infini continu X est dite continue.

2. Loi de probabilité d'une Vble aléatoire :

Défini° : La loi de probabilité d'une Vble aléatoire est définie par les 2 elem ts suivants :

- l'ensble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la Vble
- la distribu° de probabilité sur $X(\Omega)$

La distribu° de probabilité de X peut etre définie soit par l'ensble des cples (x_i, P_i) où $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$ & $P_i = P(X = x_i)$ lorsque X est une Vble aléatoire discrete par la densité de probabilité f.

Lorsque X est une Vble aléatoire continue soit par la fct de reparti° ds les 2 cas :

Fct de reparti° :

On appelle fct de reparti° (f.r) de la v.a X l'applica° $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$ telle que :

$$F_X(x) = P(X < x)$$

Propriete de la f.r.

F_X est une fct monotone non decroissante & ⊕.

F_X est continue à gauche

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(X) = 1$ $\lim\limits_{x \to 0} F(X) = 0$

$$P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Densité de proba

Une Vble aléatoire X est dite absolumt continue s'il $\exists$ une fct intégrable f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

où F_X est la f.r de X & f la densité de probabilité de X & telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_X' = f$ & $f(x) \geq 0$ & $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Par suite $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

3. Caractéristiques d'une Vble aléatoire.

3.1 Esperance mathématiques

Définis : 1 Soit X une Vble aléatoire discrète. L'espérance mathématique (e, m) de X est le nbre s'il $\exists$

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i\, P(X = x_i) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i\, P_i$$

2 Soit X une Vble aléatoire continue ayant une densité de f. On appelle espérance mathématique (e.m) de X le nbre $E(X)$ s'il $\exists$, défini par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx.$$

Propriétés : L'e.m est un nbre & non une Vble aléatoire

L'e.m d'une Vble certaine est la valeur prise par la Vble.

L'e.m est un opérateur linéaire à savoir :

$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad \forall (X, Y)$

$E(\lambda X) = \lambda E(X) \quad \forall X \;\&\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\forall$ fct φ nulle on a :

a) $E(\varphi(X)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \varphi(x_i) P(X = x_i)$ si X est discrète

b) $E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx$ si X est continue

3.2 Variance

Défini : On appelle variance de la v.ble aléatoire X le nbre $V(X)$ (ou $Var(X)$) s'il $\exists$ défini par $V(X) = E[(X - E(X))^2]$

On appelle écart type de X le nbre $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

Propriétés : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$ (homogène de degré 2)

$V(X + \lambda) = V(X) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 cov(X, Y)$

où $cov(X, Y) = E(XY) - E(X) E(Y)$

Remarque : $V(X) = cov(X, X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Si X & Y sont non corrélés ou indépdtes alors $cov(X, Y) = 0$ & par suite $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

3.3 Moments d'ordre k

On appelle momt non centré d'ordre k lorsqu'il $\exists$ le nbre $m_k = E(X^k)$ k étant ~~non~~ un nbre $\oplus$

Si X est une v.a discrète alors $E(X^k) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^k P(X = x_i)$

$= \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^k P_i$

Si X est une va continue alors $E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dt$

$E(X)$ est dc le moment non centré d'ordre n.

On appelle moment non centré d'ordre k lorsqu'il $\exists$ le nbre $\mu_k = E[(X - E(X))^k]$

Pour une var. a discrète $\mu_k = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^k P_i$

Pour une var. a continue $\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^k f(x)\, dx$

La variance $V(X)$ est dc le mom^t centré d'ordre 2

Mom^t factoriel d'ordre k

Pour une v.a discrète & à valeurs entières on peut definir lorsqu'il $\exists$ le nbre $\Pi_k = E[X(X-1)(X-2)\ldots(X-k+1)]$

Π_k est appelé moment factoriel d'ordre k.

En particulier $E(X)$ est le mom^t factoriel d'ordre un

4 Fonc° generatrice d'une va.

a. Soit X une v.a discrète à valeurs entières on appelle fct generatrice associé à X, lorsqu'elle $\exists$ la fct g_X d'une var. réelle

$g_X(t) = E(t^X)$ où $t \in]0;1]$ & on a

$g_X(t) = E(t^X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} t^{x_i} P(X = x_i)$

