MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

4e édition

KAMAL BOUMDINE
Généralités

Il serait bon d’abord de s’entendre sur certains termes courants dans le domaine des affaires.

Notion d’intérêt

L’intérêt est le loyer de l’argent. Il peut être une dépense ou un revenu.
→ Il s’agit d’une dépense pour l’emprunteur, l’intérêt correspond à la rémunération du capital prêté.
→ Il s’agit d’un revenu pour le prêteur, l’intérêt est le revenu tiré du capital prêté.

Taux d’intérêt

On appelle, taux d’intérêt annuel, l’intérêt produit par un capital de 1 dh placé pendant un an. Si après avoir placé 1 dh pendant un an, on récupère 1,13 dh, alors, on dit, habituellement, que le taux d’intérêt ou encore le taux de placement annuel est de 0,13 ou encore 13 %.

Remarque

Habituellement le taux d’intérêt est donné pour une unité de capital de 100 dh.

Variation de l’intérêt

L’intérêt est variable selon les circonstances, il tient notamment compte:
→ De la loi de l’offre et de la demande : s’il y a beaucoup d’offres et peu de demandes de capitaux, l’intérêt tendra à baisser. S’il y a beaucoup de demandes et peu de d’offres de capitaux, l’intérêt tendra à s’éléver.
→ Du moment du prêt, de la durée et du taux d’intérêt.
→ Du degré de confiance que les prêteurs accordent aux emprunteurs, plus on a de garanties plus on a de chance d’obtenir des à moindres coûts.
De l'inflation: l'inflation fait augmenter le taux d'intérêt et par conséquent le montant global de l'intérêt, parce que les épargnants et les prêteurs exigent des taux d'intérêt leur permettant de compenser la perte de leur pouvoir d'achat et d'assurer un rendement réel.

Systèmes d'intérêt

On distingue:
- L'intérêt simple généralement utilisé pour les placements à court terme (moins d'un an).
- L'intérêt composé généralement utilisé pour les placements à long terme (plus d'un an).

1.1 - Définition et calcul pratique

Définition

Dans le cas de l'intérêt simple, le capital reste invariable pendant toute la durée du prêt. L'emprunteur doit verser, à la fin de chaque période, l'intérêt dû. Cela suppose, même si la période est parfois un peu longue (années par exemple) que les intérêts produits par le placement sont calculés à la fin de chaque période.

Exemple

Soit un capital de 15 000 dh placé à intérêts simples pendant 2 années à un taux annuel de 13 %.

Calculons les intérêts:
- Pour la première année
  \[ 15 000 \times 13/100 \times 1 = 1 950 \text{ dh} \] (somme calculée à la fin de la première année)
- Pour la deuxième année
  \[ 15 000 \times 13/100 \times 1 = 1 950 \text{ dh} \] (somme calculée à la fin de la deuxième année)

Soit un total d'intérêt de 1 950 + 1 950 = 3 900 dh.
Somme que l'on peut calculer directement:
\[ 15 000 \times 13/100 \times 2 = 3 900 \text{ dh} \]

1) Les intérêts sont versés à la fin de chacune des périodes de prêt.
2) Le capital initial reste invariable. Les intérêts payés sont égaux de période en période.
3) Le montant des intérêts est proportionnel à la durée du prêt.
**Calcul pratique**

Si nous désignons par :
- C : le capital placé ;
- t : le taux d'intérêt annuel pour 100 dh ;
- n : la période de placement (en années) ;
- I : l'intérêt rapporté par le capital C.

On sait que :

\[
I = \frac{C \times t \times n}{100}
\]

**Exemple**

Calculons l'intérêt produit par un capital de 35 850 dh placé pendant 3 ans à un taux de 11 %.

On sait que :

- \( C = 35 850 \text{ dh} \)
- \( t = 11\% \)
- \( n = 3 \text{ ans} \)
- \( I = ? \)

Dans la pratique et pour des raisons de simplifications, l'intérêt est calculé en fonction du nombre de jours de placement. L'année est prise pour 360 jours et les mois sont comptés pour leur nombre de jours exacts.

La formule de calcul devient :

\[
C \text{ dirhams en (J) jours rapportent un intérêt } I = \frac{C \times t \times J}{36 000}
\]

\[
C \text{ dirhams en (m) mois rapportent un intérêt } I = \frac{C \times t \times m}{1200}
\]

\[
C \text{ dirhams en (n) années rapportent un intérêt } I = \frac{C \times t \times n}{100}
\]

**Exemples**

1. Quel est l'intérêt produit à intérêts simples, par un placement d'une somme d'argent de 12 500 dh au taux de 10,5 % pendant 96 jours.

   - \( C = 12 500 \text{ dh} \)
   - \( t = 10.5\% \)
   - \( n = 96 \)

   alors \( I = \frac{12 500 \times 10.5 \times 96}{36 000} = 350 \text{ dh} \)

2. Quel est l'intérêt produit par un placement de 15 500 dh au taux de 9,5 % pendant 7 mois ?

   - \( C = 15 500 \text{ dh} \)
   - \( t = 9.5\% \)
   - \( m = 7 \)

   alors \( I = \frac{15 500 \times 9.5 \times 7}{1200} = 858.99 \text{ dh} \)

3. Soit un capital de 30 000 dh placé à intérêt simple du 17 mars au 27 juillet de la même année, au taux annuel de 12,5%. Calculer l'intérêt produit par ce placement.

   Calculez d'abord la durée du placement.
   On compte le nombre exact de chaque mois, la date initiale exclue et la date finale incluse.
Mars : du 17 au 31 mars (31-17) …………14 jours.
Avril : 30 jours ………………………30 jours.
Mai : 31 jours ………………………31 jours.
Juin : 30 jours ………………………30 jours.
Juillet : 27 jours (jusqu'au 27) ………27 jours.
Total ……………………132 jours.

C = 30 000 dh
t = 12,5 %
j = 132
alors I = \frac{30 000 \times 12.5 \times 132}{36 000} = 1 375 dh

On peut retrouver le même résultat d'une autre manière.
Appliquant la règle de proportionnalité.

\textbf{Intérêt annuel} \quad 30 000 \times 12.5 \times \frac{3 \times 750}{100} = 3 750 dh

\textbf{Intérêt des 132 jours est} \quad I = \frac{3 \times 750 \times 132}{360} = 1 375 dh

Il existe plusieurs méthodes pour le calcul des intérêts. Mais l'utilisation des
tables financières et des calculatrices a rendu inopportun la connaissance de
l'ensemble de ces méthodes, toutes fois la méthode des nombres et des
diviseurs fixes a le mérite de simplifier certains calculs.

\section*{1.2 – Méthode des nombres et des diviseurs fixes}

Si la durée est exprimée en jours

L'intérêt est \quad I = \frac{C \times t \times j}{36 000}

Séparons les termes fixes des termes variables et divisons par (t)

I = \frac{C \times j}{36 000 / t}

\Rightarrow C j = N est le nombre

\Rightarrow 36 000 / t = D est le diviseur fixe

La formule devient \quad I = \frac{N}{D}

\rightarrow Cette formule est intéressante lorsqu'il s'agit de calculer l'intérêt global
produit par plusieurs capitaux au même taux pendant des durées différentes.

\textbf{Exemple}

Calculons l'intérêt global au taux de 12% des capitaux suivants :
15 000 dh placé pendant 38 jours
27 000 dh placé pendant 76 jours
32 000 dh placé pendant 60 jours

Utilisons la formule \quad I = \frac{N}{D}

Le diviseur est \quad D = 36 000 / 12 \quad , \quad D = 3 000

\begin{tabular}{|l|c|c|}
\hline
C & Capital & J = jours & N = nombre \\
\hline
C1 = 15 000 & J1 = 38 & N1 = 570 000 \\
C2 = 27 000 & J2 = 76 & N2 = 2 052 000 \\
C3 = 32 000 & J3 = 60 & N3 = 1 920 000 \\
\hline
\textbf{Total} & 4 520 000 & \\
\hline
\end{tabular}

L'intérêt global \quad \frac{570 000 + 2 052 000 + 1 920 000}{3 000} = \frac{1 514 dh}{3 000}

\textbf{Généralisation}

L'intérêt global pour (p) capitaux est:

\[ I_G = \frac{\sum_{k=1}^{p} N_k}{D} \]
1.3 - Valeur définitive ou valeur acquise

La valeur définitive du capital \( C \) après \( n \) période de placement est la somme du capital et des intérêts gagnés ;

Si nous désignons par \( VD \) la valeur définitive alors

\[
VD = C + I = C + C \times i \times n = C + C \times i \times \frac{n}{100}
\]

\[
VD = C \times (1 + i \times \frac{n}{100}) \quad \text{si} \quad n \text{ est en année}
\]

Exemple

Calculer l'intérêt et la valeur définitive d'un placement à intérêts simple de 15 000 dh pendant 50 jours au taux de 9 % l'année.

\[
\begin{align*}
C &= 15 000 \text{ dh;} \quad \text{alors} \quad I = 15 000 \times 0.09 \times 50 = 187.5 \text{ dh} \\
t &= 9\%; \quad VD = 15 000 + 187.5 = 15 187.5 \text{ dh} \\
n &= 50 \\
I &= ? \\
VD &= ?
\end{align*}
\]

Ou encore

\[
\begin{align*}
VD &= 15 000 \times (1 + 0.09 \times 50) \\
&= 360 \\
VD &\approx 15 000 \times (1,0125) \\
VD &\approx 15 187,5
\end{align*}
\]

Les deux formules:

\[
\begin{align*}
I &= \frac{C \times i \times n}{360} \\
VD &= \frac{C \times (1 + i \times n)}{360}
\end{align*}
\]

Intérêt simple

Valeur définitive

Remarque

Mettent en jeu 4 variables à savoir :

- l'intérêt : \( I \)
- le capital : \( C \)
- le taux : \( i \)
- le nombre de jours : \( j \)

Ce qui permet de résoudre 4 problèmes différents en connaissant 3 variables sur les 4.

Mathématiques Financières

1.4 - Taux moyen de plusieurs placements

Soient trois sommes d'argent placées à des taux variables et pendant des durées différentes:

\[
\begin{align*}
\text{Capital} & \quad \text{Taux} & \quad \text{Durée} \\
C_1 & \quad t_1 & \quad j_1 \\
C_2 & \quad t_2 & \quad j_2 \\
C_3 & \quad t_3 & \quad j_3
\end{align*}
\]

L'intérêt global procuré par ces trois placements est:

\[
I_G = \frac{C_1 \times t_1 \times j_1 + C_2 \times t_2 \times j_2 + C_3 \times t_3 \times j_3}{36 000}
\]

Définition

Le taux moyen de ces trois placements est un taux unique noté \( t_m \), qui appliqué à l'ensemble de ces trois placements donne le même intérêt global.

\[
I_G = \frac{C_1 \times t_m \times j_1 + C_2 \times t_m \times j_2 + C_3 \times t_m \times j_3}{36 000}
\]

(1) et (2) sont identiques alors

\[
\sum_{k=1}^{3} C_k \times t_k \times j_k = \sum_{k=1}^{3} C_k \times t_m \times j_k \quad \leftrightarrow \quad t_m = \frac{\sum_{k=1}^{3} C_k \times t_k \times j_k}{\sum_{k=1}^{3} C_k \times j_k}
\]

Formule générale

\[
t_m = \frac{\sum_{k=1}^{p} C_k \times t_k \times j_k}{\sum_{k=1}^{p} C_k \times j_k}
\]

Il s'agit de la moyenne arithmétique des taux pondéré par les nombres \( N_k \).
Exemple
Calculer le taux moyen des placements suivants :
2 000 dh placés pendant 30 jours à 7 % ;
7 000 dh placés pendant 60 jours à 10 % ;
10 000 dh placés pendant 50 jours à 9 %.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Capital x Durée</th>
<th>Taux</th>
<th>Nombres</th>
<th>Ck x tx jk</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2 000 dh x 30 j</td>
<td>7 %</td>
<td>60 000</td>
<td>420 000</td>
</tr>
<tr>
<td>7 000 dh x 60 j</td>
<td>10 %</td>
<td>420 000</td>
<td>4 200 000</td>
</tr>
<tr>
<td>10 000 dh x 50 j</td>
<td>9 %</td>
<td>500 000</td>
<td>4 500 000</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Total 980 000 9 120 000

$$\sum_{k=1}^{3} C_k t_k j_k$$

Alors

$$t_m = \frac{9 120 000}{980 000} = 9,3061$$

$$\sum_{k=1}^{3} C_k t_k j_k$$

Soit

$$t_m \approx 9,3\%$$

Pour le calcul du taux moyen on a utilisé en définitive la méthode des nombres.

$$t_m = \frac{3}{\sum_{k=1}^{3} C_k j_k}$$

avec

$$N_k = C_k j_k$$

1.5 - Intérêt précompté et taux effectif de placement

Il existe deux manières de paiement des intérêts :

- Par un versement unique lors du remboursement final du prêt (paiement des intérêts le jour du remboursement du prêt par exemple). On dit que l'intérêt est post-compté.

Mathématiques Financières

- Par avance au moment du versement du capital (les bons de caisse par exemple), c'est-à-dire paiement des intérêts le jour de la conclusion du contrat de prêt.

Ces deux modes de calcul ne sont pas équivalents du point de vue financier.

Le taux effectif dans le deuxième cas est un peu plus élevé.

Définition

On appelle taux effectif de placement le taux d'intérêt simple avec règlement des intérêts lors du remboursement du prêt.

On calcule le taux effectif du placement à chaque fois que les intérêts sont précomptés et que l'intérêt est calculé sur la base de la valeur nominale. Dans ce cas le placement est effectué à un taux effectif différent du taux d'intérêt annoncé qui correspond habituellement à des intérêts versés à la fin du contrat.

Exemple

Un bon d'une valeur nominale de 5 000 dh échéant dans 2 ans se vend à 4 000 dh. Calculer le taux d'intérêt nominal et le taux effectif de ce placement.

Le taux nominal est le taux conventionnel ou encore le taux annoncé. Soit le taux annoncé alors

$$5 000 \times t \times 2 = 1 000 dh$$

Soit $t = 10 \%$ donc le taux est de $10 \% / 100 = 0,1$.

Or le rendement annuel réalisé sur ce placement est le taux effectif de placement que l'on note $(t_e)$, tel que :

$$5 000 = 4 000 (1 + t_e / 100 \times 2)$$

$$5 000 = 4 000 + 80 t_e$$

$$t_e = 12,5 \%$$

Autrement dit, on verse immédiatement l'intérêt de ce capital, pour 2 ans, à 10% soit $(5 000 \times 10 \times 2) / 100 = 1 000 dh$ et les 5 000 dh seront rendus à l'acheteur 2 ans après. Tout se passe donc comme si le capital investi de 5 000 - 1 000 = 4 000 dh avait produit en 2 ans un intérêt de 1 000 dh.

Si $(t_e)$ est le taux effectif de placement alors:

$$4 000 \times t_e \times 2 = 1 000 dh$$

$$t_e = 12,5 \%$$
1) le taux effectif de placement peut être calculé directement de la manière suivante :

Soient :
- \( C \) : le capital placé
- \( i \) : le taux annoncé
- \( i_e \) : le taux effectif de placement
- \( n \) : durée en années.

Le jour du placement de \( C \), on reçoit 1 :
- \( I = C_i \)
On place donc effectivement
- \( C - I = C - C_i \)

On récupère \( n \) années plus tard le capital \( C \). On gagne alors le même intérêt \( (C_i) \) en investissant \( (C - C_i) \).

Si \( i_e \) est le taux effectif de placement alors :

\[
(C - C_i) \times (i_e) \times n = \frac{C_i}{C - C_i} \\
(i_e)^n = C_i \\
i_e = \frac{C_i}{C_i - C_i} \\
i_e = \frac{C_i}{C_i (1 - i_n)} \\
i_e = \frac{C_i}{C_i} i_n \times i \\
i_e = \frac{i}{1 - i_n}
\]

Donc

\[
i_e = \frac{i}{1 - i_n}
\]

Si \( n \) en années

Appliquons cette formule à l'exemple précédent

\[
i_e = \frac{0.10}{1 - (0.10 \times 2)} \quad i_e = 0.125 \quad \text{soit} \quad i_e = 12.5 \%
\]

2) dans la formule du taux effectif de placement

Si la durée est en mois, alors :

\[
i_e = \frac{i}{1 - (i \times 1)}
\]

Utilisation de l'intérêt simple

L'intérêt simple est utilisé dans :
- Les opérations à court terme.
- Les prêts entre banques ou intermédiaires financiers.
- Les comptes courants, les carnets de dépôts.
- Les prêts à la consommation accordés par les institutions financières et les escomptes des effets de commerce.

1.6- application aux comptes courants et d'intérêts

Définitions

- Le compte courant est ouvert chez un organisme financier (une banque par exemple). Les fonds sont versés à vue et sont directement exigibles. Le titulaire d'un compte courant peut à tout moment effectuer des versements, des retraits ou des transferts.

- Le compte courant et d'intérêts est un compte courant sur lequel les sommes produisent des intérêts créditeurs ou débiteurs selon le sens de l'opération à partir d'une date dite : date de valeur.

La date de valeur est une date qui diffère la plupart du temps de la date d'opération. Cette dernière est la date où l'opération est prise en compte.

- Dans la plupart des cas, les sommes retirées d'un compte le sont à une date de valeur antérieure à celle de l'opération et les versements le sont à une date souvent postérieure à celle du dépôt ceci joue à l'avantage des intermédiaires financiers.

Il existe plusieurs méthodes pour tenir de tels comptes. Les calculs sont assez fastidieux. L'utilisation de l'outil informatique a rendu caduque la plupart de ces méthodes. Toutefois, la méthode hambourgeoise est la seule encore utilisée par les banques.
Mathématiques Financières

**Méthode hambourgeoise.**

Elle consiste à diviser le compte en sous-périodes ou le solde reste constant. Elle permet de connaître l'état et le sens du compte à chaque date. Elle est la seule applicable avec des taux différentiels (le taux débiteur est en général supérieur au taux créditeur). On parle de taux réciproques s'ils sont égaux.

**Principe et organisation du travail**

1.- À chaque opération est associée une date de valeur.
   - Date d'opération : date effective de réalisation de l'opération
   - Date de valeur : date à partir de laquelle on calcule l'intérêt.
   - Date de valeur est égale à la date de l'opération majorée ou minorée d'un ou de plusieurs jours (jours de banque) suivant que l'opération est créditrice ou débitrice.
   Les opérations sont classées par date de valeur croissante.

2.- Les intérêts sont calculés sur le solde du compte, à chaque fois que celui-ci change de valeur.

3.- La durée du placement du solde est le nombre de jours séparant sa date de valeur et la date de valeur suivante.

4.- À la fin de la période de placement (le trimestre par exemple) on détermine le solde du compte après avoir intégré dans le calcul le solde des intérêts débiteurs et les différentes commissions prélevées pour la tenue de tels comptes.

5.- Dans le cas de la réouverture du compte, on retient comme première date de valeur, la date d'arrêté du solde précédent.

6.- On peut utiliser pour le calcul soit directement la méthode hambourgeoise soit la méthode des nombres et des diviseurs fixes appliquée à la méthode hambourgeoise.

**Exemple**

Une personne dispose dans une banque d'un compte courant et d'intérêts pour lequel :

```
<table>
<thead>
<tr>
<th>Date d'opération</th>
<th>Opérations</th>
<th>Taux débiteur</th>
<th>Taux créditeur</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>01/07</td>
<td>Solde Créditeur</td>
<td>9 %</td>
<td>6 %</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Retrait</td>
<td>12 000 dh</td>
<td>10 000 dh</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Fournisseur</td>
<td>18 000 dh</td>
<td>11 000 dh</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Remise d'effet</td>
<td>40 000 dh</td>
<td>13 000 dh</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Dépôt</td>
<td>20 000 dh</td>
<td>15 000 dh</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Chèque Rami</td>
<td>19 000 dh</td>
<td>20 000 dh</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Dépôt</td>
<td>19 000 dh</td>
<td>26 000 dh</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Soldes intérêts</td>
<td></td>
<td>26 700 dh</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Commission de tenue du compte</td>
<td></td>
<td>26 728,125 dh</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Solde Créditeur</td>
<td></td>
<td>26 728,125 dh</td>
</tr>
</tbody>
</table>
```

Le solde est créditeur de 23 400 dh au 30/6 reste à ce niveau jusqu'au 4/7 (date de valeur à laquelle le solde se modifie). A ce solde créditeur pendant 4 jours, correspond un crédit de :

\[
23 400 \times 0,06 \times 4 = 15,6 \text{ dh} \times 360
\]

On procède ainsi pour chaque opération.

