CC 1 (2016)

UNIVERSITE DE CERGY PONTOISE

Licence 2ème année

ALGEBRE LINEAIRE

Durée : 1h30

Enseignant responsable : ANDRIANASITERA

EXERCICE 1(4pts)

Résoudre par la méthode du pivot de Gauss le système suivant :

$$\begin{cases} 3x-3y+6z+3t=0 \\ -4x+5y-z+t=-6 \\ 2y+15z-9t=-4 \\ -x+y-6z+3t=24 \end{cases}$$

En déduire sans calcul supplémentaire la solution du système homogène associé.

EXERCICE 2(8pts)

On considère la matrice : $M=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$

1) Justifier que la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ sont inversibles et calculer A^{-1} et B^{-1}

2)Calculer M^{-1} en utilisant la méthode des blocs .(On décomposera M en 4 blocs)Dans cette question vous devez préciser toutes les démarches utilisées pour en arriver au résultat final.

EXERCICE 3 (8pts)

Soient les matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1)Calculer A^2, A^3.

2)Soit le polynôme $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$

Calculer $P(A)$ et en déduire que A est inversible .

Déterminer ensuite à partir du calcul de $P(A)$ A^{-1}

3)En déduire B^{-1} et calculer $(AB)^{-1}$

Documents et calculatrices non autorisés.

Corrigé du test 1 d'Algèbre Linéaire:

1)(5pts)

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 & 3 & \vert\, 0 \\ -4 & 5 & -1 & 1 & \vert\, -6 \\ 0 & 2 & 15 & -9 & \vert\, -4 \\ -1 & 1 & -6 & 3 & \vert\, 24 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} L_1/3 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & \vert\, 0 \\ -4 & 5 & -1 & 1 & \vert\, -6 \\ 0 & 2 & 15 & -9 & \vert\, -4 \\ -1 & 1 & -6 & 3 & \vert\, 24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2+4L_1 \\ L_3 \\ L_4+L_1 \end{array} \begin{bmatrix} [1] & -1 & 2 & 1 & \vert\, 0 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & \vert\, -6 \\ 0 & 2 & 15 & -9 & \vert\, -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & \vert\, 24 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3-2L_2 \\ L_4/4 \end{array} \begin{bmatrix} [1] & -1 & 2 & 1 & \vert\, 0 \\ 0 & [1] & 7 & 5 & \vert\, -6 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & \vert\, 8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \vert\, 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4+L_3 \end{array} \begin{bmatrix} [1] & -1 & 2 & 1 & \vert\, 0 \\ 0 & [1] & 7 & 5 & \vert\, -6 \\ 0 & 0 & [1] & -19 & \vert\, 8 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & \vert\, 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ -L_4/18 \end{array} \begin{bmatrix} [1] & -1 & 2 & 1 & \vert\, 0 \\ 0 & [1] & 7 & 5 & \vert\, -6 \\ 0 & 0 & [1] & -19 & \vert\, 8 \\ 0 & 0 & 0 & [1] & \vert\, -7/9 \end{bmatrix}$$

(2,5pts)

Le système est de rang 4 c'est un système de Cramer il admet donc une solution unique(0,5pt)

Pour trouver cette solution on résout par substitution et de façon échelonnée le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x-y+2z+t=0 \\ y+7z+5t=-6 \\ z-19t=8 \\ t=-7/9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-2z-t \\ y=-7z-5t-6 \\ z=8+19t \\ t=-7/9 \end{cases} \quad (1pt)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=179/3 \\ y=136/3 \\ z=-61/9 \\ t=-7/9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S=\{(179/3;136/3;-61/9;-7/9)\}(0.5pt)$$

L'ensemble des solutions du système homogène associé est : $S^*=\{(0;0;0;0)\}\ (0.5pt)$

<u>EXERCICE 2(8pts)</u>

1)Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$ (0,25pt)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2*(-3) = 6 \neq 0$$ donc A est inversible(0.5pt)

Calcul de A^{-1} par la méthode du pivot

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} [1] & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{(0.5pt)}$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ -L_2/3 \\ -L_3/2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} [1] & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right] \to \begin{array}{c} L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} [1] & 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & [1] & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right]$$

(0.5pt) (0,5pt)

$$\begin{array}{c} L_1 - L_3/3 \\ L_2 - L_3/3 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} [1] & 0 & 0 & -1/2 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & [1] & 0 & 1/2 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & [1] & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right] \text{(0.5pt)}$$

Méthode des cofacteurs ;