Propriétés 1) $g_X(1) = 1$

2) Si g_X est k fois dérivable en 1 on a :

$$g_X(1) = \eta_k = E\left[X(X-1)\dots(X-k+1)\right]$$

En effet :

$$g_X'(t) = \left(\sum t^{x_i} P(X=x_i)\right)' = \sum x_i t^{x-1} P(X=x_i)$$

$$g_X''(t) = \sum x_i (x-1) t^{x-2} \quad P(X=x_i)$$

$$g_X^k(t) = \sum x_i (x_i-1)(x_i-2)\dots(x_i-k+1) t^{x_i-k} \times P_i$$

$$g_X^k(1) = \sum x_i (x_i-1)(x_i-2) - (x_i-k+1) P_i$$

En particulier : a) $E(X) = g_X'(1)$

b) $V(X) = g_X(1) + g(1)(1-g_X(1)')$

En effet $V(X) = EX^2 - (E(X))^2$

Comme $\eta_2 = EX(X-1) = EX^2 - EX$

$$\Leftrightarrow EX^2 = \eta_2 + EX$$

$$= g_X'(1) + g_X'(1)$$

d'où $V(X) = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2$

$$= g_X''(1) + g_X'(1)(1 - g_X'(1))$$

3) Si X & Y sont 2 v. aléatoires indépdtes

alors $g_{X+Y}(t) = g_X(t) \times g_Y(t)$

4) Si $X_1; X_2 \dots, X_n$ sont v. a indépdtes

de m loi $\sum X_i = (g_{X_1}(t))^n$

5) Si $Y = aX+b$, alors $g_Y(t) = t^b g_X(t^a)$

Preuve : Par définiᵒ $g_Y(t) = E(t^Y)$. or $E(t^Y) = E(t^{aX+b})$
$= E(t^{aX} \times t^b)$

t^b n'étant pas une variable aléatoire on obtient
$E(t^Y) = t^b E(t^{aX})$ comme $E(t^{aX}) = E[(t^a)^X] = g_X(t^a)$
d'où $g_Y(t) = E(t^Y) = t^b g_X(t^a)^X$

6) Si les $\gamma_k = E[X(X-1)\dots(X-k+1)]$ $\exists$ alors $g_X(t)$ admet un développement limité d'ordre k au voisinage de 1 défini par

$$g_X(t) = 1 + \frac{E(X)}{1!}(t-1) + \frac{E[X(X-1)]}{2!}(t-1)^2 + \dots + \frac{E[X(X-1)\dots(X-k+1)]}{k!}(t-1)^k + O(t-1)^k.$$

$g_X(t)$ est donc une fct génératrice des momᵉⁿᵗˢ factoriels

b. On appelle fct génératrice des moments d'une v.a. aléatoire X (discrète ou continue) lorsqu'elle $\exists$ la fct G_X définie par $G_X(t) = E(e^{tX})$

Si X est v.a. à discrète $G_X(t) = \sum P_i e^{tx_i}$

Si X est v.a. à continue admettant une densité
$G_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$

Propriétés : 1) Si les $E(X^k)$ $\exists$ alors $G_X(t)$ admet un DL d'ordre k au voisinage de 0, défini par $G_X(t) = 1 + \frac{E(X)}{1!}t + \frac{E(X^2)}{2!}t^2 + \dots + \frac{E(X^k)}{k!}t^k + O(t^k)$.

G_X est donc la fct génératrice des moments non centrés de X.

2) Si G_X est dérivable k fois en 0, on a
$G_X^{(k)}(0) = E(X^k)$. En particulier $G_X'(0) = EX$
$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = G_X''(0) - [G_X'(0)]^2$

3) Si X & Y sont 2 v.a indépdtes alors

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t).$$

Preuve : $G_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}]$ or, $e^{t(X+Y)} = e^{tX+tY} = e^{tX} \cdot e^{tY}$ donc $G_{X+Y}(t) = E(e^{tX} \cdot e^{tY})$.

Comme X & Y sont indépdtes, e^{tX} & e^{tY} sont égalem^t indépdtes. Par suite $E(e^{tX} \cdot e^{tY}) = E(e^{tX}) \cdot E(e^{tY}) = G_X(t) \times G_Y(t)$

4) On montre que si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n v.a indépdtes & de m̄ loi alors $G_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = (G_{X_i}(t))^n$

5) Si $Y = aX + b$ alors $G_Y(t) = e^{bt} \cdot G_X(at)$

5 Les caractéristiques des principales lois usuelles

1 Lois discrètes.

Loi de Bernoulli : $\mathcal{B}(p)$ ou $\mathcal{B}(1, p)$, X suit une loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in [0, 1]$) si & seulem^t si

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{0; 1\} \\ P(X = 1) = p \\ P(X = 0) = q = 1 - p \end{cases}$$

ou de façon équivalente

$$\begin{cases} \forall k \in X(\Omega) \\ P(X = k) = p^k \cdot q^{1-k} \end{cases}$$