Le dépôt en espèces de 30 000 dh (valeur de 28/7) est le dernier avant la date d'arrêté du compte. Le solde est alors créditeur du 26 700 dh. Il restera à ce niveau jusqu'au 30/7.
Mathématiques Financières

On incorpore ensuite le solde des intérêts et les différentes commissions. Dans ce cas, la commission de tenue de compte est :

\[(12000 + 18000 + 19200) \times 0,5 / 1000 = 24,6 \text{ dh}\]

Il reste un solde créditeur de 26 728,125 dh

On peut utiliser, avec la méthode hambourgeoise, les nombres diviseurs fixes :
- Calculons les diviseurs fixes → diviseur créditeur 36 000/6 = 6 000
- Calculons le débiteur 36 000/9 = 4 000

<table>
<thead>
<tr>
<th>Date d'opération</th>
<th>Opérations</th>
<th>Capital</th>
<th>Saldes</th>
<th>Date de valeur</th>
<th>Jour</th>
<th>Intérêts</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Dédit</td>
<td>Crédit</td>
<td>Dédit</td>
<td>Crédit</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>07/01</td>
<td>Solde créditeur</td>
<td>23 400</td>
<td>23 400</td>
<td>30/01</td>
<td>4</td>
<td>93 600</td>
</tr>
<tr>
<td>05/01</td>
<td>Retrait</td>
<td>12 000</td>
<td>11 400</td>
<td>04/01</td>
<td>7</td>
<td>79 800</td>
</tr>
<tr>
<td>12/07</td>
<td>Fournisseur</td>
<td>18 000</td>
<td>6 600</td>
<td>11/07</td>
<td>4</td>
<td>26 400</td>
</tr>
<tr>
<td>14/07</td>
<td>Renonç. effet</td>
<td>20 000</td>
<td>13 400</td>
<td>15/07</td>
<td>6</td>
<td>80 400</td>
</tr>
<tr>
<td>20/07</td>
<td>Dépôt</td>
<td>2 300</td>
<td>15 900</td>
<td>21/07</td>
<td>4</td>
<td>63 600</td>
</tr>
<tr>
<td>24/07</td>
<td>Chèque Rami.</td>
<td>19 200</td>
<td>3 300</td>
<td>25/07</td>
<td>3</td>
<td>9 900</td>
</tr>
<tr>
<td>27/07</td>
<td>Dépôt</td>
<td>30 000</td>
<td>26 700</td>
<td>28/07</td>
<td>2</td>
<td>53 400</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Totaux</td>
<td>36 300</td>
<td>370 800</td>
<td>9 075</td>
<td>61,8</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>30/07</td>
<td>Soldes intérêts</td>
<td>9 075</td>
<td>52 725</td>
<td>26 752,725</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Commission</td>
<td>24,6</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>de tenue de compte</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>30/07</td>
<td>Solde Créditeur</td>
<td>26 728,125</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

Calcul des intérêts créditeurs : \[I_C = 370 800 = 61,8 \text{ dh} 6 000\]

Calcul des intérêts débiteurs : \[I_D = 36 300 = 9,075 \text{ dh} 4 000\]

Le compte est crédité le 30/07 à : 61,8 - 9,075 = 52 725 dh. Il reste donc un solde créditeur de 26 752,725 dh. Le solde est créditeur de 26 728,13 dh après déduction de la commission de tenue de compte de 24,6 dh.

Mathématiques Financières

**Cas particulier**

Dans certains cas (livret d'épargne et carnet de dépôts) les dates de valeur sont imposées : le 1er et le 16 du mois. Les banques appliquent un taux d'intérêt simple pendant le nombre de quinzeaines entières civiles de placement ainsi :
- Pour un dépôt : la date de valeur est le 1er et le 16 du mois qui suit la date de l'opération.
- Pour un retrait, la date de valeur est la fin ou le 15 du mois qui précède la date de l'opération.

Si q est le nombre de quinzeaines, l'intérêt produit pour un montant C placé pendant q quinzeaines entières est :

\[I = \frac{C \times q}{2400} \text{ ou } I = \frac{C \times q}{24}\]

**Exemple**

Une personne verse sur son livret d'épargne 18 000 dh le 25 mars, 12 000 dh le 3 juin et 30 000 dh le 13 octobre de la même année. Calculer l'intérêt qu'elle recevra en fin d'année si le taux d'intérêt simple est de 8,5 %.

Calculons le nombre de quinzeaines :
- Du 25 mars au 31 décembre : 18 quinzeaines
- Du 3 juin au 31 décembre : 13 quinzeaines
- Du 31 octobre au 31 décembre : 5 quinzeaines

\[I = \left[ \frac{(18000 \times 18) + (12000 \times 13) + (30000 \times 5)}{2400} \right] \times 0,085 = \frac{2231,25}{24} = 2231,25\]

**1.7 - Exercices**

**I-1** - Compléter le tableau ci-dessous et interpréter les résultats obtenus.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Capital en dh</th>
<th>Taux annuel %</th>
<th>Durée de placement j</th>
<th>Année comprise pour</th>
<th>Intérêt en dh</th>
<th>Valeur définitive en dh</th>
<th>VD</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>18 000</td>
<td>10,50</td>
<td>9 mois</td>
<td>360</td>
<td>665</td>
<td>665</td>
<td>21 665</td>
</tr>
<tr>
<td>62 000</td>
<td>9,50</td>
<td>60 j</td>
<td>360</td>
<td>948,6</td>
<td>948,6</td>
<td>152 640</td>
</tr>
<tr>
<td>144 000</td>
<td>11,65</td>
<td>180 j</td>
<td>360</td>
<td>340,18</td>
<td>340,18</td>
<td>152 640</td>
</tr>
<tr>
<td>16 600</td>
<td>12,20</td>
<td>73 j</td>
<td>365</td>
<td></td>
<td></td>
<td>61 249,92</td>
</tr>
</tbody>
</table>
Mathématiques Financières

1.2 - Un individu place 82 500 dh pendant 7 mois à partir du 13 novembre 2005 au taux annuel de 11 %. Combien récupère-t-il à la fin de son placement ?

1.3 - Une personne a placé un capital de 25 200 dh pour une durée allant du 27 mai 2005 au 8 août de la même année au taux annuel de 12 %. Combien a-t-elle récupéré à la fin de son placement ?

1.4 - Deux capitaux sont placés à intérêts simples pendant 2 ans. Le plus petit à 11 %, l'autre à 9 %. Trouver les deux capitaux sachant que le plus petit a rapporté 280 dh de plus que l'autre et que la différence entre les deux capitaux est de 1 000 dh.

1.5 - Soient les trois placements suivants :
- Placement A : 17 500 dh du 01/07/05 au 05/11/05, à 9 % ;
- Placement B : 12 000 dh du 12/11/05 au 29/12/05, à 10,5 % ;
- Placement C : 27 500 dh du 04/04/05 au 12/10/05, à 8,5 %.
Calculer le taux moyen de placement de ces trois capitaux.

1.6 - Deux capitaux sont placés à intérêts simples pour une année. Leurs revenus sont respectivement 1 760 dh et 2 750 dh. Le second capital est placé à un taux supérieur de 3 % par rapport au premier et lui est supérieur de 3 000 dh. Trouver les deux capitaux et les deux taux d'intérêt (taux d'intérêt à retenir : t ≤ 11 %).

1.7 - Une personne a le choix entre les deux placements suivants :
- Placement 1 à intérêt simple de : 7 % ;
- Placement 2 à intérêt simple précompté de : 6,8 %.
1) Quel est le placement le plus intéressant ?
2) Pour quel taux annuel d'intérêt simple précompté le placement 2 est-il équivalent au placement 1 ?

1.8 - Un particulier a versé au cours de l'année 2005 sur un compte d'épargne (compte sur livret) les sommes suivantes :
- 2 500 dh le 23 avril
- 11 000 dh le 11 juillet
- 4 200 dh le 10 octobre
Calculer le montant des intérêts perçus en fin d'année. Taux 8,5 % l'an.

1.9 - À quel taux trimestriel a été placé un capital de 12 000 dh qui en 120 jours a apporté un intérêt de 300dh ?

Mathématiques Financières

1.10 - Pour un dépôt sur un livret de caisse d'épargne la date de valeur est le 1er ou le 16 qui suit la date de l'opération. Pour chaque retrait, la date de valeur est le 1er ou le 16 qui précède la date de l'opération.
Un particulier a effectué les opérations suivantes :
- 24 décembre 2005 : ouverture du livret avec un versement de 20 000 dh
- 18 janvier 2006 : versement de 9 000 dh
- 8 mars 2006 : retrait de 4 000 dh
- 25 mars 2006 : retrait de 13 500 dh
- 17 mai 2006 : versement de 5 000 dh
Le taux d'intérêt est de 8,5 % jusqu'au 1er avril 2006 et de 9 % ensuite.
Calculer l'intérêt de ce compte au prorata-temporis par quinzaines. Clôture du compte le 1er juillet 2006.

1.11 - Le bordereau du compte courant et d'intérêt de Mr ERRAMI contient les renseignements suivants :
- Période du 1/01/06 au 31/01/06.
- Taux débiteur 12 %
- Taux créditeur 8 %
- Méthode hambourgeoise ordonnée par date de valeur croissante :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Libellés</th>
<th>Montant en dh</th>
<th>Date d'opération</th>
<th>Date de valeur</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Solde créditeur précédent</td>
<td>20 000</td>
<td>01/01</td>
<td>31/12</td>
</tr>
<tr>
<td>Chèque CCEMA</td>
<td>18 000</td>
<td>05/01</td>
<td>03/01</td>
</tr>
<tr>
<td>Virement Lydeo</td>
<td>4 000</td>
<td>11/01</td>
<td>09/01</td>
</tr>
<tr>
<td>Chèque IBENA</td>
<td>13 000</td>
<td>20/01</td>
<td>18/01</td>
</tr>
<tr>
<td>Effet à l'encaissement</td>
<td>18 000</td>
<td>24/01</td>
<td>26/01</td>
</tr>
<tr>
<td>Dépôt espèces</td>
<td>2 500</td>
<td>27/01</td>
<td>28/01</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Les chèques sont des règlements à des fournisseurs.

Établir par la méthode hambourgeoise le bordereau de ce compte et déterminer le solde au 31/01/2006.
2 Escompte commercial
Equivalence de capitaux à intérêts simples

2.1- L'effet de commerce

Un effet de commerce est un instrument de crédit. Il représente une dette à payer. L'effet de commerce prend la forme :
• D'une traite ou lettre de change s'il est rédigé par le créancier, (le fournisseur ou le tireur).
• D'un billet à ordre s'il est rédigé par le débiteur (le client ou le tireur).
Dans un effet de commerce :
• La valeur nominale est le montant inscrit sur l'effet,
• La date d'échéance est le jour convenu pour le paiement de la dette.
• La durée est le nombre de mois ou de jours entre la date d'émission de l'effet et sa date d'échéance.
Le bénéficiaire d'un effet de commerce peut le vendre avant son échéance. On dit qu'il négocie l'effet (la traite par exemple) avant son encaissement normal. Cette opération est appelée l'escompte.

2.2- L'escompte commercial

L'escompte commercial d'un effet est une opération bancaire qui consiste à payer au bénéficiaire d'un effet la valeur escomptée de l'effet contre sa valeur nominale avant l'échéance. Bien entendu la valeur escomptée est inférieure à la valeur nominale. La différence porte le nom de l'escompte.
Définition

L'escompte est l'intérêt retenu par la banque sur la valeur nominale de l'effet pendant le temps qui s'écoule depuis le jour de la remise à l'escompte jusqu'au jour de l'échéance.

Si

- C : la valeur nominale de l'effet ;
- t : le taux de l'escompte ;
- J : le nombre de jours (durée de l'escompte) ;
- VE : la valeur escomptée j jour avant l'échéance ;
- E : le montant de l'escompte.

Alors :

\[ E = \frac{C \times t \times i}{36000} \]

\[ VE = C - E \quad \text{Ou encore} \quad VE = C - \frac{C \times t}{36000} \]

\[ VE = C \left(1 - \frac{t}{36000} \right) \]

Exemple

Un fournisseur négocie le 3 mai une traite d'un montant de 22 500 dh dont l'échéance est le 18 juillet de la même année. La banque escompte la traite à un taux de 12 %. Quel est le montant de l'escompte ?

<table>
<thead>
<tr>
<th>Date de négociation</th>
<th>Date d'échéance</th>
<th>Taux 12 %</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3 mai</td>
<td>18 juillet</td>
<td>76 jours</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Escompte = \[\frac{22500 \times 12 \times 76}{36000} = 570 \text{ dh} \]

Valeur escomptée = 22 500 - 570 = 21 930 dh

La valeur escomptée est appelée aussi la valeur actuelle. Dans l'exemple précédent : 21 930 dh est la valeur actuelle de la traite au 3 mai, c'est-à-dire 76 jours avant son échéance.

2.3 - Pratique de l'escompte

Dans la pratique, la remise d'un effet à l'escompte entraîne des frais financiers, en plus de l'escompte proprement dit. Ces frais comprennent plusieurs commissions.

L'ensemble de l'escompte et des commissions s'appelle l'agio. D'une manière générale l'agio se compose de :
- L'escompte ;
- Diverses commissions ;
- La taxe sur la valeur ajoutée (TVA).

L'agio varie selon le temps et le pays.

En France, par exemple, les commissions sont de trois catégories :
- Les commissions d'endossement : se calcule au prorata-temporis à la valeur nominale. Elle est destinée à couvrir les frais d'endossement des effets.
- Les commissions indépendantes de la valeur nominale de l'effet mais proportionnelles au temps.
- Les commissions fixes, généralement, forfaitaires par effet. Il s'agit des commissions de services.

La TAF 18,6 % (taxe sur les activités financières) vient s'ajouter à l'ensemble de l'escompte et diverses commissions. Elle est calculée en tenant compte du montant total de l'agio à l'exception de l'escompte, de la commission d'endossement et des commissions fixes.

L'ensemble de ces commissions est fréquemment remplacé par une seule commission forfaitaire, variable selon les banques.

Au Maroc la TVA est de 10 %. Elle est appliquée directement sur l'ensemble de l'agio (hors taxes) qui se compose, le plus souvent de :

- L'escompte proprement dit ;
- Des commissions d'acceptation et de courrier qui sont fixes et par bordereau d'escompte.
1) Il est à noter que la durée réelle de l'escompte est parfois majorée d'un ou plusieurs jours (appelés couramment jours de banque).

2) La TVA versée par le vendeur de la traite est déductible du montant de la TVA qu'il devra verser à l'État.

**Exemple**

Soit un effet de commerce d'un montant de 35 500 dh échéant le 27 juillet 2006 et escompté le 10 avril de la même année aux conditions suivantes :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Au Maroc</th>
<th>En France</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Taux d'escompte de 13 %</td>
<td>Taux d'escompte de 12,8 %</td>
</tr>
<tr>
<td>Commission de manipulation 2 dh par effet.</td>
<td>Commission d'endossement 0,4 %</td>
</tr>
<tr>
<td>TVA 10 %</td>
<td>Commission fixe 5 dh</td>
</tr>
<tr>
<td>Tenir compte d'un jour de banque</td>
<td>Commission indépendante du temps 0,3%</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>TAF 18,6 %</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Tenir compte de 2 jours de banque</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>Au Maroc</th>
<th>En France</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Nombre de jours 108 + 1 = 109 jours</td>
<td>Nombre de jours 108 + 2 = 110 jours</td>
</tr>
<tr>
<td>Escompte 35 500 x 109 x 13 = 1 397,32 36 000</td>
<td>Escompte 35 500 x 110 x 12,8 = 1 388,45 36 000</td>
</tr>
<tr>
<td>Commission de manipulation = 2</td>
<td>Commission de manipulation 35 500 x 0,4 x 110 = 43,39 36 000</td>
</tr>
<tr>
<td>Total hors taxes = 1 399,32</td>
<td>Commission de service = 5</td>
</tr>
<tr>
<td>TVA 10 % = 139,94</td>
<td>Commission indépendante du temps</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>35 500 x 0,3 = 10,65 1 000</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Agio (T.T.C) 1539,26

**2.4 - Valeur nette**

La valeur nette est la somme effectivement mise à la disposition du vendeur de l'effet de commerce avant son échéance.

\[
\text{Valeur nette} = \text{Valeur nominale} - \text{Agio (T.T.C)}
\]

**Exemple**

Reprenons l'exemple de l'effet de l'opération précédente

Valeur nette (Au Maroc) = 35 500 - 1 529,26 = 33 960,74 dh
Valeur nette (En France) = 35 500 - 1 450,41 = 34 049,59 dh

**2.5 - Taux relatifs à l'opération d'escompte**

Si l'on tient compte dans une opération d'escompte, de l'ensemble des éléments de l'agio à savoir :

- Le taux d'escompte
- L'ensemble des commissions
- La TVA
- Les jours de banques

Le taux d'escompte réellement pratiqué par la banque se trouve donc majoré dans d'importantes proportions.

L'étude approfondie des conditions d'escompte, plus particulièrement du bordereau d'escompte, permet de déterminer :

1) **Le taux réel d'escompte**

C'est le taux d'opération en elle-même, il est calculé en tenant compte du montant total de l'agio supporté par l'entreprise et de la durée réelle de l'escompte.

Si \( t_r \) est le taux réel alors :

\[
\frac{\text{Agio (T.T.C)} \times 36 000}{\text{Valeur nominale} \times \text{Durée réelle}}
\]
2) Le taux de revient

C'est le taux de revient pour l'entreprise. Il dépend de la valeur effectivement prêtée (valeur nette), de l'agio global et de la durée réelle.
Si te est le taux de revient alors :

\[
te = \frac{\text{Agio} \times 36 000}{\text{Valeur nette} \times \text{Durée réelle}}
\]

3) Le taux de placement

C'est le taux de placement pour la banque, il dépend de la somme effectivement prêtée par la banque et du gain effectif qui en résulte.
Si tpe est le taux de placement alors :

\[
tpe = \frac{(\text{Agio hors taxes} - \text{Commissions de services}) \times 36 000}{\text{Valeur nette} \times \text{Durée réelle}}
\]

**Exemple**

Reprendons les éléments de l'exemple précédent et calculons les différents taux.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Taux réel</th>
<th>Au Maroc</th>
<th>En France</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Taux réel</td>
<td>tr 1 539,26 x 36 000 = 14,46 %</td>
<td>tr 1 450,41 x 36 000 = 13,62 %</td>
</tr>
<tr>
<td>Taux de revient</td>
<td>te 1 539,26 x 36 000 = 15,11 %</td>
<td>te 1 450,41 x 36 000 = 14,2 %</td>
</tr>
<tr>
<td>Taux de placement</td>
<td>tpe 1 397,32 x 36 000 = 13,71 %</td>
<td>tpe 1 447,49 x 36 000 = 14,17 %</td>
</tr>
</tbody>
</table>

1) Si l'entreprise récupère la TVA, le taux de revient doit s'en ressentir car l'agio pris en compte, dans ce cas, est l'agio hors taxes.

2) Si la banque pense qu'elle engage des frais réellement supérieurs au montant des commissions de services, il faut tenir compte de ceci dans le calcul du taux de placement.

Mathématiques Financières

2.6 - Équivalence de capitaux à intérêts simples

**Principe général**

De même qu'un créancier peut céder un effet de commerce avant son échéance à une banque, un débiteur peut rembourser une dette avant terme ou repousser son échéance.
Puisque la valeur d'une dette (un capital) est inséparable de la date à laquelle elle est disponible, il suffit pour le créancier et le débiteur de s'entendre sur une date de paiement et sur un taux de calcul pour effectuer l'évaluation de la dette à une date précise.

**Notion de l'actualisation**

En intérêts simples, le problème de l'actualisation ou de l'évaluation d'une dette (d'un effet) se traduit de la manière suivante :

Soit, un capital d'un montant C disponible à la période 0

\[
\begin{align*}
C &= C_{t=0} \\
C &= C_{t=0} (1 + \text{intérêts})
\end{align*}
\]

On peut ainsi comparer des capitaux versés à des époques différentes, en calculant leurs valeurs actualisées à la même date. On peut donc évaluer un capital à une date quelconque en ajoutant l'intérêt ou en retranchant l'escompte.

2.6.1 - Équivalence de deux effets (ou de deux capitaux)

**Définition**

Deux effets (ou deux capitaux) sont équivalents à une date déterminée, si escomptés au même taux, ils ont la même valeur escomptée (valeur actuelle commerciale).
Cette date est la date d'équivalence.
Si $\mathbb{C}_1$ et $\mathbb{C}_2$ : valeurs nominales
$j_1$ et $j_2$ : durées d’escompte en jours
$t$ : taux d’escompte
$\mathbb{V}E_1$ et $\mathbb{V}E_2$ : valeurs actuelles

Alors :
$\mathbb{V}E_1 = \mathbb{V}E_2 \iff \frac{\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_1 t_1}{36000} = \frac{\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_2 t_2}{36000}$

**Exemple**

Un commerçant souhaite remplacer le 15 mai un effet de 10 000 dh arrivant à échéance le 24 juin, par un autre échéant le 14 juillet. Déterminer la valeur de l’effet de remplacement, le taux annuel d’intérêt est de 13 %.

Utilisons un graphique pour mettre en évidence la date d’équivalence.

<table>
<thead>
<tr>
<th>60 jours</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>40 jours</td>
</tr>
<tr>
<td>10 000</td>
</tr>
<tr>
<td>15 mai</td>
</tr>
<tr>
<td>24 juin</td>
</tr>
<tr>
<td>14 juillet</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Date d’équivalence

Ecrivons l’équivalence des deux effets au 15 mai

\[
\begin{align*}
10 000 - 10 000 \times 0.13 \times 40 &= \frac{\mathbb{C}_1}{36000} - \frac{\mathbb{C}_1 \times 0.13 \times 60}{36000} \\
9 855.56 &= \frac{\mathbb{C}(1 - 0.13 \times 60/360)}{36000} \\
\mathbb{C} &= 10 073.81 \text{ dh}
\end{align*}
\]

1) On peut utiliser la formule des nombres et déivateurs fixes dans l’actualisation, ce qui nous donne : 

2) La date d’équivalence est antérieure à la date d’échéance des deux effets. Elle doit être postérieure à la date de création des deux effets.

3) À intérêts simples, la date d’équivalence quant elle existe est unique ; si deux effets de valeurs nominales différentes sont équivalents à une date donnée, l’équivalence ne peut avoir lieu qu’à cette date.

