UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Economie et Gestion

Licence d'Économie et Finance
L2 - S4

ALGÈBRE LINÉAIRE

TEST 1 - Février 2016 - 1h 30 min

CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 4 points

Résoudre en fonction des valeurs du paramètre réel m le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & my & + & z & = & 0 \\ mx & + & y & & & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 2 - 3 points

Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & - & 3y & + & z & & & = & 1 \\ x & & & & & + & t & = & 3 \\ & & & - & z & + & t & = & 4 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 3 - 6 points

1. Soient $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{(m,q)}(\mathbb{R})$. A quelle condition nécessaire et suffisante le produit AB est-il défini ?
   Soit $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$, quel est le format de ${}^tA$?
2. Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes : si la réponse est vraie on demande une justification, et si la réponse est fausse on demande un contre-exemple explicite.
   Soient $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{(m,q)}(\mathbb{R})$.
   (a) Si le produit AB est défini, alors le produit BA est également défini.
   (b) Si la somme $A + B$ est définie, alors le produit AB est défini.
   (c) Si le produit AB est défini, alors le produit ${}^tB\,{}^tA$ est défini.
   (d) Si la somme $A + B$ est définie, alors le produit $A\,{}^tB$ est défini.
   (e) Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A + {}^tB$ est définie.
   (f) Si le produit AB est défini, alors la somme ${}^tAA + B\,{}^tB$ est définie.

Exercice 4 - 3 points

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer le déterminant de P. En déduire que P est inversible, puis calculer son inverse par la méthode de votre choix.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $P^{-1}AP$.

Exercice 5 - 4 points

Calculer les déterminants suivants : vous devrez prendre soin de détailler chacune de vos étapes de calculs.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

UNIVERSITÉ DE CERGY — Licence d'Économie et Finance
U.F.R. Economie et Gestion — L2 - S4

ALGÈBRE LINÉAIRE

TEST 1 - Février 2016 - Corrigé

Exercice 1 - 4 points

(1 point) $(\mathcal{S})\ \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y = 1 \end{cases}$

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x + y - z = 2 \\ (m-1)y + 2z = -2 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (1-m)y + mz = 1-2m & (L_3 \leftarrow L_3 - mL_1) \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x + y - z = 2 \\ (m-1)y + 2z = -2 \\ (m+2)z = -1-2m & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases}$$

• **(0,5 point)** Si $m = -2$, la dernière ligne du système devient $0z = 3$: donc le système n'a pas de solution

• **(1 point)** Si $m \neq -2$, la dernière ligne donne $z = \dfrac{-1-2m}{m+2}$

$$\text{et } (\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x + y - z = 2 \\ (m-1)y = -2 + \dfrac{2+4m}{m+2} \\ z = \dfrac{-1-2m}{m+2} \end{cases}$$

• **(0,5 point)** Si $m = 1$, le système devient :

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 0y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$$

• **(1 point)** Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$:

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} x + y - z = 2 \\ (m-1)y = \dfrac{2m-2}{m+2} \\ z = \dfrac{-1-2m}{m+2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{m+2} \\ y = \dfrac{2}{m+2} \\ z = \dfrac{-1-2m}{m+2} \end{cases}$$

Exercice 2 - 3 points

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} 2x & - & 3y & + & z & & & = & 1 \\ x & & & & & + & t & = & 3 \\ & & & - & z & + & t & = & 4 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrl} x & & & & & + & t & = & 3 & (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ & - & 3y & + & z & - & 2t & = & -5 & (L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2) \\ & & & - & z & + & t & = & 4 & \\ & & y & + & z & & & = & -3 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & & & & + & t & = & 3 & \\ & y & + & z & & & = & -3 & (L_2 \leftrightarrow L_4) \\ & & - & z & + & t & = & 4 & \\ & & & 4z & - & 2t & = & -14 & (L_4 \leftarrow L_2 + 3L_4) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & & & & + & t & = & 3 & \\ & y & + & z & & & = & -3 & \\ & & - & z & + & t & = & 4 & \\ & & & & & 2t & = & 2 & (L_4 \leftarrow L_4 + 4L_3) \end{array}\right.$$

D'où $\mathcal{S} = \{\ (2;0;-3;1)\}$

Exercice 3 - 6 points

1. **(1 point)** Soient $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{(m,q)}(\mathbb{R})$. Le produit AB est défini si et seulement si $p = m$

   Soit $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$, alors ${}^tA \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$

2. VRAI ou FAUX . Soient $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{(m,q)}(\mathbb{R})$.

   (a) **(0,5 point)** Si le produit AB est défini, alors le produit BA est également défini. FAUX :

   Prendre $A \in \mathcal{M}_{(1,2)}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbb{R})$. Alors AB est défini mais pas BA.

   (b) **(0,5 point)** Si la somme $A + B$ est définie, alors le produit AB est défini. FAUX

   Prendre A et B dans $\mathcal{M}_{(1,3)}(\mathbb{R})$, alors $A + B$ est définie, mais pas le produit AB.

   (c) **(1 point)** Si le produit AB est défini, alors le produit ${}^tB\,{}^tA$ est défini. VRAI

   Si AB est défini, alors $m = p$ d'après la question 1. Donc ${}^tB \in \mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{R})$ et ${}^tA \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$, alors le produit ${}^tB\,{}^tA$ est bien défini.

   (d) **(1 point)** Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit $A\,{}^tB$ est défini. VRAI

   Si la somme $A + B$ est définie, cela signifie que A et B sont de même format (n,p). Alors $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et ${}^tB \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$, et le produit $A\,{}^tB$ est défini.

   (e) **(1 point)** Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A + {}^tB$ est définie. VRAI

   Si les produits AB et BA sont définis, alors $m = p$ et $q = n$, et donc $B \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$ et ${}^tB \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$, et donc la somme $A + {}^tB$ est définie.

   (f) **(1 point)** Si le produit AB est défini, alors la somme ${}^tAA + B\,{}^tB$ est définie. VRAI

   Si $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$, alors ${}^tA \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$ et le produit ${}^tA\,A$ est défini et ${}^tA\,A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

   Si le produit AB est défini alors $B \in \mathcal{M}_{(p,q)}(\mathbb{R})$, alors ${}^tB \in \mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{R})$ et le produit $B\,{}^tB$ est défini et $B\,{}^tB \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

   Ainsi la somme ${}^tA\,A + B\,{}^tB$ est définie.

Exercice 4 - 3 points

1. **(1,5 point)** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ det$P = -1$ donc P est inversible.

   $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. **(1,5 point)** Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 5 - 4 points

(2 points) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{vmatrix}$ $(L_2 \longleftarrow L_2 - L_1)$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & b-a \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & c-b+a \\ 0 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \end{vmatrix}$ $(L_2 \longleftarrow L_2 - L_1)$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & c-b+a \\ 1 & 1 & d \\ 0 & 1 & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & c-b+a \\ 0 & 1 & d-c+b-a \\ 0 & 1 & e \end{vmatrix} = e-d+c-b+a$

(1 point) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 1 & 1 \\ x+3 & x & 1 & 1 \\ x+3 & 1 & x & 1 \\ x+3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ $(C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$

$= \Big(x+3\Big) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \Big(x+3\Big) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} (C_2 \longleftarrow C_2 - C_1) \\ (C_3 \longleftarrow C_3 - C_1) \\ (C_4 \longleftarrow C_4 - C_1) \end{matrix}$

$= (x+3)(x-1)^3$

(1 point) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^5 + b^2 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} =$

$a^5 + b^5$