Les caractéristiques :

$E(X) = p$

$V(X) = p(1-p) = pq$

Les fonctions generatrices :

a) $g_X(t) = E(t^X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} t^{x_i} P(X = x_i)$

$= t^0 P(X=0) + t^1 P(X=1)$

$= q + pt$

b) $G_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} e^{tx_i}$

$= e^{t \times 0} P(X=0) + e^t (PX=1)$

$= q + pe^t$

Retrouvons les 2 caracteristiques à partir de ces 2 fcts generatrices Pour (a) : $g_X(t) = q + pt$ donne $g_X'(t) = p$ donc $E(X) = g_X'(1) = p$

$V(X) = g_X''(1) + g_X'(1)(1 - g_X'(1))$

$g_X''(t) = (g_X'(t))' = (p)' = 0$

d'où $V(X) = p(1-p)$

Pour (b) : $G_X(t) = q + pe^t$

$E(X) = G_X'(0)$

or $G_X'(t) = pe^t \Rightarrow G_X'(0) = pe^0 = p$

d'où $E(X) = p$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = G_X''(0) - (G_X'(0))^2$

$G_X''(t) = pe^t \Rightarrow EX^2 = G_X''(0) = p$

$V(X) = p - p^2 = p(1-p)$.

Loi Binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.

Une v.a.r binomiale est la Σ de n v.a.r de Bernoulli identiques (de m paramètres p) & indépdtes.

Cette loi dépd dc de 2 paramètres : n & p

X suit une loi Binomiale de paramètres n & p

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1, \dots ; n\} \\ \forall k \in X(\Omega) \quad P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k} \end{cases}$$

Les caractéristques sont : $E(X) = np$

$V(X) = npq = np(1-p)$

En effet $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad X_i \leadsto \mathcal{B}(1;p)$.

d'où $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum^{n} E(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$

$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(x_i) = \sum_{i=1} pq = npq$

$X \leadsto \mathcal{B}(1;p)$

$V(X_i) = pq$

Les fonc°s génératrices :

a) $g_X(t) = (pt+q)^n$

b) $G_X(t) = (pe^t+q)^n$

Loi de poisson de paramètre λ. $(\lambda > 0)$ $\mathcal{O}(\lambda)$

X suit une loi de Poisson de paramètre λ :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad P(X=k) = \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \end{cases}$$

Les caracteristiques sont :

$E(X) = \lambda$

$V(X) = \lambda$.

Les fonc°s generatrices :

a) $g_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$

b) $G_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$

Preuve : Pour a) $g_X(t) = E(t^X)$

$$E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \lambda^k}{k!}}$$

$$= e^{-\lambda} \times e^{t\lambda} = e^{\lambda(t-1)}.$$

Pour b) $G_X(t) = [E(e^t)^X] = e^{\lambda(e^t-1)}$.

Retrouvons les 2 caracteristiques à partir de la fct generatrice $g_X(t)$.

On sait que $E(X) = g_X'(1)$.

$g_X(t) = e^{\lambda(t-1)} \Rightarrow g_X'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$.

d'où $g_X'(1) = \lambda e^{\lambda(1-1)} = \lambda e^0 = \lambda$

par suite $E(X) = \lambda$.

On sait que $V(X) = g_X''(1) + g_X'(1)(1 - g_X'(1))$.

$g_X'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$ $\quad g_X''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$

$\Rightarrow g_X''(1) = \lambda^2 e^{\lambda \times 0} = \lambda^2 e^0 = \lambda^2$

$V(X) = \lambda^2 + \lambda(1-\lambda) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Lois continues

Loi uniforme

$$X \leadsto U_{[a;b]} \iff \begin{cases} X(\Omega) = [a;b] \\ f(x) = \dfrac{1}{b-a} \quad \forall x \in]a,b[\\ f(x) = 0 \quad \forall x \notin]a,b[\end{cases}$$

Les caractéristiques sont $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

La fct génératrice des moments non centrés

$$G_X(t) = E\, e^{tX} = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)} \quad t \neq 0$$

Preuve : $G_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{b-a}\, dx$

$$= \int_a^b \frac{e^{tx}}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx}\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{t(b-a)} \left[e^{bt} - e^{at}\right] \quad t \neq 0$$

On ne peut pas utiliser $G'_X(t)$ & $G''_X(t)$ pour $E(X)$ & $V(X)$ car $G_X(t)$ n'est pas dérivable en 0.