**2.6.2-Problèmes relatifs à l’équivalence de deux effets**

Nous avons vu qu’à partir du principe fondamental de l’actualisation, nous pouvons établir, à la date d’équivalence (de référence), une équation d’équivalence qui peut solutionner les différents problèmes posés. En effet, dans la pratique, la notion d’équivalence est utilisée pour remplacer un effet par un autre d’échéance différente.

Le problème se ramène donc à déterminer le montant où l’échéance de l’effet de remplacement.

À partir de l’équation de base :

\[
\begin{align*}
\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_1 t_1 &= \mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_2 t_2 \\
\frac{36 000}{t} &= \frac{36 000}{t}
\end{align*}
\]

On peut calculer :

a) La valeur nominale de l’effet équivalent (exemple précédent);

b) L’échéance de l’effet équivalent ;

c) La date d’équivalence ;

d) Le taux d’équivalence.

**Exemple 1 : Détermination de l’échéance de l’effet équivalent**

Un débiteur désir remplacer un effet de valeur nominale 75 000 dh qu’il doit payer dans 60 jours par un autre effet de valeur nominale 74 600 dh.

...
2.6.3-Equivalence de plusieurs effets : l'échéance commune

L'échéance commune est le cas de remplacement de plusieurs capitaux (ou effets) par un seul capital (effet).
L'échéance commune est l'échéance d'un effet unique qui, à la date d'équivalence, a une valeur actuelle égale à la somme des valeurs actualisées des effets remplacés.

Exemple

On souhaite remplacer le 15 juin, les trois effets ci-dessous par un effet unique.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Effet</th>
<th>Valeur nominale</th>
<th>Échéance</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>E1</td>
<td>5 000</td>
<td>20 août</td>
</tr>
<tr>
<td>E2</td>
<td>4 000</td>
<td>15 juillet</td>
</tr>
<tr>
<td>E3</td>
<td>12 00</td>
<td>20 septembre</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Quelle est l'échéance de l'effet de 21 200dh remplaçant les effets E1, E2 et E3, avec un taux d'escompte de 13 % ?

Soit \(j\) le nombre de jours séparant la date d'équivalence (15 juin) de l'échéance de l'effet unique (l'échéance commune). Au 15 juin, on peut écrire l'égalité entre la valeur actuelle de l'effet unique et la somme des valeurs actuelles des effets à remplacer.

\[
21 200 - 21 200 \times j \times 13 = 4 000 - 4 000 \times 30 \times 13 + 5 000 - 5 000 \times 66 \times 13
\]

\[
\begin{align*}
&= 4 000 - 4 000 \\ &+ 12 000 - 12 000 \\ &+ 3 956,67 + 4 880,38 + 11 579,67 \\
&= 102,257 \text{ soit : 103 jours}
\end{align*}
\]

L'échéance commune, dans ces conditions, se situerait vers le 15 juin + 103 jours soit le 26 septembre de la même année.
A l'intérêt simple, l'échéance commune dépend de la date d'équivalence.

**Cas particulier : l'échéance moyenne**

L'échéance moyenne de plusieurs effets est un cas particulier de l'échéance commune. On l'obtient, quand le nominal de l'effet unique est égal à la somme des valeurs nominales des différents effets remplacés.

**Exemple**

Repreons l'exemple précédent avec un effet unique de valeur nominale 21 000 dh (4 000 + 5 000 + 12 000).

Calculons l'échéance moyenne à partir de l'équation d'équivalence au 15 juin.

Au 15 juin l'équivalence s'écrit :

\[ 21 000 - 21 000 \cdot j \cdot 13 \cdot 36 000 = 3 956,67 + 4 880,83 + 11 579,67 \]

\[ 21 000 \cdot j \cdot 7,5833 = 20 417,17 \]

\[ j = 76,85 \text{ soit } 77 \text{ jours} \]

L'échéance moyenne est donc le 15 juin + 77 jours soit le 31 août de la même année.

Si on veut déterminer l'échéance moyenne à partir d'une autre date d'équivalence : le 2 juillet par exemple :

Au 2 juillet, on a :

\[ 21 000 - 21 000 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 36 000 = 4 000 - 4 000 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 36 000 + 5 000 - 5 000 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 13 \cdot 36 000 + 12 000 - 12 000 \cdot 2 \cdot 80 \cdot 13 \cdot 36 000 \]

\[ 21 000 \cdot j = 3 981,22 + 4 911,53 + 11 653,33 \]

\[ j = 59,85 \text{ Soit } 60 \text{ jours après le 2 juillet, cad le 31 août} \]

L'échéance moyenne est donc 58 jours après le 2 juillet, soit le 31 août de la même année.

On vérifier que l'échéance moyenne est indépendante de la date d'équivalence.
Mathématiques Financières

Aux conditions suivantes :
- Taux d'escompte : 12,60 %;
- Jours minimum : 10 jours ;
- Un jour de banque supplémentaire, si le minimum de jours est dépassé ;
- Commission de service : 2 dh par effet ;
- TVA : 10 %
(Arrondir les intérêts au centime supérieur).

2.7 - Un particulier remplace deux effets 15 000 dh échéant le 15 août 2005 et 30 500 dh échéant le 15 décembre 1994 par un effet de 45 931,01 dh échéant le 30 novembre 2005. Quel est le taux annuel d'actualisation ?


2.9 - Un individu souhaite remplacer le 1er mai les 3 effets suivants par un effet unique équivalent échéant le 12 juin. Le taux annuel d'intérêt simple est de 11%.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Effet n°</th>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>3</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Valeurs nominales</td>
<td>5500</td>
<td>12000</td>
<td>7000</td>
</tr>
<tr>
<td>Échéances</td>
<td>15 juin</td>
<td>13 août</td>
<td>27 juillet</td>
</tr>
</tbody>
</table>

a) Quel est le montant de cet effet unique ?
b) Dans les mêmes conditions, calculer l'échéance commune de l'effet unique si son montant s'élevait à 24 600 dh.
c) Quelle serait l'échéance moyenne de ces 3 effets ?

2.10 - Un commerçant désire remplacer deux effets :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Valeurs nominales</th>
<th>40 000 dh</th>
<th>X dh</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Échéances</td>
<td>15 juin</td>
<td>20 juillet</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Le 19 mai par un effet unique de 65 219,09 dh. Leurs échéances commune se situe le 8 juillet.

Mathématiques Financières

a) Calculer la valeur nominale du second effet, si le taux d'escompte simple est de 12,5 %.
b) Quelle est l'échéance moyenne de ces 2 effets ?

2.11 - Le 5 mars 2005 vous achetez un fonds de commerce pour 300 000 dh et le vendeur vous demande de régler en 3 versements :
→ 50 000 dh immédiatement ;
→ 160 000 dh dans 90 jours et le reste dans 6 mois.
a) Cependant, vous préférez payer le montant global en une seule fois. A quelle date devriez-vous régler les 300 000 dh pour que votre proposition et la sienne soit équivalentes ?
b) Vous préférez payer en 3 versements égaux de 100 000 dh. Quelle sera l'échéance du 3ème effet, si le 1er est payable immédiatement et le second dans 2 mois. Les calculs sont faits à un taux d'escompte 13 %.

2.12 - Un individu détient de son client 2 lettres de change 20 000 dh payable le 15 juillet et 50 000 dh à échéance le 3 août.
Le 15 mai, le créancier, lui propose le paiement suivant 4 versements égaux de 17 600 dh chacun le premier ayant lieu le 22 juin, le 2ème le 15 septembre, le 3ème le 22 octobre.
Quelle serait l'échéance du 4ème versement pour que les 2 modes de paiements soient équivalents, sachant que le taux d'escompte est de 12 % ?

2.13 - Une personne achète une automobile pour 120 000 dh. Elle donne en paiement un billet à 6 mois daté du 20 juin portant intérêts simples à 12 % jusqu'à l'échéance. Le vendeur propose le règlement suivant :
* 50 000 dh dans 6 mois ;
* 20 000 dh dans 8 mois ;
* Le reste en 3 trimestrialités constantes la première est payable dans 3 mois après le second paiement.
a) Quelle est la valeur définitive de l'automobile ?
b) Quelle serait la trimesrialité à payer pour que l'équivalence des 2 modes de paiement soit maintenue à l'échéance du billet ? Taux d'intérêt simple convenu entre les deux parties est de 11 % ?
3 Les intérêts composés

Le système des intérêts composés est utilisé pour les opérations financières à long terme (plus d'un an).

3.1 – Principe de base

Soit un capital de 10 000 dh placé à intérêts composés au taux annuel de 7 % pour une durée de 3 ans.

La première année l'intérêt simple est :
\[ 10000 \times \frac{7}{100} = 700 \text{ dh.} \]

À la fin de la première année, l'intérêt est ajouté au capital :
\[ 10000 + 700 = 10700 \text{ dh.} \]

On obtient ainsi un nouveau capital qui produit à son tour un intérêt simple pendant la 2\textsuperscript{ème} période :
\[ 10700 \times \frac{7}{100} = 749 \text{ dh.} \]

À la fin de la 2\textsuperscript{ème} année, le nouveau capital est :
\[ 10700 + 749 = 11449 \text{ dh.} \]

À la fin de la 3\textsuperscript{ème} année l'intérêt simple est :
\[ 11449 \times \frac{7}{100} = 801,43 \text{ dh.} \]

Ainsi le capital de 10 000 dh a rapporté un intérêt composé de :
\[ 749 + 801,43 = 2250,43 \text{ dh.} \]
1) À intérêt simple la somme de 10 000 dh aurait rapporté un intérêt de : 10 000 x 3 x 7/10 = 2 100 dh.
2) En intérêts composés, les intérêts sont ajoutés au capital. On dit qu’ils sont capitalisés à la fin de chaque période.
3) La capitalisation des intérêts est généralement annuelle mais elle peut être semestrielle, trimestrielle ou mensuelle.

Définition
Un capital est placé à intérêts composés. Lorsque à la fin de chaque période de placement, l’intérêt simple de cette période est ajouté au capital initial pour produire un intérêt simple à son tour pendant la période suivante.

3.2 - Valeur acquise à intérêts composés

3.2.1 - Le temps de placement est un nombre entier de périodes

Désignons par $C_0$ le capital initial, par $n$ le nombre de périodes, par $i$ le taux, par dirham et par période et par $C_n$ le capital définitif acqué au la fin de la $n^{ème}$ période.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>Capital placé en début de période $C_i = C_0 (1+i)^i$</th>
<th>Intérêts payés à la fin de chaque période $C_n = C_0 (1+i)^n$</th>
<th>Valeur acquise en fin de période $C_n = C_0 (1+i)^n$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>$C_1 = C_0 (1+i)$</td>
<td>$C_0 (1+i)^1$</td>
<td>$C_0 + C_0 (1+i)$</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>$C_2 = C_0 (1+i)^2$</td>
<td>$C_0 (1+i)^2$</td>
<td>$C_0 + C_0 (1+i)^2 + C_0 (1+i)$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Les valeurs acquises constituent une progression géométrique dont le premier terme est $C_0 (1+i)$ la raison est $(1+i)$, par conséquent la valeur acquise à la fin de la $n^{ème}$ période est :

$n$ | $C_n = C_0 (1+i)^n$ |
<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th></th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>$C_1 = C_0 (1+i)$</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>$C_2 = C_0 (1+i)^2$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

La formule générale de la valeur acquise à intérêts composés est :

$C_n = C_0 (1+i)^n$

Exemples

1) Reprenons l’exemple précédent d’un capital de 10 000 dh placé pendant 3 ans à intérêts composés au taux annuels de 7%.

<table>
<thead>
<tr>
<th>10 000</th>
<th>10 000 (1,07)^3 = 12 250,43 dh</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0</td>
<td>C3</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

$C_3 = 10 000 (1,07)^3 = 10 000 x 1,225043$

2) Quelle est au bout de 7 semestres, la valeur acquise par un capital de 15 000 dh placé à intérêts composés au taux semestriel de 3,25% ?

<table>
<thead>
<tr>
<th>15 000</th>
<th>15 000 (1,0325)^7 = 15 000 x 1,250923</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0</td>
<td>C7</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

La formule générale de la valeur acquise à intérêts composés est :

1) Le calcul de la valeur acquise peut se faire :
   - directement à l’aide de calculatrice
   - ou par les tables financières : la table financières n° 1 (TF1) donne directement les valeurs acquises pour 1 dirham placé.

2) Dans les tables financières, il y a toujours concordance entre les taux et les périodes considérées.

$n \rightarrow$ est en années si $i$ est un taux annuel.
2) Solution commerciale

Dans la pratique, on généralise la formule des intérêts composés au cas où n est pas un nombre entier de périodes.

\[ C_n = C_0 (1+i)^n \]

Ainsi, la solution commerciale est :

\[ C_{5+3/12} = 12\,000 \times (1.075)^{5+3/12} \]
\[ = 12\,000 \times (1.075)^{5/12} \]
\[ = 12\,000 \times (1.075)^{7/12} \]
\[ = 17\,541.86\,dh \]

1) On peut utiliser les tables financières pour le calcul

\[ C_{5+3/12} = \frac{12\,000}{12\,000} \times (1+0.075)^{5/12} \]
\[ = 12\,000 \times 1.435629 \times 1.018245 \]
\[ = 17\,541.86\,dh \]

2) La solution commerciale est inférieure à la solution rationnelle. On adopte toujours la solution commerciale sauf indication contraire.

3) La solution commerciale est en fait basée sur les taux équivalents qui sont différents des taux proportionnels.

3.3 - Taux proportionnels et taux équivalents

3.3.1 Taux proportionnels

Deux taux sont proportionnels lorsque leur rapport est égal au rapport des durées de leurs périodes respectives.

Au taux annuel de 10 %, par exemple, correspond le taux semestriel proportionnel de 5 % et le taux trimestriel proportionnel de 2.5 %.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Taux en %</th>
<th>Durée en mois</th>
<th>Rapport</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>10/5</td>
<td>12/6</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td>et</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>10/2,5</td>
<td>12/3</td>
<td>4</td>
</tr>
</tbody>
</table>
En intérêt simples deux taux proportionnels produisent sur un même capital les mêmes intérêts au bout du même temps.

**Exemple**

Calculons l'intérêt simple produit par un capital de 10 000 dh placé pendant un an au taux annuel de 10 %.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période de placement</th>
<th>Taux</th>
<th>Valeur acquise</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1 année</td>
<td>10 %</td>
<td>10 000 (\times 0,1) = 10 000 dh</td>
</tr>
<tr>
<td>2 semestres</td>
<td>5 %</td>
<td>10 000 (\times 0,05 \times 2) = 10 000 dh</td>
</tr>
<tr>
<td>4 trimestres</td>
<td>2,5 %</td>
<td>10 000 (\times 0,025 \times 4) = 10 000 dh</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Dans tous les cas, la valeur acquise est la même, une fois que l'on utilise les taux proportionnels. Il n'en est pas de même dans le système des intérêts composés. Reprenons le même exemple dans le système des intérêts composés.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période de placement</th>
<th>Taux</th>
<th>Valeur acquise</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1 année</td>
<td>10 %</td>
<td>10 000 ((1,1)^{\frac{1}{4}}) = 11 000 dh</td>
</tr>
<tr>
<td>2 semestres</td>
<td>5 %</td>
<td>10 000 ((1,05)^{\frac{1}{2}}) = 11 025 dh</td>
</tr>
<tr>
<td>4 trimestres</td>
<td>2,5 %</td>
<td>10 000 ((1,025)^{\frac{1}{4}}) = 11 038,13 dh</td>
</tr>
</tbody>
</table>

En intérêts composés et à taux proportionnels les valeurs acquises par un même capital pendant la même période augmentent quand les périodes de capitalisation deviennent plus petites. D'où l'utilisation des taux équivalents.

### 3.3.2 Taux équivalents

Deux taux sont équivalents lorsque, à intérêts composés, ils aboutissent pour un même capital, à la même valeur acquise pendant la même durée de placement.

Reprenez l'exemple précédent

Le capital est de 10 000 dh ;
Le taux est de 10 % ;
La durée est d'une année.

Au bout d'une année la valeur acquise est :

\[ 10 000 \times (1,1)^{1} = 11 000 dh \]

Si \( i_{s} \) est le taux semestriel équivalent alors,

\[ 10 000 \times (1 + i_{s})^{2} = 10 000 \times (1,1)^{1} \]

\[ (1 + i_{s}) = 1,1^{\frac{1}{2}}, \]

\[ i_{s} = (1,1)^{\frac{1}{2}} - 1 \]

\[ i_{s} = 0,04878088 \]

Soit : \( ts = 4,88 \% \)

Ainsi, 4,88 % est le taux semestriel équivalent au taux annuel de 10 %. De la même manière, on peut calculer le taux trimestriel équivalent. Si \( i_{t} \) est le taux trimestriel équivalent au taux annuel 10 % alors :

\[ (1 + i_{t})^{\frac{1}{4}} = (1,1) \]

\[ i_{t} = (1,1)^{\frac{1}{4}} - 1 \]

\[ i_{t} = 0,02413 \]

4 trimestres

Soit un taux trimestriel de 2,41 %

On peut également retrouver \( i_{m} \) : le taux mensuel équivalent comme suit :

\[ (1 + i_{m})^{\frac{1}{12}} = (1,1) \]

\[ i_{m} = (1 + 10\%)^{\frac{1}{12}} - 1 \]

\[ i_{m} = 0,0079741 \]

Soit un taux mensuel équivalent de 0,797 %

**Généralisation.**

Soit deux placements définis respectivement par leur taux \( i_{1} \) et \( i_{2} \) et par leurs périodes \( p_{1} \) et \( p_{2} \) les placements sont effectués à taux équivalents s'ils aboutissent, pour un même capital, à la même valeur acquise.

Ce qui nous donne :

\[ C(1 + i_{1})^{p_{1}} = C(1 + i_{2})^{p_{2}} \]

\[ i_{1} = (1 + i_{2})^{\frac{p_{2}}{p_{1}}} - 1 \]

et

\[ i_{2} = (1 + i_{1})^{\frac{p_{1}}{p_{2}}} - 1 \]
Exemples

1) Quel est le taux semestriel équivalent au taux annuel de 9 % ?
Si \( i_s \) est le taux semestriel équivalent alors :
\[
(1 + i_s)^2 = 1.09 
\]
\( i_s = (1.09)^{1/2} - 1 \)
\( i_s = 0.0440307 \)
le taux semestriel est 4,4 %

2) Quel est le taux trimestriel équivalent à un taux annuel de 9% ?
Si \( i_t \) est le taux recherché alors :
\[
(1 + i_t)^4 = 1.09 
\]
\( i_t = (1.09)^{1/4} - 1 \)
\( i_t = 0.0217782 \)
le taux trimestriel est 2,18 %

3) Quel est le taux mensuel équivalent à un taux semestriel de 6% ?
Si \( i_m \) est le taux recherché alors :
\[
(1 + i_m)^6 = 1.06 
\]
\( i_m = (1.06)^{1/6} - 1 \)
\( i_m = 0.0097588 \)
le taux mensuel est 0,975 %

## 3.4 - Valeur actuelle à intérêts composés

La valeur actuelle, au taux \( i \) par période, d'une somme \( C_n \) payable dans \( n \) périodes est la somme \( C_0 \) qui placée actuellement, à intérêts composés, pendant \( n \) périodes au taux \( i \) donnerait la valeur \( C_p \).

\[
C_0 = \frac{C_n}{(1 + i)^n}
\]

Exemple

Quelle somme faut-il placer maintenant à intérêts composés, au taux annuel de 7 %, pour obtenir dans 4 ans une valeur définitive de 25 000 dh?

\[
25 000 = C_0 (1.07)^4
\]
\[
C_0 = 25 000(1.07)^{-4}
\]

Soit par le calcul
\( C_0 = 19 072.38 \) dh

Soit en utilisant la table financière n° 2 qui donne directement les valeurs actuelles pour 1 dh. La valeur \( (1.07)^4 \) se trouve à l'intersection de la colonne 7 % et de la ligne 4.
\[
C_0 = 25 000 \times 0.762 895
\]
\[
C_0 = 19 072.38 \) dh

La recherche de la valeur actuelle repose sur le principe de l'actualisation à partir des taux équivalents.

## 3.5 - Évaluation d'un capital à une date donnée

Un capital \( C_p \) payable à l'époque \( p \) peut être facilement évalué à n'importe quelle autre date.
3.6 - Applications de la formule fondamentale

A partir de la formule fondamentale
\[ C_n = C_0 (1 + i)^n \]
On peut retrouver :
→ La valeur acquise \( C_n \);
→ La valeur actuelle \( C_0 \);
→ Le taux de placement \( i \);
→ Le nombre de périodes \( n \).

Les calculs sont effectués à partir de l'équation de la valeur acquise ou de la valeur actuelle. On peut, soit utiliser directement les fonctions logarithmiques et exponentielles des calculatrices, soit rechercher les valeurs à l'aide des tables financières.

Exemples et utilisation des tables financières

1) Une somme de 120 000 dh est placée pour 7 ans au taux annuel 9 %. Quelle valeur récupère-t-on à la fin de ce placement?
La valeur acquise par ce capital est :
\[ C_7 = 120 000 (1,09)^7 = 120 000 \times 1,428039 \]
\[ C_7 = 219 364,68 \quad \text{Table financière 1} \]

2) Une personne souhaite disposer d'ici 4 ans d'une somme de 200 000 dh. Elle place à cet effet, en une seule fois, aujourd'hui, une somme dont on demande le montant. Taux d'intérêts composés 7,5 % l'année.
La valeur actuelle \( C_0 \) de cette somme est :
\[ C_0 = \frac{200 000}{(1,075)^4} = 200 000 \times 0,748809 \]
\[ C_0 = 149 760 \quad \text{Table financière 2} \]

3- Une somme de 125 000 dh a été placée pour 3 ans à un taux trimestriel \( i_p \). A la fin du placement, cette somme est devenu 153 636,92 dh. Déterminer le taux trimestriel de ce placement.

