

**Théorie des Jeux**  
**Contrôle Continu 22 Octobre 2015, 16.30-18.00**

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.  
Pour l'ensemble des questions, **justifiez précisément** vos réponses.

**Exercice 1 (6 points)**

On considère le jeu suivant, où  $x$  est un paramètre indéterminé.

$I \backslash II$	<b>A</b>	<b>B</b>
<b>a</b>	(2, 2)	(1, 1)
<b>b</b>	(1, 1)	( $x, x$ )

(1) Mettez ce jeu sous la forme  $(N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ , c'est-à-dire, déterminez l'ensemble  $N$  des joueurs, les ensembles  $X_i$  d'actions, et les fonctions d'utilité  $u_i$ . (2 pts)

(2) Déterminez les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu, en fonction de la valeur du paramètre  $x$ . (4 pts)

**Exercice 2 (6 points)**

On considère le jeu suivant :

<b>I \ II</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
<b>a</b>	2, 3	1, 4	5, 3
<b>b</b>	0, 7	4, 3	6, 2
<b>c</b>	1, 2	5, 0	2, -1

(1) Montrez que, par élimination itérative des stratégies strictement dominées, ce jeu se réduit à un jeu dans lequel chaque joueur a deux stratégies. Donnez le jeu réduit. (2 pts)

(2) Déterminez et représentez graphiquement les correspondances de meilleure réponse des joueurs dans le jeu réduit. (2 pts)

(3) Déterminez tous les équilibres de Nash du jeu initial et les paiements associés pour les deux joueurs. (2 pts)

### Exercice 3 (8 points)

Deux éleveurs de vaches,  $E_1$  et  $E_2$ , se partagent une prairie sur laquelle les vaches peuvent paître. Chaque éleveur peut décider d'élever une ou deux vaches sur le terrain commun. Les éleveurs font ce choix simultanément. Le gain (utilité) d'un éleveur dépend de la quantité d'herbe que ses vaches peuvent brouter. La quantité d'herbe disponible sur le pré est limitée.

Si un éleveur place une vache sur le terrain :

- son gain est de 5 si sa vache se trouve avec une vache appartenant à l'autre éleveur,

- son gain est de 3 si sa vache se trouve avec deux vaches appartenant à l'autre éleveur.

Si un éleveur place deux vaches sur le terrain :

- son gain est de 6 si ses vaches se trouvent avec une vache appartenant à l'autre éleveur,

- son gain est de 4 si ses vaches se trouvent avec deux vaches appartenant à l'autre éleveur.

- (1) Ecrivez cette situation comme un jeu sous forme normale. (2 pts)
- (2) Montrez que ce jeu admet un unique équilibre de Nash. (1 pt)
- (3) Montrez qu'un et un seul profil de stratégies pures domine l'équilibre de Nash au sens de Pareto. Interprétez la sous-optimalité de l'équilibre. (2 pts)

Afin de corriger la sous-optimalité de l'équilibre, le maire de la commune interdit aux éleveurs d'élever plus d'une vache chacun sur le terrain commun. Si un éleveur élève plus d'une vache, il paye une amende d'un montant  $T$ . On suppose que le montant des amendes est reversé à une tierce personne.

- (4) Ecrivez cette situation comme un jeu sous forme normale. (1 pt)
- (5) Pour quelles valeur de  $T$  le profil de stratégies pures déterminé à la question (3) est-il un équilibre de Nash? (2 pts)