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t(cofA)\,(0.25pt) \quad cof(A) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t(cofA) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{(1 ,5pt)}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t(cofA) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 2/3 & 1/6 \\ 1/2 & -1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \text{(0.25pt)}$$

De même B est inversible si et seulement si det B est non nul (0.25pt)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \textit{donc B est inversible} \text{ (0.25pt)}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} L_1 - 3L_2 \\ L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{(0.5pt)}$$

2) Décomposition de M en 4 blocs : $M = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

avec $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_{3,2}=$ et $B=\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}$ (0.5pt)

On décompose également l'inverse M^{-1} en 4 blocs et on pose $M^{-1}=\begin{pmatrix}R&S\\T&V\end{pmatrix}$ (0.25pt)

On a $M.M^{-1}=I_5=\begin{pmatrix}I_3&O_{3,2}\\O_{2,3}&I_2\end{pmatrix}$ (0.5pt)et on obtient les équations matricielles suivantes :

$$M.M^{-1}=I_5 \Leftrightarrow \begin{cases}AR+O_{3,2}T=I_3(1)\\AS+O_{3,2}V=O_{3,2}(2)\\CR+BT=O_{2,3}(3)\\CS+BV=I_2(4)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}AR=I_3\\AS=O_{3,2}\\BT=-CR\\CS+BV=I_2\end{cases} \quad (1pt)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}R=A^{-1}\\S=O_{3,2}\\BT=-CA^{-1}\\BV=I_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}R=A^{-1}\\S=O_{3,2}\\T=-B^{-1}CA^{-1}\\V=B^{-1}\end{cases} (1pt)$$

$$T=-\begin{pmatrix}4&-3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2&2/3&1/6\\1/2&-1/3&1/6\\1/2&0&-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27/6&-14/6&-23/6\\-9/6&4/6&7/6\end{pmatrix} \text{(0.5pt)}$$

$$\text{D'où } M^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&2/3&1/6&0&0\\1/2&-1/3&1/6&0&0\\1/2&0&-1/2&0&0\\27/6&-14/6&-23/6&4&-3\\-9/6&4/6&7/6&-1&1\end{pmatrix} \text{(0.5pt)}$$

<u>EXERCICE 3</u> (8pts)

$$1) A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\2&-2&3\end{pmatrix} \quad A^2=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\2&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\2&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-5&5\\8&-4&5\\8&-8&9\end{pmatrix} (0.5pt)$$

$$A^3=A^2.A=\begin{pmatrix}9&-5&5\\8&-4&5\\8&-8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\2&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27&-19&19\\26&-18&19\\26&-26&27\end{pmatrix} (0.5pt)$$

$P(A)=A^3-6A^2+11A-6I(0.5pt)$

$$=\begin{pmatrix}27 & -19 & 19\\ 26 & -18 & 19\\ 26 & -26 & 27\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}9 & -5 & 5\\ 8 & -4 & 5\\ 8 & -8 & 9\end{pmatrix}+11\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}(1pt)$$

$P(A)=A^3-6A^2+11A-6I=O\Leftrightarrow A^3-6A^2+11A=6I\Leftrightarrow A(A^2-6A+11I)=6I(0.5pt)$

$\Leftrightarrow A(A^2-6A+11I)\dfrac{1}{6}=I(0.5pt)\Rightarrow A\ est\ inversible\ d'après\ la\ définition.(0.5pt)$

$et\ A^{-1}=\dfrac{1}{6}(A^2-6A+11I)(0.5pt)$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix}9 & -5 & 5\\ 8 & -4 & 5\\ 8 & -8 & 9\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}+11\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -4 & 7 & -1\\ -4 & 4 & 2\end{pmatrix}(0.5\text{pt})$$

3)On remarque que $B={}^tA$ (0.5pt)donc B est également inversible et $B^{-1}=\left({}^tA\right)^{-1}={}^t\left(A^{-1}\right)$(0.5pt)
D'où

$$B^{-1}=\frac{1}{6}\,{}^t\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -4 & 7 & -1\\ -4 & 4 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & -4 & -4\\ 1 & 7 & 4\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}(0.5pt)$$

$$\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}(0.5pt)=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}2 & -4 & -4\\ 1 & 7 & 4\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -4 & 7 & -1\\ -4 & 4 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}36 & -42 & -6\\ -42 & 66 & 0\\ -6 & 0 & 6\end{pmatrix}(0.5pt)$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6 & -7 & -1\\ -7 & 11 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}(0.5pt)$$