En 3 ans, il y a \( 3 \times 4 = 12 \) semestres.
Si \( i_p \) et le taux trimestriel inconnu, alors :
125 000 \( (1 + i_s)^6 = 153 \ 656,92 \)
\( (1 + i_s)^6 = 1,229 \ 255 \)
\( i_s = (1,229 \ 255)^{1/6} - 1 \)
\( i_s = 0,0349999 \) soit: \( t_s = 3,5 \% \)

Donc le placement a été effectué à un taux semestriel de 3,5 %.

4) Un capital de 100 000 dh est placé à intérêts composés au taux annuel de 8 %.
A la fin du placement la valeur acquise s'élève à 233 163,90 dh.

Quelle est la durée du placement ?

On sait que
\[ 100 000 \times (1,08)^n = 233 \ 163,90 \]
\[ (1,08)^n = 2,331639 \]

Dans la table financière n° 1, à l'intersection de la colonne 8 % et de la ligne 11 nous trouvons ce résultat. La période est 11 ans puisque la capitalisation est annuelle.

Directement par le calcul
\[ (1,08)^n = 2,331639 \]
\[ n = \frac{\text{Log} \ 2,331639}{\text{Log} \ (1,08)} \]
\[ n = 11 \] donc la période est 11 ans.

1) Pour effectuer le calcul, on peut utiliser les deux fonctions logarithmiques.
   * Le logarithme népérien
   * Le logarithme décimal

Toutefois, il faut garder la fonction utilisée du début jusqu'à la fin du calcul.

2) Si le calcul doit être effectué obligatoirement à l'aide de tables financières et si le taux ou la durée n'est pas dans les tables alors, on procède à une interpolation linéaire.

### 3.7 - Exercices

#### 3.1 - Compléter le tableau ci-dessous :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Durée</th>
<th>Taux</th>
<th>Capital (dh)</th>
<th>Valeur acquise (dh)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>....</td>
<td>7 % l'année</td>
<td>22 500</td>
<td>50 674,31</td>
</tr>
<tr>
<td>20 ans</td>
<td>3 % le trimestre</td>
<td>6 000</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>....</td>
<td>7,5 % l'année</td>
<td>17 000</td>
<td>20 004,05</td>
</tr>
<tr>
<td>5 ans 9 mois</td>
<td>....</td>
<td>20 000</td>
<td>29 807,23</td>
</tr>
</tbody>
</table>

#### 3.2 -

a) Quel est le taux semestriel équivalent au taux annuel de 11 % ?
b) Quel est le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 10,25 % ?
c) Quel est le taux mensuel équivalent au taux annuel de 12 % ?

#### 3.3 -
On place un capital de 15 000 dh pendant 4 ans au taux annuel de 9 %.
Calculer sa valeur acquise si la période de capitalisation est :
- Le semestre
- Le trimestre
1- En utilisant les taux proportionnels.
2- En utilisant les taux équivalents.

#### 3.4 -
Donner la valeur acquise par un capital de 160 000 dh au bout de 3 ans et
4 mois, à un taux annuel de 9,25 % ?
a) Utiliser la solution rationnelle.
b) Utiliser la solution commerciale.

#### 3.5 -
Calculer les valeurs actuelles des placements suivants :
* 22 000 dh payables dans 5 ans et 5 mois, taux 11 %, l'an.
* 15 000 dh payables dans 6 ans, taux 9,25 %, l'an.
* 18 000 dh payables dans 13 ans 2 trimestres et 2 mois à 9 % l'an.

#### 3.6 -
Un capital de 38 800 dh est payable le 31/12/05. Donner sa valeur au :
* le 31/12/98
* le 31/12/06
* le 31/12/95
* le 31/12/2011
taux d'intérêts composés annuel 9 %.
Mathématiques Financières

3.7 - Combien de temps faut-il pour qu'une somme placée à intérêts composés, au taux annuel de 7,5 %, soit doublée ?

3.8 - A quel taux annuel d'intérêts composés faut-il capitaliser un capital pour tripler sa valeur au bout de 9 ans ?

3.9 - Une personne place un capital de 300 000 dh au taux semestriel (i). Deux ans après, elle retire 100 000 dh. Deux ans après ce retrait, elle dispose d'un solde qui s'élève à 293 584,86 dh. Calculer le taux semestriel ? Donner également le taux annuel de ce placement ?

3.10 - Une personne doit encaisser le 31 décembre 2006 un capital de 1 500 000 dh. Le 31 décembre 1990, elle remplace la valeur de ce capital contre sa valeur actuelle du 31 décembre 1990, à intérêts composés au taux semestriel de 3,25 %. La somme ainsi obtenue est capitalisée immédiatement dans un compte rapportant 7,5 % annuellement.
1) Quelle est la valeur acquise du nouveau placement le 31 décembre 2006 ?
2) Déterminer à quelle date la personne obtiendra 1 500 000 dh. Préciser l'avantage d'une telle opération.

3.11 - Une personne effectue les placements suivants pendant 4 ans :
* 10 000 dh à 7 % ;
* 25 000 dh à 7,5 % ;
* 55 000 dh à 9 % .
1) Calculer la valeur acquise globale
2) Donner le taux de rendement moyen de ces placements.

3.12 - Un capital C est placé à intérêts composés pendant (n) années au taux annuel (i) Sa valeur acquise est 1 085 946,64 dh. S'il avait été placé pendant (n + 2) années, sa valeur acquise aurait été de 1 290 213,20 dh. S'il avait été placé pendant un an, sa valeur acquise aurait été de 545 000 dh.
Calculer :
* Le capital ;
* Le taux ;
* Et la durée.

3.13 - Une personne place 100 000 dh à un taux annuel de 10,5 % pendant 19 semestres avec capitalisation (bi - annuel) tous les deux ans. Calculer la valeur acquise.

Mathématiques Financières

3.14 - Une personne peut placer une somme d'argent suivant deux modalités de placement pendant (n) années.
* modalités A : 7,5 % par an à intérêts composés.
* modalités B : 9,3 % par an à intérêts simples.
1) Que doit-il choisir si n = 6 ?
2) Que doit-il choisir si n = 7 ?
3) Quelle est approximativement, la valeur de (n), pour laquelle les deux modalités sont équivalentes ?

3.15 - Soit un taux annuel (i) dont les taux semestriels proportionnel (t1) et équivalent (t2) vérifient la relation suivante : t1 - t2 = 0,06 %.
Calculer le taux annuel (i).
4 Equivalence à intérêts composés

L'équivalence à intérêts composés est appliquée à des opérations à moyen et long terme. On retrouve ici le même principe que l'équivalence de capitaux à intérêts simples.

4.1 - Equivalence de deux capitaux

Définition

Deux capitaux (ou effets) sont équivalents à intérêts composés à une date donnée, si escomptés à intérêts composés et au même taux, ils ont à cette date la même valeur actuelle.

Si $C_1$ et $C_2$ sont deux effets payables dans $n_1$ et $n_2$ périodes et escomptés à un taux $i$ par période.

\[ C_1(1+i)^{-n_1} = C_2(1+i)^{-n_2} \]

$C_1$ et $C_2$ sont équivalents si et seulement si :
Exemple

Un effet de 12 500 dh échéant dans 3 ans doit être remplacé par un autre échéant dans 7 ans. Calculer la valeur nominale C de l'effet de remplacement. Taux d'escompte 13%.

Le problème se traduit par le schéma suivant :

\[
\begin{array}{c}
0 & 3\text{ ans} & 3 & 7 \\
12\,500 & | & C & | \\
t = 13\% \\
\end{array}
\]

**Date d'équivalence**

À la date d'équivalence, l'égalité s'écrit :

\[12\,500\,(1,13)^3 = C\,(1,13)^7\]

Ce qui donne

\[C = 12\,500\,(1,13)^4\]

\[C = 20\,380,92\text{ dh}\]

À l'époque 0, les deux capitaux 12 500 dh et 20 380,92 dh ont la même valeur actuelle, à un taux d'escompte de 13%.

On peut vérifier de la manière suivante :

\[12\,500\,(1,13)^3 = 8\,663,13\text{ dh}\]

\[20\,380,92\,(1,13)^7 = 8\,663,13\text{ dh}\]

D'une manière générale, en matières d'intérêts composés, si deux capitaux sont équivalents à une date, ils sont équivalents à toute autre date. L'équivalence de capitaux à intérêts composés est indépendante de la date d'équivalence. Il suffit donc de choisir la date la plus favorable aux calculs.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent et modifiant la date d'équivalence.

\[
\begin{array}{c}
0 & 2\text{ ans} & 3 & 7 \\
12\,500 & | & C & | \\
t = 13\% \\
\end{array}
\]

**Date d'équivalence**

4.2 - Équivalence de plusieurs capitaux

Définition

Un capital est équivalent, à intérêts composés et à une date donnée, à un groupe de capitaux, si au même taux d'escompte, la valeur actuelle de ce capital est égale à la somme des valeurs actuelles de l'ensemble du groupe de capitaux.

Exemple

On souhaite remplacer les trois effets suivants :

- 12 000 dh dans 2 ans ;
- 18 000 dh dans 6 ans ;
- 15 000 dh dans 4 ans ;

Par un effet unique de nominal C payable dans 5 ans. Taux 11%.

Calculer la valeur nominale de ce capital.

À l'époque 0, l'égalité de l'équivalence est :

\[
\begin{array}{cccccc}
0 & 2 & 4 & 5 & 6 \\
12\,000 & 18\,000 & C & 15\,000 \\
& & & & 11\% \\
\end{array}
\]

**Date d'équivalence**

56
Mathématiques Financières

1) L'équivalence peut être vérifiée à n'importe quelle autre date.
2) L'effet signifie que, à un taux de 11 %, payer 49 905,19 dh dans 5 ans est équivalent à des versements successifs de :
   12 000 dh dans 2 ans ;
   18 000 dh dans 4 ans ;
   15 000 dh dans 6 ans.
3) On peut vérifier de la même manière l'équivalence entre deux groupes d'effets.

4.3 - Échéance commune et échéance moyenne

Il s'agit du problème de remplacement d'un groupe de capitaux (ou d'effets) par un seul capital.
*si la valeur nominale du capital unique est égale à la somme des valeurs nominales des capitaux remployés, il s'agit de l'échéance commune ou de l'échéance unique.
*si la valeur nominale du capital unique est égale à la somme des valeurs nominales des capitaux remployés, il s'agit de l'échéance moyenne.

Exemple

Un créancier accepte que son débiteur remplace trois dettes
12 000 dh dans 2 ans ;
20 000 dh dans 3 ans ;
35 000 dh dans 5 ans,
Par un versement unique de 70 800 dh, taux annuel d'escompte de 10,5 %.
Déterminer l'échéance de ce paiement.

Il s'agit d'une échéance commune puisque
70 800 = 15 000 + 20 000 + 35 000

Par un versement unique de 70 800 dh, taux annuel d'escompte de 10,5 %, déterminer l'échéance de ce paiement.

Date | Effet de 70 800 dh | Echéance commune X ?
-----|-------------------|------------------------
0 | 15 000            | 15 000                 |
1 | 20 000            | 15 000                 |
2 |                  |                        |
3 |                  |                        |
4 |                  |                        |
5 |                  |                        |

Si x est l'échéance du paiement unique, par rapport à l'époque 0, alors :
70 800 (1,105)² = 15 000 (1,105)² + 20 000 (1,105)³ + 35 000 (1,105)⁴

Par les logarithmes :

- x log (1,105) = log 0,682952
- x = - log 0,682952 / log (1,105)
- x = 3,819214 années

Le paiement unique de 70 800 dh sera effectué dans 3 ans 9 mois et 25 jours.

Cas de l'échéance moyenne

Il suffit de remplacer les trois effets par un seul dont la valeur nominale est égale à la somme des valeurs nominales des effets remployés :

Valeur nominale du capital unique :

= 15 000 + 20 000 + 35 000
= 70 000 dh

Exemple

Reprenons toujours 0 comme date d'équivalence.
Si x est l'échéance moyenne alors :
70 000 (1,105)² = 48 352,99
(1,105)² = 48 352,99/70 000
- x log (1,105) = log 0,690757
- x = - log 0,690 757 / log (1,105)
- x = 3,705403 années

La date de l'échéance moyenne est dans 3 ans 8 mois et 14 jours.

1) L'échéance moyenne est indépendante de la date d'équivalence.
2) La recherche de l'échéance moyenne peut se faire par une interpolation linéaire.

4.4 Utilité pratique de la notion d'équivalence

L'équivalence à intérêts composés est à la base de tous les calculs d'actualisation. Elle permet de remplacer un ou plusieurs effets par un ou
Mathématiques Financières

plusieurs autres effets équivalents et de déterminer les dates d'échéance des effets de remplacement. Partant de l'égalité entre les valeurs actuelles de deux effets, on peut calculer.
* la valeur nominale d'un capital ;
* la date d'échéance d'un capital ;
* le taux d'actualisation.

Exemple : Calcul du taux d'actualisation

Un débiteur remplace deux effets : 15 000 dh dans 3 ans et 13 000 dh dans 5 ans par un seul effet de 22 701,24 dh payable dans 2 ans. Quel est le taux retenu pour cet arrangement ?

<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th>0 %</th>
<th>1 %</th>
<th>2 %</th>
<th>3 %</th>
<th>4 %</th>
<th>5 %</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3 ans</td>
<td>22 701,24</td>
<td>15 000</td>
<td>13 000</td>
<td>t %</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Date d'équivalence</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

Choisissons l'année 2 comme date d'équivalence. Si (i) est le taux d'actualisation, alors l'égalité de l'équivalence s'écrit :

\[ 22 701,24 = 15 000 (1 + i)^3 + 13 000 (1 + i)^5 \]

Pour résoudre cette équation, procédons par des approximations successives :

- Essai à 10 % → 15 000 \((1,10)^3\) + 13 000\((1,10)^5\) = 23 403,46
- Essai à 11 % → 15 000 \((1,11)^3\) + 13 000\((1,11)^5\) = 23 019,00
- Essai à 12 % → 15 000 \((1,12)^3\) + 13 000\((1,12)^5\) = 22 646,00

Le taux est compris entre 11 % et 12 %.
Par une interpolation linéaire :

\[ \frac{23 019,00 - 22 646,00}{0,11 - 0,12} = \frac{i}{0,11 - 0,12} \]

\[ i = 0,11 + \frac{(0,11 - 0,12) \times 23 019,00}{23 403,46 - 22 646,00} \]

ce qui donne \( i = 0,118519 \) \( \text{le taux d'actualisation avoisine} \) 11,85 %.

4.5- Exercices

4.1 - Une personne souhaite remplacer les trois dettes suivantes :
- 10 200 dh payables dans 1 an 3 mois ;
- 15 000 dh payables dans 2 ans 7 mois ;
- 22 500 dh payables dans 4 ans 6 mois.

par un effet unique dans 3 ans.
Calculer le montant de ce paiement. Taux d'escompte annuel de 10,5 %.

4.2 - Un fournisseur accepte que son client remplace deux effets :
- 7 500 dh dans 3 ans ;
- 10 200 dh dans 4 ans.

par un versement unique de 15 615,62 dh.
Détecter l'échéance de ce paiement unique. Taux d'escompte 10 %.

4.3 - En raison des difficultés de trésorerie une entreprise souhaite remplacer trois réglements :
- 15 000 dh payables dans 1 an ;
- 20 000 dh payables dans 3 ans ;
- 13 000 dh payables dans 5 ans.

par un règlement unique dans 7 ans. Taux annuel de 13 %.

a) Calculer le montant du règlement unique ?
b) Calculer le montant du règlement unique, si celui-ci est prévu dans 2 ans et 5 mois ?
c) Quelle est l'échéance moyenne de ces trois traits ?

4.4 - Deux sœurs âgées de 8 ans et 11 ans héritent une somme de 450.000 dh. leurs parts respectives sont placées à intérêts composés à un taux annuel de 7,5 %.
Calculer ces deux parts de manière que les deux soeurs disposent du même capital à leur vingtième anniversaire.
Mathématiques Financières

4.5 - Un individu emprunte une somme de 60 000 dh qu'il rembourse en deux paiements, le premier de 30 000 dh dans un an, le second de 40 626 dh dans deux ans.

Quel est le taux de l'opération ?

4.6 - Un particulier emprunte 80 000 dh au taux annuel t. Calculer t dans le cas du remboursement suivant : le remboursement s'effectue en trois versements :
15 000 dh dans un an ;
40 000 dh dans 2 ans ;
47 000 dh dans 3 ans ; (le taux est voisin de 11 %).

4.7 - Un particulier doit régler trois dettes : 20 000 dh dans un an ; 25 000 dh dans 3 ans ; 30 000 dh dans 4 ans ; le taux d'intérêt est de 10,5 %.
1 - Ce particulier peut-il se libérer par un seul paiement de 75 500 dh ? de 75 000 dh ? de 74 500 dh ? A quel époque aurait lieu chacun de ces paiements ?
2 - Si le particulier désirerait se libérer au moyen de deux versements A et B, le premier étant égal au triple du second et payables respectivement dans 3 ans et 5 ans, quelles sommes débourserait-il ?

5. Les annuités

L'étude des annuités nous semble d'une importance capitale ; celles-ci permettent, en effet, de résoudre plusieurs problèmes relatifs :
• Aux emprunts (remboursement de crédits)
• Aux placements (constitution d'un capital retraite par exemple).
• À la rentabilité d'un investissement.

5.1 - Définition

→ On appelle annuités des sommes payables à intervalles de temps réguliers.
→ Dans le cas des annuités proprement dites les sommes sont versées (ou perçues) chaque année à la même date ; la période retenue est alors l'année. On peut cependant, effectuer des paiements semestriels, trimestriels ou mensuels, dans ces cas on parle de semestrialités, de trimestrielles ou de mensualités. Le versement d'annuités a pour objet, soit de rembourser une dette, soit de constituer un capital. En matière d'investissement les annuités correspondent à des flux financiers, il s'agit de gains nets pour l'investisseur, contenant à la fois l'amortissement, le revenu net d'impôt et les frais financiers.

5.2 - Annuités constantes de fin de période

Ici les sommes sont payables à la fin de chaque période, le début de la première période est appelé origine de la suite d'annuités, en outre ces sommes sont constantes.
5.2.1 - Valeur acquisée

A - Valeur acquisée au moment du dernier versement

Soient :
- $a$ : le montant de l'annuité constante
- $i$ : le taux d'intérêt correspondant à la période retenue
- $n$ : le nombre d'annuités

$A_n$ : Valeur acquisée au moment du versement de la dernière annuité.

La situation peut être résumée par le schéma suivant :

\[
\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 2 & \cdots & n \\
\hline
- & - & - & - & - \\
\end{array}
\]

$A_n$ apparaît comme étant la somme des valeurs acquisées par chacun des versements :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Versement</th>
<th>Valeur acquisée</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>$a(1+i)^{n-1}$</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>$a(1+i)^{n-2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\cdots$</td>
<td>$\cdots$</td>
</tr>
<tr>
<td>$n-2$</td>
<td>$a(1+i)^2$</td>
</tr>
<tr>
<td>$n-1$</td>
<td>$a(1+i)$</td>
</tr>
<tr>
<td>$n$</td>
<td>$a$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

D'où :

\[
A_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \cdots + a(1+i)^{n-1}
\]

\[
A_n = a \left[ 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1} \right]
\]

On sait que :

\[
1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{avec} \quad q \neq 1
\]

En posant $q = (1+i)$ on trouve :

\[
A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}
\]

Ou encore :

\[
A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}
\]

(formule de capitalisation)

\[\Rightarrow\]

1) On applique cette formule quand on se situe au moment du dernier versement.
2) Ici le nombre $n$ indique à la fois l'époque à laquelle on évalue la suite d'annuités, et le nombre de versements.

\[
A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{1}
\]

Indique l'époque $n$ à laquelle on évalue la suite

n indique le nombre d'annuités

\[\Rightarrow\]

Il ne faut jamais oublier que le nombre de versements est un nombre entier.

3) Le dernier versement ne rapporte pas d'intérêt et à ce titre la formule qu'on a fait apparaître ne permet pas de résoudre directement les problèmes se rapportant à la constitution de capitaux. Il s'agit là d'une étape provisoire pour les calculs.

Le problème considéré peut s'inscrire dans le cadre de l'équivalence de capitaux.

En effet à l'époque $n$, $A_n$ est équivalent à la suite des $n$ annuités de montant $a$ chacune.

Les exemples ci-après ont pour objet de manipuler la formule :

\[
A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}
\]

Exemple 1

Calculer la valeur acquisée, au moment du dernier versement, par une suite de 15 annuités de 35 000 dh chacune. Taux : 10% sur 15 ans.

\[
A_{15} = 35 000 \frac{(1.1)^{15} - 1}{0.1} = 11 120 368,86 \text{ dh}
\]
1) La table financière n° 3 donne les valeurs acquises d'une suite d'annuités de 1 dh. Dans l'exemple, au croisement de la ligne correspondant à \( n = 15 \) et de la colonne correspondant au taux de 10\% on lit :
\[
\frac{1.15 - 1}{0.1} = 31.7724817
\]
En multipliant par 35 000 on trouve :

\[
A_{15} = 1 112 036.86 \text{ dh}
\]

2) Les intérêts produits par les différents versements peuvent être calculés.

\[
I = 1 112 036.86 - 15 \times 35 000 = 587 036.86 \text{ dh}
\]

**Exemple 2**

Combien faut-il verser à la fin de chaque semestre pendant 8 ans, pour constituer, au moment du dernier versement, un capital de 450 000 dh. Taux semestriel : 4.5\%.

