Université Cergy-Pontoise
L3 Économétrie
Examen. 15 avril 2013 9h15-11h15

Il vous est conseillé de lire une première fois l'ensemble du sujet avant de commencer.
Les documents ne sont pas autorisés.
L'ensemble des réponses devra être justifié.

Exercice 1 : 6 points

On considère le modèle :

$$\underset{(T,1)}{y} = \underset{(T,K+1)}{X}\underset{(K+1,1)}{\beta} + \underset{(T,1)}{\epsilon} \tag{1}$$

Ainsi que les hypothèses :

- H_1 : $E(\underset{(T,1)}{\epsilon}) = \underset{(T,1)}{0}$
- H_2 : La matrice $\underset{(T,K+1)}{X}$ est certaine.
- H_3 : la matrice $\underset{(T,K+1)}{X}$ est de plein rang colonne.
- H_4 : $E(\underset{(T,1)}{\epsilon}\,.\,\underset{(1,T)}{\epsilon'}) = \sigma^2 \underset{(T,T)}{I_T}$

1. Donner l'expression de l'estimateur $\hat{\beta}$ des MCO de β associé au modèle 1.
2. Quelle(s) hypothèse(s), parmi les hypothèses H_1 à H_4, permet(tent) d'obtenir un estimateur unique $\hat{\beta}$?
3. Calculer, l'espérance de $\hat{\beta}$, en précisant, parmi les hypothèses H_1 à H_4, celles que vous utilisez pour calculer l'espérance.
4. Calculer, la variance de $\hat{\beta}$, en précisant, parmi les hypothèses H_1 à H_4, celles que vous utilisez pour calculer la variance.

Exercice 2 : 4 points

On considère les modèles :

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \epsilon_t \;\; (t = 1, T) \tag{2}$$
$$y_t - \bar{y} = \gamma_1(x_t - \bar{x}) + \varepsilon_t \;\; (t = 1, T) \tag{3}$$

où $\bar{y}$ désigne la moyenne empirique de la variable y et $\bar{x}$ désigne la moyenne empirique de la variable x.

En utilisant, de manière détaillée, le théorème de Frish-Waugh sur le modèle 2, montrer que :

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\gamma}_1$$

Exercice 3 : 3 points

On considère le modèle :

$$\underset{(T,1)}{y} = \underset{(T,K+1)}{X}\underset{(K+1,1)}{\beta} + \underset{(T,1)}{\epsilon} \qquad (4)$$

Ainsi que les hypothèses :

- $H_1 : E(\underset{(T,1)}{\epsilon}) = \underset{(T,1)}{0}$
- H_2 : La matrice $\underset{(T,K+1)}{X}$ est certaine.
- H_3 : la matrice $\underset{(T,K+1)}{X}$ est de plein rang colonne.
- $H_4 : E(\underset{(T,1)}{\epsilon} \cdot \underset{(1,T)}{\epsilon'}) = \sigma^2 \underset{(T,T)}{I_T}$
- $H_6 : \epsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_T)$

1. Donner la loi de $\hat{\beta}$
2. Donner un estimateur sans biais de σ^2 et sa loi.
3. Montrer que les ϵ_t sont indépendants deux à deux.

Exercice 4 : 7 points

On veut estimer une fonction de production de type Cobb-Douglas

$$Y = A_0 K_t^{\alpha} L^{\beta} \qquad (5)$$

- Y : le niveau de production
- K : le niveau de capital
- L : l'emploi

1-En transformant le modèle 5, faire apparaître le modèle linéaire suivant :

$$log(Y_t) = \gamma + \alpha log(K_t) + \beta log(L_t) + \epsilon_t \qquad (6)$$

2-Que représente la variable ϵ_t ?

On effectue la régression correspondant au modèle 6 sur un échantillon de $T = 360$ mois de 1970 à 1999. On obtient les résultats suivants :

$$\widehat{log(Y_t)} = \underset{(0.022)}{-0.112} + \underset{(0.017)}{0.317} log(K_t) + \underset{(0.034)}{0.545} log(L_t) \quad t = 1970:1, 1999:12 \qquad (7)$$

$$R^2 = 0.901 \qquad SCR = 3.421$$

3-Expliquer pourquoi les valeurs entre parenthèses, sous les coefficients estimés, sont les écarts-types estimés des coefficients estimés.

4-Effectuer, en détail, le test $H_0 : \alpha = 0$.
5-Effectuer, en détail, le test de Fisher de significativité globale des coefficients.

On souhaite maintenant effectuer un test de stabilité des coefficients du modèle 6 sur la période 1970-1999. On dispose pour cela de deux régressions effectuées pour les sous périodes suivantes :

$$\widehat{log(Y_t)} = \underset{(0.012)}{-0.219} + \underset{(0.035)}{0.279}log(K_t) + \underset{(0.123)}{0.609}log(L_t) \quad t = 1970:1, 1985:12 \tag{8}$$
$$R^2 = 0.890 \qquad SCR = 2.102$$

$$\widehat{log(Y_t)} = \underset{(0.051)}{-0.139} + \underset{(0.100)}{0.320}log(K_t) + \underset{(0.210)}{0.560}log(L_t) \quad t = 1986:1, 1999:12 \tag{9}$$
$$R^2 = 0.921 \qquad SCR = 1.280$$

6-Présenter le test de stabilité des coefficients comme un test de contraintes linéaires sur un modèle particulier.
7-Donner la statistique du test et sa loi sous H_0.
8-Finir le test.

On souhaite maintenant tester l'hypothèse de constance des rendements d'échelle.
9-Montrer que tester cette hypothèse revient à tester l'hypothèse $H_0 : \omega = 0$ sur le modèle suivant :

$$log(y_t) = \delta + \lambda log(k_t) + \omega log(L_t) + \epsilon_t \tag{10}$$

- $y = \frac{Y}{L}$: le niveau de production par tête
- $k = \frac{K}{L}$: le niveau de capital par tête
- L : l'emploi

Le modèle estimé donne :

$$\widehat{log(y_t)} = \underset{(0.120)}{-0.398} + \underset{(0.089)}{0.304}log(k_t) - \underset{(0.009)}{0.031}log(L_t) \quad t = 1970:1, 1999:12 \tag{11}$$
$$R^2 = 0.987 \qquad SCR = 4.987$$

10-Conclure quant à la nature des rendements d'échelle.

x	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986

Table 1: Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \; F(x) = Prob(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$n \backslash F$	**0,75**	**0,90**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**	**0,9995**
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,599
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,768
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
80	0,678	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,416
100	0,677	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,390
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,675	1,282	1,645	1,960	2,327	2,576	3,291

Table 2: Quantiles d'une loi de Student à n degrés de liberté. Valeurs de x telles que $Prob(T_n \leq x) = F$

$q\backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	243,91
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,95
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,88
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,85
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75

Table 3: Loi de Fisher. Valeurs de x telles que $Prob(F_{p,q} \leq x) = 95\%$