Nous savons que e^{at} & e^{bt} admettent des développem^t limités d'ordre k au voisinage de 0

Calcul le DL2 de $\dfrac{e^{bt} - e^{at}}{t}$, e^{bt} & e^{at} admettent chacune un DL3 au voisinage de 0

$$e^{bt} = 1 + \frac{bt}{1!} + \frac{b^2t^2}{2!} + \frac{b^3t^3}{3!} + o(t^3).$$

$$e^{at} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + O(t^3).$$

d'où $e^{bt} - e^{at} = (b-a)t + \frac{(b^2-a^2)t^2}{2!} + \frac{(b^3-a^3)}{3!} + O(t^3)$

$$\Rightarrow \frac{e^{bt}-e^{at}}{t} = (b-a) + \frac{(b^2-a^2)}{2!}t + \frac{(b^3-a^3)}{3!}t^2 + O(t^2)$$

Il vient $G_X(t) = \frac{1}{t(b-a)}[e^{bt}-e^{at}] = 1 + \frac{(b+a)t}{2!} + \frac{(b^3-a^3)}{(b-a)3!}t^2 + O(t^2)$

or $G_X(t) = 1 + \frac{E(X)}{1}t + \frac{E(X^2)}{2!}t^2 + O(t^2)$.

$$\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{b-a} = b^2+ab+a^2$$

d'où $G_X(t) = 1 + \frac{(b+a)}{2}t + \frac{(b^2+ab+a^2)}{3!}t^2 + O(t)^2$

Par identifica° : $E(X) = \frac{b+a}{2}$ $E(X^2) = \frac{b^2+ab+a^2}{3!}$ $= \frac{b^2+ab+a^2}{3}$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4}$$

$$= \frac{4(b^2+ab+a^2) - 3(b+a)^2}{12}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Loi exponentielle :

On dit que VA X suit une loi exponentielle de paramètre θ ($\theta > 0$) si sa densité de probabilité est définie par $f(x) = \begin{cases} \theta e^{\theta x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Les caractéristiques sont : $E(X) = \frac{1}{\theta}$

$V(X) = \frac{1}{\theta^2}$

La fct generatrice $G_X(t) = E(e^{tx})$ par def

$E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\theta e^{-\theta x} dx = \theta \int_0^{+\infty} e^{tx} e^{-\theta x} dx$

Calculons $\int_0^{+\infty} e^{tx} e^{-\theta x} dx$ $= e^{tx} e^{-\theta x} = e^{-x(\theta - t)}$

d'où $\int_0^{+\infty} e^{tx} e^{-\theta x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(\theta - t)x} dx$

Cette intégrale n'∃ que si $\theta - t > 0$ càd $t < \theta$

Posons $u = (\theta - t) dx$ on a $dU = (\theta - t) dx$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{\theta - t} du$

Ce qui donne $\int_0^{+\infty} e^{-(\theta - t)x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{1}{\theta - t} du$

$= \frac{1}{\theta - t} \int_0^{+\infty} e^{-u} du$

$= \frac{1}{\theta - t}$

d'où $G_X(t) = \frac{\theta}{\theta - t}$

Determinons $E(X)$ & $V(X)$ à partir de $G_X(t)$

On sait que $E(X) = G_X'(0)$.

$(G_X(t))' = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)' = \frac{\theta}{(\theta - t)^2} \Rightarrow G_X'(0) = \frac{\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}$

$E(X) = \frac{1}{\theta}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = G_X''(0) - (G_X'(0))^2$

$G_X''(t) = (G_X'(t))' = \left(\frac{\theta}{(\theta - t)^2}\right)' = \frac{2\theta(\theta - t)}{(\theta - t)^4} = \frac{2\theta}{(\theta - t)^3}$

$$\Rightarrow G_X''(0) = \frac{2\theta}{\theta^3} = \frac{2}{\theta^2} \Rightarrow V(X) = \frac{2}{\theta^2} - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\theta^2}$$

Loi Gamma

Préliminaires mathématiques on note $\Gamma(P) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{P-1} dx$

(lire gamma P) $P > 0$

Propriété de $\Gamma(P)$:

- $\Gamma(P) = (P-1)\,\Gamma(P-1)$ relat° de récurrence permettant de calculer ΓP

Preuve. $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{P-1} dx =$ On pose $v' = e^{-x}$, $u = x^{P-1}$

$$= \left[-x^{P-1} e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \underbrace{(P-1) x^{P-2} e^{-x}}_{u'v} dx.$$

or $\left[x^{P-1} e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 0$

d'où $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{P-1} = (P-1) \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{P-2} dx.$

$$= (P-1) \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{(P-1)-1} dx$$

$$= (P-1)\,\Gamma(P-1).$$

- Si $P \in \mathbb{N}^*$ $\Gamma(P) = (P-1)!$

Preuve : $\Gamma(P) = (P-1)\,\Gamma(P-1)$

$$\Gamma(P-1) = (P-2)\,\Gamma(P-2)$$

$$\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1)$$

$$\Gamma(P) = (P-1)(P-2) - 1\,\Gamma(1).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^0 dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

d'où $\Gamma(p) = (p-1)(p-2) \dots \times 1$
$= (p-1)!$

- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (admettre).