Ici on inverse la formule :

\[
A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} \iff a = A_n \frac{i}{(1+i)^n - 1}
\]

\[
a = \frac{450 000}{1.045} - 1 = 19 806.96 \text{ dh}
\]

**Exemple 3**

1) Ici on a appliqué le même schéma que celui des annuités; cela ne pose aucun problème, puisque le taux correspond à la période.

2) En inversant la formule donnant la valeur acquise par la suite d'annuité on n'obtient pas une valeur actuelle mais le montant de l'annuité.

**Exemple 4**

Par le versement de \( n \) annuités de 32 000 dh chacune on constitue un capital de 384 000 dh. Taux : 9\% l'an. Trouver \( n \).

On peut écrire :

\[
384 000 = 32 000 \frac{1.09^n - 1}{0.09}
\]

Ce qui donne :

\[
1.09^n - 1 = 12
\]

On encore :

\[
1.09^n = 2.08
\]

Par logarithmes on trouve : \( n \approx 8.5 \)

Comme \( n \) doit être nécessairement entier on prendra \( n = 8 \) ou \( n = 9 \)

1er cas : \( n = 8 \)

* 1ère solution : on modifie toutes les annuités :

\[
a = 384 000 \frac{0.09^n}{1} = 34 818.96 \text{ dh}
\]

* 2ème solution : on modifie uniquement la dernière annuité, celle-ci est majorée d'un montant \( m \):

\[
m = 384 000 - 32 000 \frac{1.09^n - 1}{0.09} = 31 088.84 \text{ dh}
\]
Mathématiques Financières

2ème cas : n = 9

* 1ère solution : on modifie toutes les annuités
  \[ a = 384\ 000 \times 0,09 = 29\ 600,74 \text{ dh} \]
  \[ 1,09^9 - 1 \]

* 2ème solution : on modifie uniquement la dernière annuité,
  celle-ci diminuée d'un montant d :
  \[ d = 32\ 000 \times 1,09^9 - 1 - 384\ 000 = 32\ 637,17 \text{ dh} \]

Cette solution n'est pas acceptable car on dépasse le montant de l'annuité.

En fait aucune des propositions avancées ne répond exactement au problème posé, et à ce titre le problème semble ne pas admettre de solution. Il existe pourtant une solution satisfaisant les données du problème mais il faut se situer après le dernier versement. En effet, pour \( n = 8 \), le capital constitué au moment du dernier versement s'élève à 352 911,16 dh ; placé pour une durée égale à \( x \), cette somme acquiert la valeur de 384 000 dh :

\[ 384\ 000 = 352\ 911,16 \times 1,09^x \]

Par logarithme on trouve \( x = 353 \) jours

Nous avons, en définitive, 8 annuités de 32 000 dh chacune, le capital de 384 000 dh est constitué 11 mois et 23 jours après le dernier versement.

B. Capital constitué par une suite d'annuités constantes à une date postérieure au dernier versement

Ici le versement de la dernière annuité a un sens puisque celle-ci rapporte, au même titre que les autres annuités, des intérêts. Pour le calcul de la valeur acquise il importe de se situer, d'abord, au moment du dernier versement, ensuite, on utilise, suivant les cas, soit les intérêts simples, soit les intérêts composés.

Exemple 1

Une personne place auprès d'un organisme la capitalisation des annuités de 25 000 dh chacune.

Taux : 10,5% l'an. Date du 1er versement : 31/12/2004
Date du dernier versement : 31/12/2014.
Calculer le capital constitué au :
  * 31/12/2014
  * 31/08/2015 (présenter deux solutions)
  * 31/12/2015

C.- Cas où le taux ne correspond pas à la période

Ici on utilise soit les taux proportionnels, soit les taux équivalents.

Exemple

Un particulier place auprès d'un organisme de capitalisation, 40 trimestralités de montant 10 000 dh chacune. Calculer le capital constitué au moment du dernier versement.

Taux : 9% l'an.
→ Utilisation des taux proportionnels :
  \[ i = 0,09/3 = 0,0333 \text{ soit } 3,33 \% \text{ par trimestre} \]
Mathématiques Financières

1) Ainsi la valeur acquise s'écrit :
\[
A_{40} = 10000 \cdot \frac{1.0225^{40}-1}{0.0225} = 637 861, 76 \text{ dh}
\]

→ Utilisation des taux équivalents :
\[i_t = 1.05^{4/12} - 1 = 0.02177818\]
soit 2,18 % par trimestre
\[
A_{40} = 10000 \cdot \frac{1.02177818^{40}-1}{0.02177818} = 627 859,45 \text{ dh}
\]

(On encore \(A_{40} = 627 859,45 \text{ dh} \) si l'on prend pour l'annuité à tous les chiffres après la virgule).

2) Dans la pratique les organismes financiers utilisent généralement les taux équivalents pour ce type d'opération.

5.2.2 - Valeur actuelle

A - Valeur actuelle à l'origine

La situation peut être schématisée comme suit :

\[
\begin{array}{cccccc}
0 & a & a & a & a & \ldots & i \\
1 & 2 & n
\end{array}
\]

Ici on cherche à évaluer la suite d'annuités à la date 0 (c-à-d à l'origine de la suite).

A la date \(n\) on a :
\[
A_n = a \cdot \left(1+i\right)^n - \frac{1}{i}
\]

À la date 0 on a :
\[
A_0 = A_n \cdot \left(1+i\right)^{-n}
\]

Ou encore :
\[
A_0 = a \cdot \left(1+i\right)^{n-1} \cdot \left(1+i\right)^{-n}
\]

Ce qui donne :
\[
A_0 = a \cdot \frac{1}{i} - (1+i)^{-n}
\]

Formule d'actualisation

Exemple

Calculer la valeur à l'origine d'une suite de 12 annuités de 32 500 dh chacune. Taux d'escompte : 8,5% l'an.

\[
\begin{array}{c}
A_0 = 32 500 \cdot \frac{1-1.085^{-12}}{0.085}
\end{array}
\]

\[= 238 702,30 \text{ dh}\]

1) La table n°4 donne les valeurs de \(1-\left(1+i\right)^{-n}\).

Ici on lit :
\[
1-1.085^{-12} = 7,3446861
\]

2) Les intérêts versés à l'occasion de cette opération d'escompte, peuvent être calculés:

\[
I = 12 \times 32 500 - 238 702,30 = 151 297,70 \text{ dh}
\]

Exemple 2

Combien faut-il payer à la fin de chaque année de l'emprunt pour rembourser une dette de 350 000 dh, par le versement de 14 annuités constantes ?

Taux d'escompte : 70,5 % l'an.

Ici on inverse la formule d'actualisation :

\[
A_{14} = n \cdot \frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{1-\left(1+i\right)^{-1}}
\]

\[
a = \frac{350 000 \cdot 0,105}{1-1,105^{14}} = 48 813,31 \text{ dh}
\]

71
La table n° 5 donne les valeurs de \( \frac{1}{1 - (1 + i)^{-n}} \)

A partir de cette table on écrit :

\[ a = 350 \text{ 000} \times 0,1394666 = 48 \text{ 813,31 dh} \]

**Exemple 3**

Une suite de 10 annuités de 25 000 dh chacune a une valeur à l'origine de 140 000 dh trouver le taux.

\[ \frac{25 \text{ 000}}{1 - (1 + i)^{-10}} = 140 \text{ 000} \]

Ce qui donne : \[ \frac{1}{1 - (1 + i)^{-10}} = 5,6 \]

Par tâtonnement on trouve :

\[ 5,5928671 \rightarrow 12,25 \]
\[ 5,6 \rightarrow t \]
\[ 6,502230 \rightarrow 12 \]

D'où :

\[ t = 12,25 - 0,25 \times \frac{5,6 - 5,5928671}{56502230 - 55928671} = 12,22 \]

Soit 12,22 % l'an.

**Exemple 4**

Une suite de n annuités de 40 000 dh chacune a une valeur actuelle, un an avant le premier versement de 170 000 dh. Taux d'escompte : 12 % l'an.

Trouver n.

Ici on a :

\[ 40 \text{ 000} \times 1 - 1,12^{-n} = 170 \text{ 000} \]

Ce qui donne \( 1,12^{-n} = 0,49 \)

Par logarithmes on trouve : \( n = 6,29 \)

Cette valeur n'est pas entière et à ce titre le problème n'admet pas de solutions strictes. On peut toutefois modifier "légerement" les annuités.

**1er Cas : \( n = 6 \)**

* 1ère solution : on modifie toutes les annuités :

\[ A = 170 \text{ 000} \times 0,12 = 41 \text{ 348,37 dh} \]

\[ 1 - 1,12^{-6} \]

* 2ème solution : on modifie uniquement la dernière annuité à laquelle on ajoute un complément \( X \)

A la date 0 on a :

\[ 170 \text{ 000} = 40 \text{ 000} \times 1 - 1,12^{-6} + X \times (1,12^{-6}) \]

\[ X = 10 \text{ 942,29 dh} \]

* 2ème cas : \( n = 7 \)

* 1ère solution : on modifie toutes les annuités :

\[ a = 170 \text{ 000} \times 0,12 = 37 \text{ 250,02 dh} \]

\[ 1 - 1,12^{-7} \]

* 2ème solution : on diminue la dernière annuité d'un montant \( y \)

A la date 0 on a :

\[ 170 \text{ 000} = 40 \text{ 000} \times 1 - 1,12^{-7} - y \times (1,12^{-7}) \]

\[ y = 27 \text{ 744,63 dh} \]

La 7ème annuité ne sera que de 12 255,37 dh

Ici on ne peut pas jouer sur la date à laquelle on se situe pour évaluer la suite puisque, dans les énoncés, la valeur actuelle est une valeur actuelle à l'origine de la suite. Si on ne respecte pas cette contrainte alors on peut trouver des solutions intéressantes.

Prenons le cas où \( n = 6 \). A la date 0 on aura :

\[ A_0 = 40 \text{ 000} \times 1 - 1,12^{-6} = 164 \text{ 456,29 dh} \]

Pour avoir une valeur de 170 000 dh il faut se situer après la date 0 :

\[ 170 \text{ 000} = 164 \text{ 456,29} x 1,12^x \]

Ce qui donne \( x = 105 \) jours, cette solution est acceptable puisqu'on se situe toujours avant le 1er versement.

Pour \( n = 7 \) on aura à la date 0 :

\[ A_0 = 40 \text{ 000} \times 1 - 1,12^{-7} = 182 \text{ 550,26 dh} \]

On a donc une valeur de 170 000 dh à une date antérieure à la date 0 :

\[ 182 \text{ 550,26} = 170 \text{ 000} \times 1,12^7 \]

Ce qui donne : \( y = 226 \) jours
Mathématiques Financières

Soit 7 mois et 16 jours avant la date 0.
Ces développements nous semblent intéressants dans la mesure où ils
indiquent que pour actualiser une suite d'annuités rien n'oblige à se situer à
l'origine.

B - Valeur actuelle à une date quelconque

Le schéma des annuités de fin de période suppose que l'on retienne pour la valeur
actuelle l'origine de la suite, cependant on peut se référer, pour l'actualisation, à toute
autre date, pourvu que celle-ci soit antérieure à la première annuité. On peut donc se
situer p périodes (p entier ou fractionnaire mais positif) avant le 1er versement. Trois
cas peuvent se présenter.

* 0 < p < 1 alors la suite est dite anticipée d'un temps (1 - p).
* p = 1 alors la suite est dite immédiate.
* p > 1 alors la suite est dite différée d'un temps (p - 1).

La situation se présente comme suit :

**Suite anticipée :**

\[ 0 \quad (1 - p) \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad a \quad i \]

On actualise à l'époque (1 - p) avant le 1er versement.

**Suite immédiate :**

\[ 0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad a \quad i \]

P = 1 on actualise à la date 0 ; c'est le schéma classique.

**Suite différée :**

\[(p - 1) \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad a \quad i \]

On actualise à l'époque (p - 1) avant le 1er versement.

Mathématiques Financières

**Exemple**

Une dette de 345 000 dh est remboursable par le versement de 8 annuités constantes.

Taux : 12,5 % par.
Calculer le montant de l'annuité dans chacune des situations suivantes :
a - la première annuité est payable dans 3 mois
b - la deuxième annuité est payable dans 1 an
c - la troisième annuité est payable dans 18 mois

a - Ici on se situe à l'époque 9/12, la suite est anticipée de 9 mois. Par rapport au cas
classique où le 1er versement s'effectue une période après la date du contrat, on
se situe de 9 mois :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Origine 0</th>
<th>9/12</th>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>a</th>
<th>12,5 %</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Date du contrat 3/12</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

A la date 9/12 on a :

\[ 345 000 = a_1 \times 1,125^{(9/12)} - a_{0,125} \]

\[ a_1 = \frac{64 692,35}{0,125} \]

b - Le 1er paiement à lieu dans 1 an (une période), la suite est immédiate ; la date du
contrat coïncide avec l'origine.

\[ 345 000 = a_2 \times 1,125^{(9/12)} - a_{0,125} \]

\[ a_2 = \frac{70 667,10}{0,125} \]

c - Ici le 1er versement est reculé de 6 mois (on a un différé de 6 mois) :

\[ -1/2 \quad 0 \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad 12,5 % \]

| Date du contrat | 18 mois | 2 | 3 | 8 |

A la date -1/2 on a :

\[ 345 000 = a_3 \times 1,125^{(-1/2)} - a_{0,125} \]

\[ a_3 = \frac{74 953,78}{0,125} \]
On a bien : $a_3 < a_2 < a_1$

En effet, par rapport aux annuités immédiates, il y a 9 mois d'intérêts qui se retranchent dans le 1er cas et 6 mois d'intérêts qui s'ajoutent dans le dernier.

C - Le taux d'intérêt ne correspond pas à la période.

Là également on utilise l'un des deux procédés de transformation des taux : soit les taux proportionnels, soit les taux équivalents.

Exemple

Une dette de 225 000 dh est remboursable par le versement de 60 mensualités constantes. Taux : 11,5 % l'an. Sachant que le paiement du 1er versement a lieu dans un mois, calculer le montant de la mensualité de remboursement.

1ère procédé : utilisation des taux proportionnels,

\[ i_m = \frac{0.115}{12} = 0.0095833 \]

D'où

\[ a = 225 000 \times 0.0095833 = 4 948.33 \text{ dh} \]

2ème procédé : utilisation des taux équivalents.

\[ i_m = \frac{1.115^{1/12} - 1}{1 - 1.0095833^{-60}} \]

D'où

\[ a = 225 000 \times 0.0091125 = 4 884.75 \text{ dh} \]

Généralement les organismes de crédit utilisent, pour ce genre de situation, les taux proportionnels.

5-3 - Annuités constantes de début de période

5.3.1 - Définition

Les versements ont lieu au début de chaque période.

\[ B_n = a \left(1 + \frac{i}{1 + i}ight)^{n-1} \times (1+i) \]

Exemple

Calculer le capital constitué un an après le dernier versement, par une suite de 12 annuités de 27 500 dh chacune. Taux : 9% l'an.

\[ B_{12} = 27 500 \times 1.09^{12} - 1 \times 1.09 = 603 718.08 \text{ dh} \]

Ce schéma traduit mieux la réalité puisque généralement, dès la signature du contrat, un premier versement est effectué, le capital est alors constitué à la fin de la n° année (soit une période après le dernier versement).
5.3.3 - Valeur actuelle

Ici on se situe au moment du 1er versement :

\[ B_0 = a \sum_{i=1}^{n} (1+i)^{-b} (1+i)^{-i} \]

1 période après le 1er versement (ce qui nous ramène au moment du 1er versement)

Exemple

Calculer la valeur actuelle, au moment du versement du 1er terme, par une suite de 15 annuités de 31 000 dh chacune. Taux d'actualisation : 12,5 % l'an.

\[ B_0 = 31 000 \times 1,125 \times 1,125 = 231 \, 322,18 \, dh \]

Ce schéma ne convient pas au remboursement de dettes. En effet le 1er versement est trop anticipé pour que celui-ci ait un sens.

5.4 - Annuités en progression arithmétique, annuités en progression géométrique

Ici on adoptera le schéma des annuités de fin de période. Pour se rapporter aux annuités de début de période, il égale, on introduit un décalage d'une période (ce qui revient à multiplier par \((1+i)\)).

5.4.1 - Annuités en progression arithmétique

L'annuité augmente chaque période d'un montant \(r\) constant (s'il est négatif alors il s'agit d'une diminution).

\[
\begin{array}{cccc}
0 & a & a + r & a + 2r \\
1 & & & a (n-1) r \\
2 & & & \\
3 & & & \\
\vdots & & & \\
n & & & \\
\end{array}
\]

\[ A_n = \sum_{i=1}^{n} (a + (r+i))(1+i)^{-i} \]

Valeur acquise

\[ A_n = \sum_{i=1}^{n} a(1+i)^{-i} + \sum_{i=1}^{n} (p-i)(1+i)^{-i} \]

\[ A_n = a \sum_{i=1}^{n} (1+i)^{-1} + r \sum_{i=1}^{n} (p-i)(1+i)^{-i} \]

Calculons \( S = \sum_{i=1}^{n} (p-i)(1+i)^{-i} \):

\[ S = (1+i)^{-1} + 2(1+i)^{-2} + \cdots + (n-2)(1+i) + (n-1) \]

\[ (1+i) S - S = iS = (1+i)(1+i)^{-2} + \cdots + i \]

\[ S = \frac{(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + i - n}{i} \]

Ce qui donne :

\[ S = \frac{1}{i} \frac{(1+i)^{-1} - n}{i} \]

On trouve en définitive :

\[ A_n = \frac{a}{i} \frac{(1+i)^{-1} - n}{i} \]

Exemple

Calculer la valeur actuelle d'une suite de 10 annuités en augmentation de 10 000 dh par an et de premier terme 25 000 dh. Taux : 5 % l'an.

\[ A_{10} = (25 000, 25 000, 25 000, 10 000) \]

\[ A_{10} = 9229843,37 \, dh \]

\[ A_0 = A_{10} (1,08)^{-10} = 427520,35 \, dh \]
5.4.2 - Annuités en progression géométrique

On passe d'une annuité à la suivante en multipliant par une constante q (avec q ≠ 1)

\[
\begin{array}{c|c|c|c|c}
0 & 1 & 2 & q & q^2 \\
\hline
A_n &=& a & aq & aq^2 \\
\hline
i & 0 & 1 & 2 & n \\
\end{array}
\]

Valeur acquise :

\[ A_n = \sum_{t=0}^{n} a(1+i)^{n-t} = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} \]

Deux cas peuvent se présenter :

* q = 1+i alors \( A_n = na(1+i)^{n-1} \)

* q ≠ 1+i alors \( A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} \)

Ce qui donne après simplification :

\[
A_n = a \frac{(1+i)^n - q^b}{1+i-q}
\]

Valeur acquise au moment du dernier versement

Il est utile de poser q = 1+r et faire ainsi apparaître un taux d'augmentation (ou de diminution si r est négatif) ; la formule devient quand i ≠ r :

\[
A_n = a \frac{(1+i)^n - (1+r)^n}{i-r}
\]

Valeur actuelle :

En multipliant dans la formule précédente par \((1+i)\) on obtient :

\[
A_n = a \frac{1-(1+i)^n x (1+i) - \ldots}{i-r}
\]

Valeur actuelle 1 période avant le 1er versement

Si on \( a = na(1+i)^{-1} \) si \( i = r \)

Exemple 1

* Calculer la valeur acquise et la valeur actuelle d'une suite de 10 annuités en augmentation de 7 % par an et de premier terme 22 000 dh. Taux d'intérêt : 9 %

\[
A_{10} = 22 000 \times 1.07^{10} - 1.07^{10} = 440 233.65 dh
\]

\[
A_0 = A_{10} \times (1+i)^{10} = 185 959.41 dh
\]

Calculons les intérêts contenus dans \( A_{10} \). Le capital placé s'élève à :

\[
C = 22 000 + 22 000 \times 1.07 + \ldots + 22 000 \times 1.07^9
\]

\[
C = 22 000 \times 1.07^{10} - 1 \quad , 0.07
\]

D'où l'intérêt :

\[
I = 136 271,69 dh
\]

Exemple 2

Calculer la valeur acquise d'une suite de 6 annuités en augmentation de 8 % l'an et de premier terme 31 000 dh. Taux d'intérêt : 8 % l'an :

\[
A_6 = 6 \times 31 000 \times 1.08^6 = 273 295,02 dh
\]

5.5 - Problèmes d'équivalence

On peut remplacer une suite d'annuités par un capital unique ; ce qui revient à évaluer la suite à une date quelconque.

Exemple

Un achat peut être réglé :

* en 6 annuités constantes de 20 000 dh chacune, la première étant payable un an après la date d'achat.

* ou en un seul versement, 3 ans après la date d'achat. Taux d'escompte : 12 %.

Calculer la valeur nominale de ce versement unique.

\[
A_{3} = \frac{20 000 \times (1-1.12^{-6})}{0.12}
\]

Ce qui donne :

\[
A_3 = 115 524,63 dh
\]
Mathématiques Financières

5.6 – Exercices

5.1 - Le 31/10/09, un particulier s'engage, auprès d'un organisme de capitalisation, à verser 12 annuités de 32 500 dh chacune. Sachant que le taux est de 2,5 % l'an et que le premier versement doit être effectué le 31/10/09, calculer le capital constitué :

a) au 31/10/2007,
b) au 31/03/2008,
c) au 31/10/2009,
d) au 31/10/2010

5.2 - On place 8 annuités constantes de 17 500 dh chacune, au moment du dernier versement le capital constitué s'élève à 190 000 dh. Trouver le taux.

5.3 - Combien d'annuités de 20 000 dh chacune, faut-il placer, pour disposer au moment du dernier versement d'une valeur acquise de 300 000 dh ? Taux : 9,5 % l'an.

5.4 - Calculer, au moment du dernier versement, la valeur acquise de 28 trimestrialités de 5 000 dh chacune, capitalisées à 8 % l'an. Donnez 3 solutions.

5.5 - Une personne place à la fin de chaque trimestre des sommes constantes de 8 000 dh chacune. Date du 1er versement : 01/03/2005 ; date du dernier versement : 31/12/2008. Taux : 9 % l'an ; on utilise alors les taux proportionnels. Calculer la valeur acquise :
a) au 31/12/2008, b) au 28/02/2009 (solution rationnelle).

5.6 - Au 1/7/05 un compte bancaire est débiteur de 60 000 dh. Le titulaire de ce compte décide alors de verser à sa banque, à la fin de chaque trimestre une somme constante de 17 000 dh. Date du 1er versement : 30/09/05. Date du dernier versement : 30/06/06. En supposant que la date de valeur de chacun des 4 versements coïncide avec la fin du trimestre correspondant, établir la situation du client de la banque au 30/06/06. Taux débiteur : 12 %.

Taux créditeur : 0 %.

Intérêts calculés trimestre par trimestre.

NB : pour simplifier les calculs on prendra 1 trimestre = 90 jours.

Exemple

Pour un fonds de commerce on a le choix entre :
* verser 8 annuités de 40 000 dh chacune, la première étant payable dans un an,
* on verse 16 trimestrialités constantes, la première étant payable dans 18 mois.
Taux d'escompte : 12,5 % l'an.
Calculer le montant de la semestrialité pour que les deux modes de règlements soient équivalents.

On calcule le taux semestriel équivalent au taux annuel de 12,5 %.

\[
l_i = \frac{1,125}{2} - 1 = 0,0606542
\]

A la date 0 on a :

\[
\frac{40 000 \cdot (1-1,125^{-8})}{0,125} = \frac{a \cdot 0,0606602 \cdot 1,125^{-14} \cdot (1,125)^{-1}}{0,0606602} \approx 23 732,26 dh
\]
Mathématiques Financières

5.7 - Une personne s'engage à verser auprès d'un organisme de capitalisation, 8 annuités constantes de montant à chaque. La valeur acquise un an après le dernier versement est de 350 000 dh. Taux : 9 %.
   a) Calculer a.
   b) Sachant qu'en cas de remboursement anticipé le taux est ramené à 8% (soit une pénalité d'un point) calculer le capital disponible 5 mois après le 4ème versement.
   Donner un autre mode de pénalisation (à l'occasion, le taux peut augmenter ou diminuer d'un point suivant le sens qui pénalise le client).

5.8 - Calculer au 31/10/05 la valeur actuelle d'une suite de 10 annuités de 22 500 dh chacune.
   Date du 1er versement : 31/10/06. Taux : 9.25 % l'an.
   Calculer la valeur de la même suite au 31/10/2004.

5.9 - Une dette de 400 000 dh est remboursable par le versement de 12 annuités de 66 000 dh.
   Sachant que le premier versement a lieu un an après la date du contrat, calculer le taux d'escompte. Quel aurait été le taux si le premier versement avait eu lieu deux ans après la date du contrat ?

5.10 - Quelle somme constante doit-on verser à la fin de chaque mois pendant 4 ans, pour rembourser une dette de 180 000 dh, contractée un mois avant le 1er versement ? Taux : 13 %. Donner deux solutions.

5.11 - Un particulier a contracté auprès d'une banque un emprunt de montant D. Cet emprunt est remboursable par trimestrialités constantes de 9 000 dh chacune et ceci pendant 6 ans.
   Sachant que le 1er versement est payable un an après la date du contrat, calculer le nominal D de la dette. Taux : 12,5 % l'an, (utiliser les taux proportionnels).

Mathématiques Financières

5.12 - Un organisme financier accorde des crédits-logement dans les conditions suivantes :
   - taux annuel : 12.5 %
   - remboursement sur 15 ans par mensualités constantes, la première étant payable 1 mois après la date du contrat (ou utilise alors les taux proportionnels).
   - la mensualité ne doit pas dépasser les 30 % du revenu mensuel du ménage.
   a) Calculer le montant maximum qui peut être accordé à un ménage dont le revenu mensuel est de 12 000 dh par mois,
   b) En cas de remboursement par anticipation les mensualités non échues sont actualisées à 10 % l'an.
   * Calculer le montant que doit verser un ménage, pour se libérer de sa dette, juste après le paiement de la 84ème mensualité, et ayant bénéficié d'un crédit de 200 000 dh. (Utiliser les taux proportionnels).
   * Expliquer pourquoi le taux est diminué.

5.13 - Une grande société accorde à son personnel des crédits logement dans les conditions suivantes :
   - taux : 4% l'an
   - durée maximale : 15 ans
   - plafond : 350 000 dh
   - remboursement par mensualités constantes, la 1ère étant payable un mois après la date du contrat (ou utilise alors les taux équivalents).
   - possibilité de remboursement anticipé sans pénalité.

M. Ben Abdallah, de la direction financière, est intéressé par ce plafond de 350 000dh mais trouve trop longue la durée de remboursement qui s'étale sur 15 ans ; il opte alors pour un remboursement accéléré sur 8 ans seulement. Par ailleurs, M Ben Abdallah a la possibilité de placer ces économies à 9 % l'an (pour les versements mensuels on utilisera les taux proportionnels). Que conseiller à ce monsieur ?

5.14 - Un industrial verse, auprès d'un organisme financier, 6 annuités constantes. Le capital constitué, deux ans après le dernier versement s'élève à 550 000dh. Taux : 10% l'an.
   a) Calculer le montant de l'annuité de placement,
   b) Le capital ainsi constitué sert à l'achat d'une machine mais il est insuffisant.
   Le complément est alors financé à crédit au taux de 13 % l'an. Sachant que cet emprunt est remboursable en 16 semestrielles de 49 064,45 dh chacune la première étant payable un an après la date du contrat, calculer le prix de la machine.
   (Utiliser les taux proportionnels).
Mathématiques Financières

5.13 - Dans un dépliant concernant une formule d'épargne retraites, proposée par une grande banque on trouve les indications suivantes :

Simulation sur la base d'une rémunération de 9%.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Age</th>
<th>Cotisation mensuelle en dh</th>
<th>Capital à 60 ans en dh</th>
<th>Rente annuelle à vie à 60 ans en dh (à terme échu)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>30 ans</td>
<td>300</td>
<td>514314</td>
<td>60149</td>
</tr>
<tr>
<td>40 ans</td>
<td>600</td>
<td>386074</td>
<td>45151</td>
</tr>
<tr>
<td>50 ans</td>
<td>1500</td>
<td>286629</td>
<td>33521</td>
</tr>
</tbody>
</table>

a) Montrer comment le capital constitué à l'âge de 60 ans a été calculé.
b) Calculer le taux de rendement pour un souscripteur qui vivrait jusqu'à l'âge de :
   * 80 ans
   * 100 ans
c) Pour quel âge le taux de rendement est-il proche 9 %?

NB : la rente viagère relève du domaine de l'actuaire, la méthode de calcul de cette rente n'est donc pas demandée ici.

5.16 - Soit une suite de 12 annuités constantes, dont la valeur est égale à :
   - 159 448,39 dh deux ans avant le premier versement
   - 622 059,49 dh deux ans après le dernier versement

a) Calculer la valeur de cette suite un an avant le premier versement.
b) Calculer l'annuité.
c) Remplacer la suite par un versement unique de 300 000 dh.

5.17 - Calculer la valeur actuelle deux ans avant le premier versement et la valeur acquise deux ans après le dernier versement d'une suite de 12 annuités en augmentation de 15 000 dh par an, la première étant de 35 000 dh. Taux : 10,5 % l'an.
6 Les emprunts indivis

6-1 Définition

L'emprunt indivis se caractérise par le fait que l'emprunteur (un particulier ou une entreprise) s'adresse à un seul créancier (le nominal C de la dette n'est pas divisé). L'emprunt indivis s'oppose donc à l'emprunt obligataire pour lequel l'emprunteur (une grande entreprise ou l'État) recourt à une multitude de créanciers (le nominal C de la dette est divisé en titres).

6-2 Notion d'amortissement des emprunts indivis

Une personne emprunte une somme C pour une durée égale à n périodes au taux i. Pour l'amortissement de la dette on distingue deux types de système:

* emprunts remboursables en une seule fois
* amortissement à l'aide d'annuités.

6-2-1 Emprunts remboursables en une seule fois

Ici l'emprunteur ne verse à la fin de chaque année que l'intérêt Ci de la dette. Le nominal C ou encore le "principal" est versé en bloc à la fin de la dernière année avec bien entendu, l'intérêt Ci. La situation se présente comme suit :

<table>
<thead>
<tr>
<th>t %</th>
<th>C</th>
<th>Ci</th>
<th>Ci</th>
<th>Ci + C</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>n</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

88
1) On vérifie aisément l'équivalence à l'époque 0 et à l'époque n. En effet:

- à l'époque 0 on a :
  \[ C = C_i \frac{1-(1+i)^n}{i} + C(1+i)^n \]

- de même à l'époque n on a :
  \[ C(1+i)^n = C_i \frac{(1+i)^n - 1}{i} + C \]

3) Les versements effectués à la fin de chaque année de l'emprunt peuvent être considérés comme étant des annuités de remboursement. Notons, cependant que seul la dernière annuité contient l'amortissement de la dette (effectué en bloc). L'amortissement par annuité désigne donc tout autre chose.

**Exemple**

Un emprunt de 250 000 dh est remboursable à la fin de la 10ème année. L'emprunteur s'engage à verser à la fin de chaque année l'intérêt de la dette. Taux : 10,5% l'an. Vérifier que juste après le 4ème versement la dette est toujours de 250 000 dh.

On a :

- \( C = 250 000 \) dh \\
- \( i = 0,105 \) \\
- \( n = 10 \) \\
- \( i = C_i = 250 000 \times 0,105 = 26 250 \) dh

Le solde \( S_4 \) apparaît comme étant la différence entre le capital initial (débit pour l'emprunteur) et les différents versements effectués jusqu'à l'époque 4 (crédit pour l'emprunteur) :

\[ S_4 = 250 000 \times 1,105^4 - 26 250 \frac{1-1,105^4}{0,105} = 250 000 \text{ dh} \]

6-2-2 Amortissement à l'aide d'annuités

Ce système se caractérise par le fait que les annuités contiennent toutes un amortissement et donc dépasse l'intérêt de la période.

---

**Tableau d'amortissement**

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>Capital en début de période (CDP)</th>
<th>Intérêt de la période ((I))</th>
<th>Amortissement ((M))</th>
<th>Annuité ((a))</th>
<th>Capital en fin de période ((CFP))</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>( C_i )</td>
<td>( C_i )</td>
<td>( M_1 )</td>
<td>( a_1 = C_i + M_1 )</td>
<td>( C_i = C - M_1 )</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>( C_1 )</td>
<td>( C_1i )</td>
<td>( M_2 )</td>
<td>( a_2 = C_1i + M_2 )</td>
<td>( C_1 = C - M_2 )</td>
</tr>
<tr>
<td>...</td>
<td>...</td>
<td>...</td>
<td>...</td>
<td>...</td>
<td>...</td>
</tr>
</tbody>
</table>
| n       | \( C_{n-1} \)                   | \( C_{n-1}i \)              | \( M_n \)           | \( a_n = C_{n-1}i + M_n \) | \( C_n = 0 \) }
Exemple

Un emprunt de 200 000 dh est remboursable à l'aide de 6 annuités, la première venant à échéance un an après la date du contrat. Taux : 11 %. Sachant que les amortissements sont respectivement 35 000 dh, 20 000 dh, 50 000 dh, 40 000 dh et 10 000 dh établir le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré.

Le tableau d'amortissement se présente comme suit :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>M</th>
<th>a</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>200 000</td>
<td>22 000</td>
<td>35 000</td>
<td>57 000</td>
<td>165 000</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>165 000</td>
<td>18 150</td>
<td>20 000</td>
<td>38 150</td>
<td>145 000</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>145 000</td>
<td>15 950</td>
<td>50 000</td>
<td>65 950</td>
<td>95 000</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>95 000</td>
<td>10 450</td>
<td>40 000</td>
<td>50 450</td>
<td>55 000</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>55 000</td>
<td>6 050</td>
<td>10 000</td>
<td>16 050</td>
<td>45 000</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>45 000</td>
<td>4 950</td>
<td>45 000</td>
<td>49 950</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>

L'intérêt de la 1ère année, par exemple, se calcule comme suit :

\[ I_1 = 200 000 \times 0,11 = 22 000 \text{dh} \]

En additionnant l'intérêt et le premier amortissement, on obtient l'annuité \( a_1 \)

\[ a_1 = 22 000 + 35 000 = 57 000 \text{dh} \]

En retranchant l'amortissement du capital au début d'une période on obtient le capital restant dû au début de la période suivante, par exemple :

\[ C_1 = 200 000 - 35 000 = 165 000 \text{dh} \]

Et ainsi de suite ...

1) Le dernier amortissement n'a pas été donné, son calcul ne pose aucun problème :

\[ M_6 = 200 000 - (35 000 + 20 000 + 50 000 + 40 000 + 10 000) \]

\[ M_6 = 45 000 \text{dh} \]

On encore

\[ M_6 = C_5 = 45 000 \text{dh} \]

2) Dans cet exemple les amortissements n'obéissent à aucune loi et sont distribués de manière tout à fait aléatoire.

Quelques propriétés

Le capital initial et les annuités de remboursement peuvent faire l'objet d'écritures dans un compte courant à taux réciproque (le taux i de l'emprunt). Le compte courant de l'emprunteur, tenu par le prêteur se présente comme suit:

<table>
<thead>
<tr>
<th>Époque</th>
<th>Débit</th>
<th>Crédit</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0</td>
<td>C</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td></td>
<td>( a_1 )</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td></td>
<td>( a_2 )</td>
</tr>
<tr>
<td>...</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>( n )</td>
<td></td>
<td>( a_n )</td>
</tr>
</tbody>
</table>

A l'époque \( n \), juste après le dernier versement le solde (débit - crédit) est nul:

\[ S_n = C (1 + i)^n - \sum_{k=1}^{n} a_k (1 + i)^{n-k} = 0 \]

Ou encore

\[ C (1 + i)^n = \sum_{k=1}^{n} a_k (1 + i)^{n-k} \] (1)

La dette initiale, estimée à l'époque \( n \), est égale à la somme des valeurs acquises par chacun des versements de remboursement. En multipliant par \((1 + i)^n\) on se situe à l'époque 0 :

\[ C = \sum_{k=1}^{n} a_k (1 + i)^{n-k} \] (2)

Ainsi la dette initiale est égale à la somme des valeurs actuelles de chacune des annuités de remboursement (engagements de l'emprunteur). Le solde \( S_p \) juste après le paiement de la \( p \)-ème annuité s'écrit :

\[ S_p = C (1 + i)^p - \sum_{k=1}^{p} a_k (1 + i)^{p-k} \] (3)

En remplaçant \( C \) par l'expression obtenue dans (2) on écrit :
Mathématiques Financières

\[ S_p = \sum_{k=1}^{n} a_k (1 + i)^{p-k} - \sum_{k=1}^{p} b_k (1 + i)^{p-k} \]

ou encore

\[ S_p = \sum_{k=1}^{n} a_k (1 + i)^{p-k} + \sum_{k=p+1}^{n} b_k (1 + i)^{p-k} \]

Ce qui donne :

\[ S_p = \sum_{k=p+1}^{n} a_k (1 + i)^{(k-p)} \quad (4) \]

Ainsi, le capital restant dû (ou encore dette vivante DV) à l'époque \( p \), juste après le paiement de l'amortissement de rang \( p \), est égal à la somme des valeurs actuelles, à cette époque, des amortissements non échus.

6.3 Amortissement par annuités constantes

### 6.3.1 - Construction du tableau d'amortissement et propriétés

La somme de l'intérêt de la période et de l'amortissement est constante.

Cette somme peut être calculée à l'aide de la formule,

\[ a = C \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \]

La dette remboursée (DR) et l'intérêt de la période vont en diminuant, et donc l'amortissement va en augmentant (amortissement progressif). Il serait intéressant de maîtriser le comportement des amortissements d'une période à l'autre, écrivons, pour cela deux annuités successives :

\[ a_p = C_{p-1} i + M_p \]

et

\[ a_{p+1} = C_p i + M_{p+1} \]

On sait que \( a_p = a_{p+1} \iff C_{p+1} i + M_{p+1} = C_p i + M_{p+1} \)

Or

\[ C_p = C_{p-1} - M_p \]

Ce qui nous donne :

\[ M_p + M_p i = M_{p+1} \]

et donc :

\[ M_{p+1} = M_p (1 + i) \]

Les amortissements sont donc en progression géométrique de raison \((1 + i)\); calculons en le premier terme :

\[ \frac{C - M_1}{(1 + i)^n - 1} = \frac{1}{i} \]

\[ M_1 = C \frac{i}{(1 + i)^n - 1} \]

Ainsi, pour construire le tableau d'amortissement on peut procéder de 2 manières différentes :

* On calcule d'abord l'amortissement. Pour la 1ère ligne, on commence par calculer l'intérêt, par soustraction \((a - I)\) on obtient le premier amortissement, que l'on déduit du capital initial \( (C_1 - M_1) \). On dispose maintenant de la dette au début de la deuxième période, ce qui permet de construire la deuxième ligne et ainsi de suite...

On vérifie, en suite, que les amortissements sont en progression géométrique et que leur somme donne le capital initial.

* On calcule le premier amortissement. En multipliant à chaque fois par \((1 + i)\) on obtient la colonne des amortissements et, avec cela, la colonne du capital en début de période (CDP). Il devient aisé de calculer l'intérêt et l'amortissement.

### Exemple

Une personne emprunte 350 000 dh auprès d'une banque et s'engage à verser 8 annuités constantes, la première payable 1 an après la date du contrat. Sachant que le taux est de 12% l'an, construire le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré.

Calculons l'amortissement de remboursement,

\[ a = 350 000 \times 0.12 = 70 455,99 \text{ dh} \]

D'où le tableau d'amortissement :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>AMORT</th>
<th>ANNU</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>350 000,00</td>
<td>42 000,00</td>
<td>28 455,99</td>
<td>70 455,99</td>
<td>321 544,01</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>321 544,01</td>
<td>38 585,28</td>
<td>31 870,71</td>
<td>70 455,99</td>
<td>289 673,29</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>289 673,29</td>
<td>34 765,80</td>
<td>35 695,20</td>
<td>70 455,99</td>
<td>253 978,09</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>253 978,09</td>
<td>30 477,37</td>
<td>39 978,62</td>
<td>70 455,99</td>
<td>213 999,47</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>213 999,47</td>
<td>25 679,94</td>
<td>44 776,06</td>
<td>70 455,99</td>
<td>169 223,41</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>169 223,41</td>
<td>20 306,81</td>
<td>50 149,19</td>
<td>70 455,99</td>
<td>119 074,23</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>119 074,23</td>
<td>14 288,91</td>
<td>56 167,09</td>
<td>70 455,99</td>
<td>62 907,14</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>62 907,14</td>
<td>7 548,86</td>
<td>62 907,14</td>
<td>70 455,99</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>
1) Les amortissements sont bien en progression géométrique. Par exemple:
\[ 35\,695.20 \times 1,12 = 39\,880.62 \]
\[ 31\,870.71 \]

2) Le tableau peut être construit à partir de la colonne des amortissements:
\[ M_t = 350\,000 \times 0,12 \times 1,12^{t-1} \]

En multipliant à chaque fois par 1,12 on obtient les autres amortissements.

6-3-2 - Calcul du capital restant dû

Si l'on dispose du tableau d'amortissement, alors la lecture de la dette restante ne pose aucun problème. Dans l'exemple précédent on lit à la dernière colonne la somme de 213 999,47 dh; celle-ci correspond à la dette encore vivante (DV), juste après le paiement de la 4ème année. Le capital restant dû peut être calculé à l'aide de formules :

* A partir de la 3ème propriété du paragraphe 6-2-2 on écrit :
\[ DV_p = Sp = C (1 + i)^p - a \left(1 + i\right)^{p-1} \]

* De même si on utilise la 4ème propriété on obtient :
\[ DV_p = Sp = a \left(1 + i\right)^{n-p} \frac{1 - (1 + i)^{-p}}{1 - (1 + i)^{-n}} \]

* DVp peut, cependant, être calculé autrement

Dette vivante = dette initiale - dette remboursée

\[ DV_p = C - (M_1 + M_2 + \ldots + M_p) \]

\[ DV_p = C - M_1 \left(1 + i\right)^p - 1 \]

\[ DV_p = C - C \frac{i}{(1 + i)^p - 1} \]

\[ (1 + i)^p - 1 \]

Ce qui donne en définitive

\[ DV_p = Sp = C \left(1 + i\right)^p - (1 + i)^p \]

(1 + i)^p - 1

Exemple

Reprenons l'exemple précédent et calculons la dette restante juste après le versement du 5ème terme.

\[ DV_5 = 350\,000 \times 1,12^5 - 70\,455.99 \times \frac{(1,12^5 - 1)}{0,12} = 169\,223,41 \text{dh} \]

Ou encore

\[ DV_5 = 70\,455.99 \times \frac{1,12^3 - 1}{0,12} = 169\,223,41 \text{dh} \]

Ou encore :

\[ DV_5 = 350\,000 \times 1,12^8 - 1,12^5 = 169\,223,41 \text{dh} \]

6-3-3 - La prise en compte de la taxe sur la valeur ajoutée (TVA)

La TVA concerne les intérêts débiteurs; ainsi, si celle-ci est de 10 %, alors pour 100 dh d'intérêts versés au banquier, par exemple, il importe d'ajouter 10 dh de taxe, on se retrouve alors avec 110 dh d'intérêt toutes taxes comprises (TTC).