Défini° : On appelle v.a.le aléatoire $\gamma(P)$ (gamma P) la v.a.le aléatoire X dont la densité de probabilité est défini par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(P)} e^{-x} x^{p-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

P étant un paramètre strictement $\oplus$

Remarque : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(P)} e^{-x} x^{p-1} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(P)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(P)} \times \Gamma(P).$$

$$= 1$$

Cas particulier : Si $P = 1$ la loi $\gamma(1)$ est la loi exponentielle. En effet on obtient

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x}\,dx \end{cases} \quad \text{car } \Gamma(1) = 1$$

Calculons $E(X^k)$: $E(X^k) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(p)} x^k e^{-x} x^{p-1} dx$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} x^{p-1} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p+k-1} dx$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p+k-1} dx = \Gamma(p+k)$

Par défini ; ce qui donne $E(X^k) = \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)}$

Par suite : $E(X) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)} = \frac{p\Gamma(p)}{\Gamma(p)} = p$

$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$

$\Gamma(p+1) = (p+1-1)\Gamma(p+1-1)$

$= p\Gamma(p)$

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(p)} = \frac{(p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)} = \frac{(p+1)\,p\,\Gamma(p)}{\Gamma(p)} = p(p+1)$$

& $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p(p+1) - p^2 = p$

Fct génératrice

$$G_X(t) = E(e^{tx}) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} e^{tx} e^{-x} x^{p-1} dx$$

$$= \frac{1}{(1-t)^p}$$

$$G_X'(t) = \left(\frac{1}{(1-t)^p}\right)' = \frac{p}{(1-t)^{p+1}} \Rightarrow G_X'(0) = p = E(X)$$

$$G_X''(t) = \left(\frac{p}{(1-t)^{p+1}}\right)' = \frac{p(p+1)}{(1-t)^{p+2}} \Rightarrow G_X''(0) = EX^2 = p(p+1)$$

$$V(X) = G_X''(0) - (G_X'(0))^2 = p$$

Loi normale ou de Laplace - Gauss

Préliminaire mathématique on admettra que
$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

a) Loi normale centrée réduite $N(0;1)$ on appelle var aléatoire normale ou gaussienne centrée réduite notée U.
La var aléatoire définie sur $\mathbb{R}$ par la densité de probabilité suivante : $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$ $\forall u \in \mathbb{R}$.

Justifions que f est bien une densité de probabilité

$f(u) > 0 \quad \forall u$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

$u \longrightarrow e^{-\frac{u^2}{2}}$ est une fct paire donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

il vient $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} = 1$

Les caractéristiques sont : $E(U) = 0$
$V(U) = 1$

Fct génératrice : $G_U(t) = E(e^{tU}) = e^{\frac{t^2}{2}}$

Preuve : $E(e^{tu}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Calculons $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2(U^2 - 2tU)} du$

Or $u^2 - 2tU = (U-t)^2 - t^2$

$\hookrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2(U^2-2tU)} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2(u-t)^2 + \frac{t^2}{2}} du$

il dépd pas de U car

$= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2(u-t)^2} du$

Calculons $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-t)^2} du$ à l'aide d'un chgt de Δble

Posons $v = u - t$

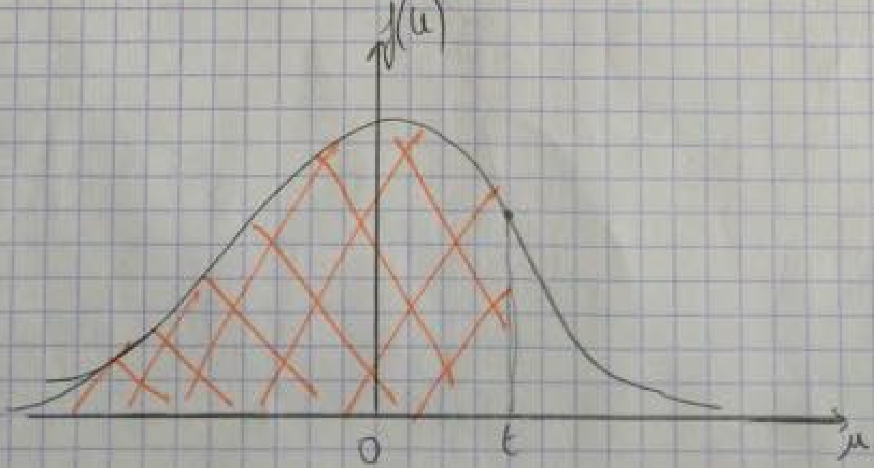
$dv = du$

d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2(u-t)^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2 v^2} dv = \sqrt{2\pi}$