Pour tenir compte de la TVA on intègre une colonne spéciale à cet effet. Seulement, l'annuité de remboursement s'en trouve modifiée ; celle-ci ne sera plus constante mais en légère diminution (en ajouté à un terme constant une taxe qui diminue avec l'intérêt). Pour rendre constante l'annuité effective (I + TVA + Amort) il importe d'utiliser le taux d'intérêt intégrant la TVA (taux TTC).

Exemple

Un emprunt de 500 000 dh est amortissable par le versement de 6 annuités constantes la première venant à échéance un an après la date du contrat.

Taux : 12 % l'an. TVA : 10 % sur les intérêts.

On calcule d'abord le taux TTC : pour un capital de 100 dh on verse 12 dh d'intérêt par an, et pour 12 dh on verse 1,2 dh de TVA (12 × 0,01 = 1,2). On verse, en définitive, pour un capital emprunté de 100 dh, un intérêt de 13,2 dh par an (TTC).
Les annuités sont donc en progression arithmétique de raison \(-\frac{C}{n}\) et de premier terme \(C_1 + C/n\).

**Exemple**

Un emprunt de 300 000 dh est remboursable en 6 annuités, la première payable un an après la date du contrat.

Sachant que l'amortissement est constant et que le taux est de 11,5 % l'an, construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Chaque année on paie 50 000 dh (300 000 : 6) au titre d'amortissement ; d'où le tableau.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>AMORT</th>
<th>ANNU</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>300 000,00</td>
<td>34 500,00</td>
<td>50 000,00</td>
<td>84 500,00</td>
<td>250 000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>250 000,00</td>
<td>28 750,00</td>
<td>50 000,00</td>
<td>78 750,00</td>
<td>200 000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>200 000,00</td>
<td>23 000,00</td>
<td>50 000,00</td>
<td>73 000,00</td>
<td>150 000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>150 000,00</td>
<td>17 250,00</td>
<td>50 000,00</td>
<td>67 250,00</td>
<td>100 000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>100 000,00</td>
<td>11 500,00</td>
<td>50 000,00</td>
<td>61 700,00</td>
<td>50 000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>50 000,00</td>
<td>5 750,00</td>
<td>50 000,00</td>
<td>55 750,00</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>

1) Chaque année l'annuité diminue de 5 750 dh (50 000 x 0,115).
2) On peut intégrer la TVA dans le tableau. Celle-ci ne pose pas de problème puisque nous n'avons plus cette contrainte de rendre l'annuité constante.

**6-5- Emprunts amortissables en une seule fois : système américain**

Ce système a été exposé précédemment ; l'emprunteur verse que l'intérêt \(C\) et de la dette mais, à la fin, avec l'intérêt de la dernière période le capital \(C\) est remboursé en bloc.

En général l'emprunteur prépare l'échéance de ce paiement en plaçant à la fin de chaque année un fonds d'amortissement \(M\). Seulement, le taux de placement est de 50% du montant de l'emprunt. En effet, pour un particulier, le taux débiteur est supérieur au taux créditeur.
Mathématiques Financières

Exemple

Un particulier emprunte auprès d’une banque la somme de 250 000 dh. Cette somme est remboursable à la fin de la 8ème année. L’emprunteur s’engage alors à verser à la fin de chaque année l’intérêt de la dette. Taux : 12 % l’an.
Par ailleurs, ce particulier, arrive à placer à 9 %, au terme de chaque année et ceci pendant 7 ans une somme S destinée à préparer l’échéance des 250 000 dh.

Calculer S et l’amortie effective.

\[ 250 000 = S \times 1,09 \cdot \frac{1 - 1,09^{-7}}{0,09} \Rightarrow S = 249 929,02 \text{dh} \]

Par ailleurs l’intérêt à verser à la fin de chaque année s’élève à 30 000 dh. Ce qui donne une amontie effective de 249 929,02 dh (24 929,02 + 30 000) à verser par l’emprunteur pendant 7 ans. À la fin de la 8ème année il ne versera que 30 000 dh.

\[ t = 13,5 \cdot 0,25 \Rightarrow t = 3,375 \]

\[ t = 3,375 \cdot 2 \Rightarrow t = 6,75 \]

Par tâtonnement, puis par interpolation linéaire on trouve un taux de 13,51 %.

6.6 - Exercices

6.1 - Un particulier emprunte une somme de 180 000 dh et s’engage à verser, pendant 4 ans, à la fin de chaque année de l’emprunt l’intérêt de la dette. Sachant que l’amortissement se fait en deux temps, une moitié à la fin de la 2ème année et l’autre moitié à la fin de la 4ème année, construire le tableau d’amortissement de cet emprunt. Taux : 11 % l’an.

6.2 - Un emprunt de 215 000 dh est remboursable en 5 annuités la 1ère étant payable un an après la date du contrat. Sachant que l’amortissement augmente chaque année de 10 000 dh, construire le tableau d’amortissement de l’emprunt considéré. Taux : 10,5 % l’an.

6.3 - Un emprunt de 134 800 dh est remboursable en 8 mensualités constantes, la 1ère étant payable un mois après la date du contrat. On donne pour cet emprunt la 40ème ligne du tableau d’amortissement est :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>Amortis</th>
<th>Mensualité</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>40</td>
<td>93 070,00</td>
<td>116,84</td>
<td>.......</td>
<td>2 786,84</td>
</tr>
</tbody>
</table>
a) Sachant que l'amortissement augmente chaque mois de 30 dh, établir les lignes n° 41, 42 et 43 du tableau d'amortissement.
b) Quelle aurait été la ligne n°40 si les mensualités étaient constantes ?

**6.4** - Un industriel a contracté auprès d'une banque un emprunt de 450 000 dh au taux de 13,5 % l'an. Cet emprunt est remboursable en 6 annuités, la 1ère étant payable un an après la date du contrat.
a) Construire la 3ème ligne du tableau d'amortissement.
b) Déterminer la dette qui reste à payer :
   - Juste après le paiement de la 4ème annuité
   - 3 mois après le paiement de la 3ème annuité.

**6.5** - Un emprunt de 420 000 dh est remboursable en 5 annuités constantes immédiates. Taux : 11 % l'an, TVA : 10 % sur les intérêts. Construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.
a) amortissements constantes
b) annuités constantes.

**6.6** - On dispose de quelques éléments du tableau d'amortissement d'un emprunt remboursable par le versement d'annuités constantes la 1ère étant payable un an après la date du contrat :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>1</th>
<th>Amortis</th>
<th>Annuité</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>.....</td>
<td>72 000</td>
<td>.....</td>
<td>106 190,50</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>.....</td>
<td>.....</td>
<td>.....</td>
<td>.....</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>.....</td>
<td>42 888,56</td>
<td>.....</td>
<td>.....</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>.....</td>
<td>.....</td>
<td>.....</td>
<td>.....</td>
</tr>
</tbody>
</table>

a) Déterminer le taux d'intérêt.
b) Calculer le nominal de l'emprunt.
c) Quelle est la durée de l'emprunt ?

---

**Mathématiques Financières**

**6.7** - Un emprunt de 500 000 dh est remboursable par le versement de 6 annuités constantes avec un différé de 2 ans pendant lesquelles l'emprunteur ne verse aucune somme d'argent à l'organisme prêteur. Taux d'intérêt : 12 %. Construire le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré.

**6.8** - Dans le cadre du crédit jeune promoteur, une personne emprunte un capital de 375 000 dh au taux de 9 %. TVA : 7 % des intérêts. Cet emprunt est remboursable par le versement de 5 annuités constantes avec un différé de 2 ans pendant lequel l'emprunteur ne verse que l'intérêt de la dette (TVA comprise). Construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.

**6.9** - Une personne emprunte le 01/10/05 la somme de 320 000 dh et s'engage à verser pendant 10 ans les intérêts de la dette. Le capital emprunté est remboursé en bloc à la fin de la 10ème année. Taux : 12 % l'an. Par ailleurs, et dans le but de préparer l'échéance de ce paiement l'emprunteur convient avec un organisme de capitalisation d'effectuer des versements constants. Date du 1er versement : 01/10/06. Date du dernier versement : 01/10/2014. Taux : 9 % l'an.
a) Calculer l'amontie de placement.
b) Combien l'emprunteur perd-il en capital, par rapport au système d'amortissement par annuités constantes ?

**6.10** - Un emprunt de 260 000 dh est remboursable en bloc à la fin de la 6ème année. Pendant cette période l'emprunteur ne verse que l'intérêt de la dette (à la fin de chaque année de l'emprunt). Taux : 13 % l'an. L'emprunteur s'engage alors à verser à un organisme de capitalisation 5 annuités constantes de 37 330,67 dh chacune, le dernier versement ayant lieu un an avant le remboursement de la dette. Taux : 8,5 % l'an.
a) Combien lui manque-t-il à la fin de la 6ème année pour rembourser la dette contractée ?
b) Calculer le taux effectif de l'emprunt.
7 Les emprunts Obligataires

7.1 - Définition
L'emprunt obligataire se caractérise par un nominal trop élevé de la dette. Ce nominal est divisé en plusieurs titres, d'égal valeur nominale, appelés obligations :
C = NV C représente le nominal de la dette ;
N le nombre d'obligations émises par l'emprunteur (entreprise ou l'État),
V la valeur nominale d'une obligation. Les prêteurs souscrivent aux N obligations et aident ainsi les C dehors dont l'emprunteur a besoin.

7.2 - Amorissements des emprunts obligataires
Le système le plus couramment utilisé est celui de l'amortissement à l'aide d'annuités.
A la fin de la première année l'emprunteur verse un intérêt Vi, appelé coupon, à chacune des N obligations ; en plus de cet intérêt il verse un amortissement M₁ :
a₁ = Ci + M₁ = NVi + M₁

M₁ sert au rachat de m₁ obligations, tirées au hasard. Ces obligations remboursées sont dites amorties, elles perdent toute existence. Après le paiement de la première annuité il ne restera plus que N₁ obligations :
Mathématiques Financières

N1 = N - m1

Le capital restant dû est alors :
\[ C_1 = N_1 V \]

A la fin de la deuxième année l'emprunteur verse une deuxième annuité :
\[ A_2 = C_1 i + M_2 = N_1 Vi + m_2 V \]

Chacune des N1 obligations reçoit un coupon Vi. L'amortissement M2 est réparti entre m2 obligations, tirées, là également au hasard. Il ne restera plus que N2 obligations.
\[ N_2 = N_1 - m_2 \] et ainsi de suite ...

Le tableau d'amortissement se présente comme suit :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Année</th>
<th>CDP</th>
<th>Intérêt</th>
<th>Nbre d'obligations amorties (NOA)</th>
<th>Amortissement</th>
<th>Annuité</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>C = NV</td>
<td>I1 = C1 = N1 Vi</td>
<td>m1</td>
<td>M1 = m1 V</td>
<td>a1 = C1 + M1</td>
<td>C1 = C - M1</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>C1 = N1 V</td>
<td>I2 = C1 i + C1 Vi</td>
<td>m2</td>
<td>M2 = m2 V</td>
<td>a2 = C1 i + M2</td>
<td>C2 = C1 - M2</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>M = m1 V</td>
<td>a = C0 i + M</td>
<td>C0 = 0</td>
</tr>
<tr>
<td>a</td>
<td>C_p = N_p V</td>
<td>I_p = C_p i + C_p Vi</td>
<td>m_p</td>
<td>M_p = m_p V</td>
<td>a_p = C_p - i M_p</td>
<td>C_p = 0</td>
</tr>
</tbody>
</table>

1) On a, bien entendu :
\[ C = M_1 + M_2 + \ldots + M_n \]
Ce qui se traduit par :
\[ N = m_1 + m_2 + \ldots + m_n \]

2) A la fin de la nième année on a :
\[ C_{n-1} = M_n \]
Ou encore :
\[ N_{n-1} = m_n \]

Exemple
Un emprunt de nominal 12 750 000 dh est divisé en 7 500 obligations
Taux : 12 % l'an. Sachant que la société émettrice rachète à la fin de chaque année, successivement, les nombres suivants d'obligations : 1000, 1200, 1 050, 1 250, 1 450 et 1 550

7.3 - Amortissement par annuités constantes

Égalisons deux annuités successives :
\[ a_p = N_{p-1} Vi + m_p V \]
et
\[ a_{p+1} = N_p Vi + m_{p+1} V \]

\[ a_p = a_{p+1} \iff N_{p-1} Vi + m_p V = N_p Vi + m_{p+1} V \]

Or
\[ N_p = N_{p-1} - m_p \]

D'où
\[ N_{p-1} Vi + m_p V = (N_{p-1} - m_p) Vi + m_{p+1} V \]

Ce qui donne :
\[ m_{p+1} = m_p (1 + i) \]

Les nombres d'obligations amorties sont en progression géométrique de raison (1+i). Calculons le 1er terme de cette progression :
N = m₁ + m₂ + ... + mₙ
N = m₁(1 + i) + m₂(1 + i)² + ... + mₙ(1 + i)ⁿ⁻¹

Ce qui donne :

\[ m₁ = \frac{N}{\frac{1}{(1+i)^n - 1}} \]

It est important de souligner que les nombres d'obligations amorties sont entiers.

**Exemple**

Un emprunt de 32 000 000 dh est divisé en 16 000 obligations. Taux : 12% l'an. Remboursement sur 6 ans par annuités constantes. Construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Il faudra, tout d'abord, construire les nombres d'obligations amorties :

\[ m₁ = 16 000 \times 0,12 = 1971,61 \]
\[ m₂ = \frac{1971,61 \times 1,12}{2208,20} = 2208,20 \]
\[ m₃ = \frac{2208,20 \times 1,12}{2473,19} = 2473,19 \]
\[ m₄ = \frac{2473,19 \times 1,12}{2769,97} = 2769,97 \]
\[ m₅ = \frac{2769,97 \times 1,12}{3102,37} = 3102,37 \]
\[ m₆ = \frac{3102,37 \times 1,12}{3474,65} = 3474,65 \]

Les nombres ainsi obtenus sont purement théoriques puisque les nombres d'obligations amorties doivent être entiers. Pour arrondir, ces nombres, plusieurs procédés peuvent être retenus, on adoptera celui des cumuls.

* On fait le cumul des nombres obtenus précédemment
* On arrondit ensuite à l'entier le plus voisin (5 et plus par excès, moins de 5 par défaut).
* Par soustraction on obtient les nombres d'obligations arrondis.

Dans l'exemple on a :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Nombres Théoriques</th>
<th>Cumuls</th>
<th>Cumuls arrondis</th>
<th>N° d'obligations arrondis</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1 971,61</td>
<td>1 971,61</td>
<td>1 972</td>
<td>1 972</td>
</tr>
<tr>
<td>2 208,20</td>
<td>4 179,82</td>
<td>4180</td>
<td>2 208</td>
</tr>
<tr>
<td>2 473,19</td>
<td>6 653,01</td>
<td>6 653</td>
<td>2 473</td>
</tr>
<tr>
<td>2 769,97</td>
<td>9 422,98</td>
<td>9 423</td>
<td>2 770</td>
</tr>
<tr>
<td>3 102,37</td>
<td>12 525,35</td>
<td>12 525</td>
<td>3 102</td>
</tr>
<tr>
<td>3 474,65</td>
<td>16 000,00</td>
<td>16 000</td>
<td>3 475</td>
</tr>
</tbody>
</table>

7.4 - Amortissement constant

L'emprunteur rachète, chaque année, un même nombre d'obligations. La construction du tableau d'amortissement ne semble pas poser de problèmes.

**Exemple**

Une grande entreprise émet 16 000 obligations de 2 000 dh chacune. Amortissement constant sur 5 ans. Taux : 12% l'an. Construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Chaque année la société rembourse 3 200 obligations

\[(16 000 : 5 = 3 200), d'où le tableau d'amortissement :\]

Les sommes sont exprimées en milliers de dh.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>NOA</th>
<th>AMORT</th>
<th>ANNUL</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>32 000,00</td>
<td>3 840,00</td>
<td>3 200</td>
<td>6 400,00</td>
<td>12 000,00</td>
<td>25 600,00</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>25 600,00</td>
<td>3 072,00</td>
<td>3 200</td>
<td>6 400,00</td>
<td>9 472,00</td>
<td>19 200,00</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>19 200,00</td>
<td>2 304,00</td>
<td>3 200</td>
<td>6 400,00</td>
<td>6 804,00</td>
<td>12 800,00</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>12 800,00</td>
<td>1 536,00</td>
<td>3 200</td>
<td>6 400,00</td>
<td>7 936,00</td>
<td>6 400,00</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>6 400,00</td>
<td>768,00</td>
<td>3 200</td>
<td>6 400,00</td>
<td>7 168,00</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>
7.5 - Remboursement des obligations à une valeur supérieure à la valeur nominale

Dans certains cas le remboursement des obligations s'effectue à une valeur *R*, supérieure à la valeur *V*. L'amortissement contenu dans les annuités s'effectue au pair (c'est à dire à la valeur nominale); l'intérêt est calculé à partir de la valeur nominale, mais au moment du remboursement on verse à l'obligataire R dh par obligation, soit une prime égale à R-V. Il s'agit là d'une mesure d'encouragement à la souscription.

En intégrant la prime R-V par obligation dans le tableau d'amortissement, celui-ci se trouve modifié. Dans le cas des annuités constantes on ajoute une somme en progression géométrique, en se retrouve, en définitive, avec une annuité en augmentation d'année en année, en d'autres termes, l'annuité effective n'est plus constante:

\[ a_p = N_p V_i + m_p V + m_p (R-V) \]

\[ a_p = \text{constante} \]

Il est, cependant, possible de rendre l'annuité effective (compte tenu de la prime) constante - Écrivons pour cela deux annuités successives:

\[ a_p = N_p V_i + m_p R \]
\[ a_{p+1} = N_{p} V_i + m_{p+1} R \]

Or:

\[ N_p = N_{p-1} - m_p \quad \text{et} \quad a_p = a_{p+1} \]

Ce qui donne:

\[ m_{p+1} R = m_p R + M_p V_i \]

En divisant les deux membres par *R* on obtient:

\[ m_{p+1} = m_p \left(1 + IV/R \right) \]

Les nombres d'obligations amorties sont donc en progression géométrique de raison:

\[ 1 + i \]

avec

\[ i = i V/R \]

et donc de premier terme:

\[ m_1 = N \left(1 + i \right)^n - 1 \]

Exemple

Un emprunt de 80 000 000 dh est divisé en 20 000 obligations. Amortissement par annuités constantes sur 8 ans. Taux 13,5 % l'an. Sachant que le remboursement s'effectue à 4 250 dh par obligation. Construire le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré.

\[
\begin{align*}
V &= 80 000 000 = 4 000 \text{ dh} \\
20 000 &= 4 250 \\
&= \ 0,135 \quad 4 000 = 0,1271 \\
m_1 &= 20 000 \quad 0,1271 = 1 584,68 \\
&= 1,1271 - 1 \\
m_2 &= 1 785,03 \\
m_3 &= 2 012,96 \\
m_4 &= 2 268,72 \\
m_5 &= 2 556,98 \\
m_6 &= 2 881,87 \\
m_7 &= 3 248,04 \\
m_8 &= 3 660,73 \\
\end{align*}
\]

Les nombres sont arrondis par le procédé des cumuls

<table>
<thead>
<tr>
<th>Numéro</th>
<th>Théoriques</th>
<th>Cumuls</th>
<th>Cumuls arrondis</th>
<th>Numéro d'obligation arrondis</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>1 584,68</td>
<td>-1 584,68</td>
<td>1 585</td>
<td>1 585</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>1 785,03</td>
<td>-1 370,71</td>
<td>1 371</td>
<td>1 786</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>2 012,96</td>
<td>5 385,66</td>
<td>5 384</td>
<td>2 013</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>2 268,72</td>
<td>7 652,38</td>
<td>7 652</td>
<td>2 268</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>2 556,98</td>
<td>10 209,77</td>
<td>10 209</td>
<td>2 557</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>2 881,87</td>
<td>13 091,24</td>
<td>13 091</td>
<td>2 882</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>3 248,04</td>
<td>16 339,27</td>
<td>16 339</td>
<td>3 248</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>3 660,73</td>
<td>20 000,00</td>
<td>20 000</td>
<td>3 661</td>
</tr>
</tbody>
</table>

* Les sommes sont exprimées en milliers de dh.
7.6 - Calcul du taux de rendement

Quand le remboursement de l'obligation s'effectue à la valeur R (-V) alors la prime perçue R-V peut être considérée comme partie intégrante de l'intérêt. Dans ce cas l'obligataire réalise un taux de rendement supérieur au taux d'intérêt.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent et calculons le taux de rendement pour l'obligataire remboursé au premier tour, au deuxième tour et enfin au huitième tour.