Il vient $G_U(t) = E(e^{tu}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{t^2/2} \times \sqrt{2\pi} = e^{t^2/2}$

∀ calcul de probabilité attaché à un segment ou à un intervalle. On s'appuie sur les tables de $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple : Calculons $P(U < 1{,}98)$, $P(U > -2)$ & cherchons tel que $P(U \leq t) = 0{,}9200$

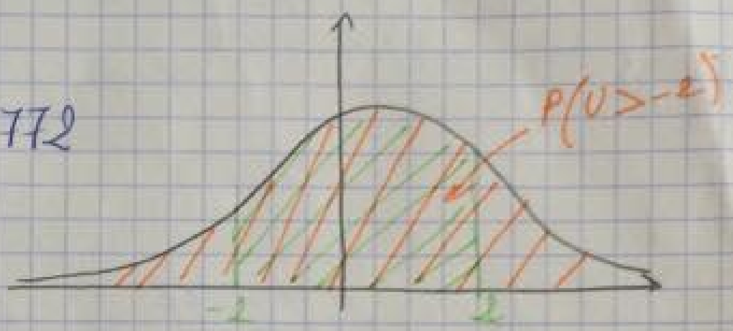


par exemple $P(U < 1,98) = 0,9761$ (je lit

$1,9 + 0,08$

à l'intersec° de la ligne 1,9 & la colonne 0,08)

$P(U > -2)$



$P(U > -2) = P(U < 2) = 0,9772$

Calcul de t avec

$P(U \leq t) = 0,9280$

on lit ds la table que $0,9279 < 0,9280 < 0,9292$

donc $1,46 < t < 1,47$

La méthode de l'interpola° linéaire donne :

$$\frac{t - 1,46}{1,47 - 1,46} = \frac{0,9280 - 0,9279}{0,9292 - 0,9279} = 0,2941$$

$$\Rightarrow t \simeq 1,46 + 0,0029 = 1,463$$

10/02 Les lois dérivées de la loi normale

a) La loi log-normale

Def: On dit qu'une v a X suit la loi log-normale de paramètres (m, σ) si la variable $\log X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$

c-a-d $\log X = m + \sigma u$ u étant la variable normale centrée réduite ou encore $X = e^{m+\sigma u}$ donc $X(\Omega) =]0, +\infty[$

Densité de probabilité de X

$$F(x) = P(X < x)$$
$$= P(e^{m+\sigma u} < x) = P(m + \sigma u < \log x)$$
$$= P(\sigma u < (\log x - m))$$
$$= P\left(u < \frac{\log x - m}{\sigma}\right) = F_u\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right)$$

On sait que $f(x) = F'(x)$

$$F'(x) = \left(F_u\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right)\right)' = f_u\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right) \times \left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right)'$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right)^2} \times \frac{1}{x\sigma}$$
$$= \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-1/2\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right)^2}$$ pour $x > 0$ et $f(x) = 0$ sinon

Les caractéristiques:

$$E(X) = E(e^{m+\sigma u}) = E(e^m e^{\sigma u}) = e^m E(e^{\sigma u}) = e^m G_u(\sigma)$$

On sait que $G_u(t) = e^{t^2/2}$

ici $t = \sigma$ donc $E(X) = e^m e^{\sigma^2/2} = e^{m + \sigma^2/2}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = E[(e^{m+\sigma u})^2] = E(e^{2m+2\sigma u})$

$= e^{2m} E(e^{2\sigma u}) = e^{2m} G_u(2\sigma)$

$= e^{2m} e^{(2\sigma)^2/2} = e^{2m} e^{2\sigma^2} = e^{2m+2\sigma^2}$

$V(X) = e^{2m+2\sigma^2} - (e^{m+\sigma^2/2})^2 = e^{2m+2\sigma^2} - e^{2m+\sigma^2} = e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$

b) Loi du khi-deux (χ^2) à un degré de liberté

Def. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi du khi-deux (à un degré de liberté) si $X = U^2$ où $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

$X(\Omega) = [0, +\infty[$

Déterminons la densité de probabilité $f(x)$ de X

$F(x) = P(X<x) = P(U^2<x)$

$= P(|U| < \sqrt{x})$

$= P(-\sqrt{x} < U < \sqrt{x})$

$= P(U<\sqrt{x}) - P(U<-\sqrt{x})$

$= F_U(\sqrt{x}) - F_u(-\sqrt{x})$

$f(x) = F'(x) = (F_u(\sqrt{x}))' - (F_u(-\sqrt{x}))'$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2} \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2} \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2} \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x/2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\underbrace{\sqrt{\pi}}_{\Gamma(1/2)}} e^{-x/2} x^{-1/2} = \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} e^{-x/2} x^{-1/2}$$

Les caractéristiques :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} e^{-x/2} x^{-1/2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} \int_0^{+\infty} e^{-x/2} x^{1/2} dx$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$v = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2v \Rightarrow x^{1/2} = 2^{1/2} v^{1/2}$$

si $v = x/2$ alors $dv = \frac{1}{2} dx \Leftrightarrow dx = 2\,dv$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} \int_0^{+\infty} e^{-v} 2^{1/2} 2\,dv = \frac{(1/2)^{1/2}\, 2^{1/2}\, 2}{\Gamma(1/2)} \int_0^{+\infty} e^{-v} v^{1/2} dv$$

$$= \frac{2}{\Gamma(1/2)} \int_0^{+\infty} e^{-v} v^{1/2} dv$$

On sait que : $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$

donc $\int_0^{+\infty} e^{-v} v^{1/2} dv = \Gamma(3/2)$

d'où $E(X) = \frac{2}{\Gamma(1/2)} \Gamma(3/2)$

On sait que $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$

donc $\Gamma(3/2) = (3/2 - 1) \cdot \Gamma(3/2 - 1) = 1/2\, \Gamma(1/2)$

par suite $E(x) = \frac{2}{\Gamma(1/2)} \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = 1$

$$E(X^2) = \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x/2} x^{-1/2} dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} \int_0^{+\infty} e^{-x/2} x^{3/2} dx$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$v = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2v \Rightarrow x^{3/2} = 2^{3/2} v^{3/2}$$

si $v = \frac{x}{2}$ alors $dv = \frac{1}{2} dx \Leftrightarrow dx = 2dv$

$$E(X^2) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} \int_0^{+\infty} e^{-v} 2^{3/2} v^{3/2} \, 2 \, dv$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} 2^{3/2} \, 2}{\Gamma(1/2)} \int_0^{+\infty} e^{-v} v^{3/2} \, dv$$

$$= \frac{2^2}{\Gamma(\frac{1}{2})} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-v} v^{3/2} \, dv}_{\Gamma(5/2)} = \frac{4\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/2)} = 2$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3 - 1 = 2$$

c) Loi de khi-deux à n degré de liberté

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes

Alors la variable aléatoire

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ suit une loi de khi-deux à n degrés de liberté et que l'on note χ_n^2

X est donc la somme de n χ_1^2 indépendantes

Les caractères sont : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = n$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i^2) = 2n$$

d) Loi de Fisher-Snédécor à m et n degrés de liberté

On appelle variable F de Fisher, la variable quotient de deux χ^2_1 indépendantes divisés par le nb de degré de liberté (ddl)

Soit $F(m,n) = \dfrac{\frac{\chi^2 m}{m}}{\frac{\chi^2 n}{n}}$ χ^2_m et χ^2_n étant indep

Les caractéristiques de F sont

$$E(F) = \frac{n}{n-2} \quad (n>2)$$

$$V(F) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-4)(n-2)^2} \quad (n>4)$$

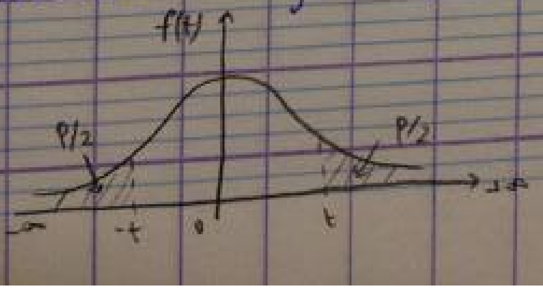
Loi de Student

Soient U et X 2 variables aléatoires indépendantes suivant respectivement $\mathcal{N}(0;1)$ et χ^2_n

Définition: On appelle loi de Student à n degrés de liberté la loi suivie par le rapport $T = \dfrac{U}{\sqrt{\frac{X}{n}}}$

Les caractéristiques sont: $E(T) = 0$ et $V(T) = \dfrac{n}{n-2}$ $(n>2)$

Cette loi est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

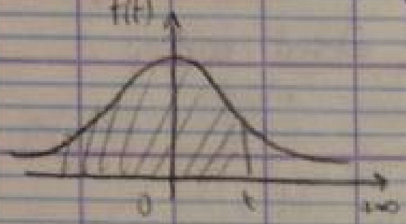


$P(|T|>t) = P$

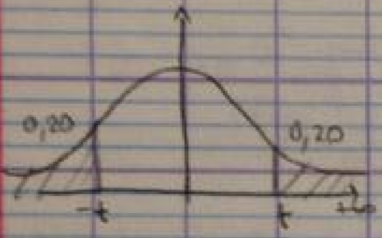
Exemple :

Soit T une variable de Student à 12 ddl (degrés de liberté)

Calculons t tel que $P(T<t) = 0,80$ et t' tel que $P(T<t') = 0,20$



$P(T>t) = 0,20 \Rightarrow P(|T|>t) = 0,40$



$T \hookrightarrow S_{\gamma}$ à 12 ddl

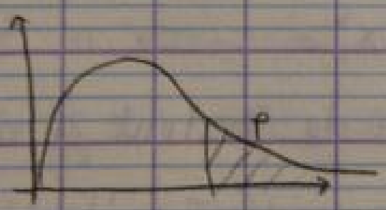
$\gamma = 12$ et $p = 0,40$

$\Rightarrow t = 0,873$

$P(T>0,873) = 0,20 \Leftrightarrow P(T<t') = 0,20 \Rightarrow t' = -0,873$

Soit Y une variable de Khi-deux à 10 ddl

Calculer t tel que $P(Y<t) = 0,975$



$P(Y>t) = p$

Si $P(Y<t) = 0,975$ on a $P(Y>t) = 1 - 0,975 = 0,025$

$\gamma = 10 = p = 0,025 \rightarrow t = 20,5$

Soit F une variable de Fisher à 10 et à 30 ddl.

Calculer :

a) t tel que $P(F<t) = 0,95$

b) z tel que $P(Z<z) = 0,05$ sachant que Z suit une loi de Fisher à 30 et à 10 ddl.

a) $F = \dfrac{\frac{X^2_{10}}{10}}{\frac{X^2_{30}}{30}}$ $P(F<t) = 1 - P(F>t) \Rightarrow P(F>t) = 1 - P(F<t)$

$= 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow t = 2,16$

b) $P(Z<z) = 0,05$ avec $Z \hookrightarrow F(30,10)$

$P(Z<z) = P\left(\frac{1}{Z} > \frac{1}{z}\right) = 0,05$

$Z = \dfrac{\frac{X^2_{30}}{30}}{\frac{X^2_{10}}{10}} \Rightarrow \dfrac{1}{Z} = \dfrac{\frac{X^2_{10}}{10}}{\frac{X^2_{30}}{30}} = F(10,30) \Rightarrow \dfrac{1}{z} = 2,16 \Rightarrow z \simeq 0,46$

Convergence statistique - Les limites et approximation

I Convergence statistique

1) Inégalité de Bienaymé - Tchebycheff

Soit X une va de fonction de densité f et g une fonction de X

Supposons que les valeurs de g soient positives ou nulles.

On suppose que pour tout réel k positif $E(g(X)^k)$ existe on a donc

$E(g(X)^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)^k f(x)\, dx$

Soit t, un réel positif. Décomposons la droite réelle en 2 sous ensembles

$$\underset{g(x) < t}{x \in E_1} \quad t \quad \underset{g(x) \geq t}{x \in E_2}$$

$E(g(X)^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)^k f(x)\, dx = \int_{E_1} g(x)^k f(x)\, dx + \int_{E_2} g(x)^k f(x)\, dx$

$\Rightarrow E(g(X)^k) \geq \int_{E_2} g(x)^k f(x)\, dx$

or si $X \in E_2$ alors $g(X) > t$

d'où $\int_{E_2} g(x)^k f(x)\, dx \geq \int_{E_2} t^k f(x)\, dx$

or $\int_{E_2} t^k f(x)\, dx = t^k \int_{E_2} f(x)\, dx = t^k P(X \in E_2) = t^k P(g(X) > t)$

d'où $E(g(X)^k) \geq t^k P(g(X) > t)$

$\Leftrightarrow P(g(X) > t) \leq \frac{E(g(X)^k)}{t^k}$