*Obligation remboursée au premier tirage

A la date 0 il verse 4 000 dh, à la date 1 il reçoit avec le coupon de 540 dh (4 000 x 0,135) la valeur de 4 250 dh.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Époque</th>
<th>Débit</th>
<th>Crédit</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0</td>
<td>4 000</td>
<td>-</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>-</td>
<td>540</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>-</td>
<td>4 790</td>
</tr>
</tbody>
</table>

A la date 1 on écrit :

\[ 4 000 (1 + i) = 4 790 \]

\[ t = 0,1975 \]

Soit un taux de rendement de 19,75 % l'an

Obligation remboursée au deuxième tire.

A la date 0 il verse 4 000 dh, à la date 1 il reçoit 540 dh et à la date 2 : 4 790 dh.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Époque</th>
<th>Débit</th>
<th>Crédit</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0</td>
<td>4 000</td>
<td>-</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>-</td>
<td>540</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>-</td>
<td>4 790</td>
</tr>
</tbody>
</table>

A la date 2 on a :

\[ 4 000 (1 + i)^2 = 540 (1 + i) + 4 790 \]

Ou encore

\[ 4 000 (1 + i)^2 - 540 (1 + i) - 4 750 = 0 \]

On posant \( T = 1 + i \) on se retrouve avec une équation du second degré :

\[ 4 000T^2 - 540T - 4 790 = 0 \]

\[ \Delta = 4 485,53 \]

Ce qui donne \( T = 1,1639 \) (la solution négative étant rejetée) ou encore \( i = 0,1639 \) soit un taux de rendement de 16,39% l'an.

*Obligation remboursée au huitième tirage.

Ici on a

<table>
<thead>
<tr>
<th>Époque</th>
<th>Débit</th>
<th>Crédit</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0</td>
<td>4 000</td>
<td>-</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>540</td>
<td>-</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>540</td>
<td>-</td>
</tr>
<tr>
<td>...</td>
<td>...</td>
<td>...</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>-</td>
<td>4 790</td>
</tr>
</tbody>
</table>

A la date 8 on a :

\[ 4 000 (1 + i)^8 = 540 (1 + i)^8 - 1 + 4 250 \]

Ou encore :

\[ 4 000 (1 + i)^8 - 540 (1 + i)^8 - 1 = 4 250 \]

En procédant par tâtonnement on obtient :
Mathématiques Financières

7.7 – Exercices

7.1 - Un emprunt est divisé en N obligations. La société émettrice de ces obligations verse : 6 900 000 dh d'intérêts à la fin de la 1ère année soit 575 dh par obligation, et à la fin de chaque année un amortissement de 10 000 000 dh. Le remboursement se fait alors à la valeur nominale. Taux : 11,5 % l'an.

a) Calculer le nominale de la dette, la valeur nominale d'une obligation et la durée de l'emprunt.

b) Étudier le comportement de l'annuité.

7.2 - Une société émet un emprunt de 33 000 000 dh divisé en 22 000 obligations.

Taux : 12,5 %.

Sachant que chaque année le nombre d'obligations amorties augmente de 300 et qu'à la fin de la 1ère année la société achète 1 000 obligations.

a) Calculer la durée de l'emprunt ;

b) Construire le tableau d'amortissement.

7.3 - Un emprunt de 50 000 000 dh est divisé en 10 000 obligations. Le remboursement s'effectue, chaque année, à une valeur de 5 500 dh et ceci pendant 5 ans. Taux : 12 %. La somme des intérêts et du remboursement à la valeur de 5 500 dh par obligation est constante.

a) Calculer les nombres théoriques d'obligations amorties, faire le cumul de ces nombres et déduire les nombres d'obligations à racheter par la société chaque année.

b) Construire le tableau d'amortissement de l'emprunt qui vous a été présenté.

7.4 - Une société émet 18 000 obligations de nominal 3 500 dh chacune. Taux : 10,5 % l'an. Durée de l'emprunt : 8 ans. Au niveau du remboursement, cette société verse chaque année une prime de :

30 100 dh pour la 1ère obligation sortie au tirage ;
80 000 dh pour les 10 obligations qui suivent ;
5 000 dh pour les 50 obligations qui viennent.

---

D'où \[ X = 13,7 + 0.25 \left( \frac{4250 - 4131,12}{4264,66 - 4131,12} \right) = 13,97 \]

Soit un taux de rendement de 13,97 % l'an

1) On remarque que le taux de rendement, qui est de toutes façons supérieur à 13,5 %, va en diminuant. Cette situation est tout à fait normale puisque la prime, qui est de 250 dh par obligation, à de moins en moins de valeur, suivant que celle-ci soit versée au 1er tirage, au 2ème tirage... ou au dernier tirage.

2) Le taux de rendement ainsi calculé n'a de signification que pour l'obligataire, c'est le taux d'intérêt qui est réellement réalisé, compte tenu de la prime de remboursement. Pour l'emprunteur, le versement d'une prime, se traduit par un coût supplémentaire qui surcharge les frais financiers. Il serait, d'autre part, intéressant de calculer, à ce niveau le taux effectif de l'emprunt (cas d'annuités constantes):

L'emprunteur reçoit : 80 000 000 dh à l'époque 0
Il verse 17 536 250 dh à l'époque 1
Il verse 17 534 600 dh à l'époque 2
Il verse 17 534 910 dh à l'époque 3
Il verse 17 531 640 dh à l'époque 4
Il verse 17 535 170 dh à l'époque 5
Il verse 17 535 640 dh à l'époque 6
Il verse 17 534 860 dh à l'époque 7
Il verse 17 536 190 dh à l'époque 8

Ce qui donne, par étirement, puis par interpolation linéaire un taux de 14,5 %
Ces obligations perdent alors le droit après au remboursement. L'amortissement s'effectue par annuités constantes. Construire le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré.

7.5 - Un emprunt de 62 500 000 dh est divisé en 25 000 obligations. Taux : 13 % l'an. Durée de l'emprunt 8 ans. Sachant que le remboursement s'effectue à une valeur de 2 800 dh par obligation calculer le taux auquel l'argent est effectivement placé pour l'obligataire remboursé :
- à la fin de la 1ère année ;
- à la fin de la 2ème année ;
- à la fin de la 8ème année.
Interpréter

7.6 - Un emprunt de 48 750 000 dh est divisé en 15 000 obligations Taux : 12,5% l'an. Durée de l'emprunt : 6 ans.
Le remboursement s'effectue à la valeur nominale mais les titres sont achetés, au moment de l'émission, à 3 000 dh l'unité.
a) Calculer la prime d'émission accordée par la société.
b) Calculer le taux de rendement pour l'obligataire remboursé :
- à la fin de la 1ère année ;
- à la fin de la 2ème année ;
- à la fin de la 6ème année.
Interpréter.

7.7 - Pour le remboursement d'un emprunt la société émettrice s'engage à racheter les nombres d'obligations suivantes : 
- 3 595 à la fin de la 1ère année ;
- 3 999 à la fin de la 2ème année ;
- 4 450 à la fin de la 3ème année.
Le taux de l'emprunt est alors 7% l'an (T étant entier) À la fin de la 1ère année l'amortissement s'élève à 16 177 500 dh, le remboursement à 17 256 000 dh et enfin l'annuité effective à 29 408 000 dh.
a) Quel est le système d'amortissement qui est adopté ici ?
b) Déterminer le taux T et le nominal de la dette ;
c) Calculer la durée de l'emprunt.

7.8 - Un emprunt de 41 250 000 dh est divisé un 15 000 obligations Taux : 12 % l'an. Durée de l'emprunt : 5 ans. Valeur de remboursement de l'obligation : 3 000 dh. Déterminer le taux réel de l'emprunt dans chacune des situations suivantes :
a) amortissements constants ;
b) annuités constantes (intérêts + remboursements constants).
8

La rentabilité des investissements

Un projet d'investissement est l'engagement immédiat de capitaux sous diverses formes, en espérant que leur utilisation réaliserà des bénéfices. Investir, c'est aussi, apprécier la rentabilité d'un projet, c'est comparer ce qu'il rapporte à ce qu'il coûte.

La décision d'investissement est souvent précédée d'un diagnostic économique et financier et implique, par conséquent, une vision de l'avenir. Toute décision comporte aussi des éléments de risques car les prévisions des recettes dans le futur reposent toujours sur des hypothèses et peuvent être parfois très différentes de la réalité.

8.1 - Position du problème

Lorsqu'une entreprise réalise un investissement, elle veille, évidemment, à ce qu'il soit rentable. La somme des surplus monétaires dégagés par l'investissement doit permettre de :

→ Récupérer la mise de fonds initiale ;
→ Rémunérer le capital investi.

Analyser financièrement un investissement c'est comparer les utilisations des ressources et des revenus futurs dédiés, sur toute la durée de vie de l'investissement. On procède, alors, à l'élaboration de prévision des recettes.
8.2 - Calcul des flux nets de trésorerie (FNT)

On mesure la rentabilité d'un investissement par la différence entre le coût de cet investissement et la somme de flux nets de trésorerie dégagés à la fin des n périodes de prévisions appelés FNT. La période d'actualisation étant le moment de réalisation de l'investissement.

\[ \text{Dépense} \quad \text{FNT}_1 \quad \text{FNT}_2 \quad \text{FNT}_k \quad \text{FNT}_n \quad 1\% \]

initial

Les flux nets de trésorerie correspondent à la différence entre ce que rapporte l'investissement (chiffre d'affaires prévisionnel) et ce qu'il coûte (charges supplémentaires liées à l'investissement), en tenant compte, de l'incidence de la fiscalité et du mode de financement de l'investissement. Les flux nets de trésorerie peuvent être calculés à l'aide d'un tableau correspondant à la durée de vie de l'investissement.

Flux nets de trésorerie d'une période :

\[
\begin{align*}
\text{Chiffre d'affaires prévisionnel} & \quad - \quad \text{Les dépenses prévisionnelles} \\
\quad & \quad - \quad \text{Dotations aux amortissements} \\
\quad = & \quad \text{Résultat d'exploitation} \\
\quad & \quad - \quad \text{Impôt sur les sociétés (15)} \\
\quad = & \quad \text{Résultat après impôt} \\
\quad & \quad + \quad \text{Dotations aux amortissements} \\
\quad = & \quad \text{Flux nets de trésorerie}
\end{align*}
\]

1) Le mode de l'amortissement de l'investissement peut être linéaire ou dégressif.

2) Les flux nets de trésorerie sont appelés, également, cash flow ou capacité d'autofinancement.

\[ \text{FNT} = \text{Résultat net} + \text{Dotations} \]

3) On tient compte dans le calcul des (FNT) de l'amortissement comptable, qui est différent de l'amortissement financier (remboursement d'un emprunt).

4) Dans les exemples qui vont suivre, on tiendra compte d'un taux de l'impôt sur les bénéfices des sociétés (15) de 36 % pour toute la durée de l'investissement.

5) Lorsque l'investissement à une valeur résiduelle (valeur de revende à la fin de l'amortissement), il convient de tenir compte du traitement fiscal car la valeur résiduelle constitue une plus-value fiscale et est donc imposable à 36 %.

Nous supposons dans les deux exemples qui vont suivre que le financement des investissements est fait à partir de fonds propres.

Exemple

Une société dans le secteur agro-alimentaire veut investir pour améliorer ses stations de conditionnement. Elle hésite entre deux investissements :

Investissement 1

- \( I_0 = 750 \text{ 000dh} \)
- Amortissement linéaire sur 4 ans.
- Valeur résiduelle ou bout de 4 ans : 480 000 dh.
- Dépenses d'exploitation de la première année : 150 000 dh.
- Recettes d'exploitation de la première année : 360 000 dh.

Les dépenses augmentent ensuite de 20 000 dh par an et les recettes augmentent de 10 % par an.

Investissement 2

- \( I_0 = 300 \text{ 000dh} \)
- Amortissement linéaire sur 4 ans.
- Valeur résiduelle nulle ou bout de 4 ans
- Dépenses d'exploitation constantes : 70 000 dh par an ;
- Recettes d'exploitation de la première année : 180 000 dh et augmentent ensuite de 10 % par an.

Nous tenons compte d'un taux de l'impôt sur les sociétés de 36% sur toute la période étudiée.

Calculons les flux nets de trésorerie
### Investissement 1

<table>
<thead>
<tr>
<th>Années</th>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>3</th>
<th>4</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Recettes encaissées (1)</td>
<td>360 000</td>
<td>396 000</td>
<td>435 600</td>
<td>479 160</td>
</tr>
<tr>
<td>- Dépenses</td>
<td>150 000</td>
<td>170 000</td>
<td>190 000</td>
<td>210 000</td>
</tr>
<tr>
<td>- Dotations aux amortissements (2)</td>
<td>187 500</td>
<td>187 500</td>
<td>187 500</td>
<td>187 500</td>
</tr>
<tr>
<td>= Résultat avant IS</td>
<td>22 500</td>
<td>38 500</td>
<td>58 100</td>
<td>81 660</td>
</tr>
<tr>
<td>- Impôt (36 %)</td>
<td>- 8 100</td>
<td>13 860</td>
<td>20 916</td>
<td>29 398</td>
</tr>
<tr>
<td>= Résultat après IS</td>
<td>14 400</td>
<td>24 640</td>
<td>37 184</td>
<td>52 262</td>
</tr>
<tr>
<td>+ Dotations</td>
<td>187 500</td>
<td>187 500</td>
<td>187 500</td>
<td>187 500</td>
</tr>
<tr>
<td>= Flux nets de trésorerie (FNT)</td>
<td>201 900</td>
<td>212 140</td>
<td>224 684</td>
<td>239 762</td>
</tr>
</tbody>
</table>

(1) En progression géométrique de 10 % par an.
(2) $750 000/4 = 187 500$ dh par an.
(3) Il faut ajouter à cette somme $480 000 \times 0,64 = 307 200$ dh (valeur résiduelle nette d'impôt).

### Investissement 2

<table>
<thead>
<tr>
<th>Années</th>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>3</th>
<th>4</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Recettes encaissées</td>
<td>180 000</td>
<td>198 000</td>
<td>217 800</td>
<td>239 580</td>
</tr>
<tr>
<td>- Dépenses</td>
<td>70 000</td>
<td>70 000</td>
<td>70 000</td>
<td>70 000</td>
</tr>
<tr>
<td>- Dotations</td>
<td>75 000</td>
<td>75 000</td>
<td>75 000</td>
<td>75 000</td>
</tr>
<tr>
<td>= Résultat avant IS</td>
<td>35 000</td>
<td>53 000</td>
<td>72 800</td>
<td>94 580</td>
</tr>
<tr>
<td>- Impôt (36 %)</td>
<td>12 600</td>
<td>19 080</td>
<td>26 208</td>
<td>34 049</td>
</tr>
<tr>
<td>= Résultat après IS</td>
<td>22 400</td>
<td>33 920</td>
<td>46 592</td>
<td>50 531</td>
</tr>
<tr>
<td>+ Dotations</td>
<td>75 000</td>
<td>75 000</td>
<td>75 000</td>
<td>75 000</td>
</tr>
<tr>
<td>= FNT</td>
<td>97 400</td>
<td>108 920</td>
<td>121 592</td>
<td>135 531</td>
</tr>
</tbody>
</table>

### 8.3 - Les principaux critères de sélection

#### 8.3.1 - La valeur actuelle nette (VAN)

La valeur actuelle nette, ou VAN, d'un investissement est égal à la différence entre les flux nets de trésorerie et le coût de l'investissement, actualisés à la date $0$.

\[
VAN = - I_0 + \sum_{k=1}^{n} FNT_k (1+i)^k
\]

Avec : $FNT_k = $ le flux net de trésorerie de la période $k$
$I_0 = $ l'investissement à la date $0$.

Un projet est rentable si la VAN est positive ; une valeur actuelle nette égale à $0$ signifie, en effet, que le projet permet de rembourser et de rembourser le capital investi mais qu'il ne laisse pas de surplus pour l'entreprise.

1) Un investissement est rentable au taux $i$ si la VAN est positive à ce taux.
2) La VAN est une fonction croissante du taux d'actualisation retenu. Elle dépend directement du choix de ce taux.
3) Le taux d'actualisation utilisé est généralement le taux habituel de la rentabilité des capitaux investis par l'entreprise. Il dépend principalement de l'activité de l'entreprise, du taux de rentabilité connu d'un autre projet, du taux de rendement d'un autre projet, de l'inflation etc.

#### Exemple

Repremons l'exemple précédent et calculons les valeurs actuelles nettes des deux projets au taux annuel de $14$ %.

### Investissement 1

<table>
<thead>
<tr>
<th>Année</th>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>3</th>
<th>4</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Flux nets de trésorerie</td>
<td>201 900</td>
<td>212 140</td>
<td>224 684</td>
<td>239 762</td>
</tr>
<tr>
<td>Flux nets de trésorerie actualisés à l'échéance 0</td>
<td>$177 105,28$</td>
<td>$263 234,84$</td>
<td>$151 655,30$</td>
<td>$141 958,35$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

\[ FNT (1+i)^k = 201 900 \times (1,14)^{-1} \]
VAN₁ = -750 000 + \sum_{k=1}^{n} FNTₖ (0,14)^{-k} + 307 200 (1,14)^{-4}  \\
\text{Initial} \quad \text{Flux nets de trésorerie} \quad \text{Valeur résiduelle nette} \\
\text{Investissement} \quad \text{actualisés à l'époque 0} \quad \text{d'impôt actualisée à l'époque 0}. \\
VAN₁ = -750 000 + 633 953,75 + 181 887,06 \\
VAN₁ = 65 840,81 dh.

\textbf{Investissement 2}

<table>
<thead>
<tr>
<th>Année</th>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>3</th>
<th>4</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Flux nets de trésorerie</td>
<td>97 400</td>
<td>108 920</td>
<td>121 592</td>
<td>135 531</td>
</tr>
<tr>
<td>Flux nets de trésorerie actualisés à l'époque 0</td>
<td>85 438,59</td>
<td>83 810,40</td>
<td>82 071,13</td>
<td>80 245,23</td>
</tr>
</tbody>
</table>

VAN₂ = -300 000 + 331 565,35 dh. \\
VAN₂ = 31 565,35 dh.

Les deux investissements sont donc rentables au taux d'actualisation de 14 %. Ici les deux investissements ne sont pas de montants égaux. On ne peut pas choisir celui qui dégage la plus grande VAN. Dans notre exemple, il faut choisir celui qui donne l'indice de profitabilité le plus grand :

Indice de Profitabilité = \frac{\sum FNTₖ \text{ actualisés} + \text{Valeur résiduelle nette d'impôt actualisée}}{\text{coût de l'investissement}} \Rightarrow I₀

(IP)₁ = \frac{815 840,81}{750 000} \approx 1,088 \quad (1 \text{ dh investi rapporte } 1,088 \text{ dh})

(IP)₂ = \frac{815 840,81}{750 000} \approx 1,105 \quad (1 \text{ dh investi rapporte } 1,105 \text{ dh})

On choisit donc le deuxième investissement

L'indice de profitabilité (IP) est calculé à chaque fois que les investissements ont des coûts initiaux différents. On choisit, alors, le projet d'investissement correspondant, au taux de profitabilité le plus élevé.

\textbf{8.3.2 - Le taux interne de rentabilité (TIR)}

La valeur actuelle nette d'un projet diminue au fur et mesure que le taux d'actualisation s'élève. On appelle taux interne de rentabilité (TIR) d'un projet : le taux qui permet d'égaliser la somme des valeurs actuelles des flux nets de trésorerie, y compris la valeur résiduelle actualisée à l'époque 0, au coût de l'investissement.

On écrit r le TIR, alors, VAN = 0 ;

r est tel que \[ I₀ = \sum_{k=1}^{n} FNTₖ (1 + r)^{-k} \]

\textbf{Exemple}

Reprenons les projets d'investissement 1 et 2 cités précédemment ;

\textbf{Pour l'investissement 1}

On cherche r tel que :

\[ 750 000 = 201 900 (1+r)^{-1} + 212 140 (1+r)^{-2} + 224 684(1+r)^{-3} + 239 762 (1+r)^{-4} + 307 200 (1+r)^{-4} \]

On procède par interpolation linéaire.

\[ \rightarrow \text{On sait que pour un taux de } 14 \%, \sum FNT(1+0,14)^{-k} = 65 840,06 \text{ dh.} \]

\[ \rightarrow \text{On sait, encore que plus le taux augmente, quand la VAN diminue. Par tâtonnement on trouve :} \]

\[
\begin{array}{c|c|c}
\text{Taux} & \text{VAN} \\
\hline
17\% & 9 707,06 \\
\hline
18\% & 0 \\
\hline
19\% & -7 676,12 \\
\end{array}
\]

\[ \text{TIR} - 17 = \frac{0 - 9 707,06}{-7 676,12 - 9 707,06} \rightarrow \text{D'où } \text{TIR} \approx 17,56\% \]

\textbf{Pour l'investissement 2}

On procède par interpolation linéaire

On a déjà trouvé la VAN = 31 565,35 dh à 14 %. Le TIR est donc supérieur à 14 %.

Par itérations successives on trouve ;
8.3.4 - Le délai de récupération (DR)
Le délai de récupération est le temps nécessaire pour que le montant cumulé des flux nets de trésorerie actualisés soit égal au capital investi. Il se calcule par interpolation linéaire.

Exemple

Reprenez les exemples 1 et 2 et calculez les délais de récupération au taux de 14%.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Année</th>
<th>Investissement 1</th>
<th>Investissement 2</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td></td>
<td>Flux nets de trésorerie actualisés</td>
<td>Cumul</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>201 900(1,14)^t</td>
<td>177 105,26</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>212 140(1,14)^t</td>
<td>340 340,1</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>224 684(1,14)^t</td>
<td>491 995,4</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>239 762(1,14)^t</td>
<td>633 953,75</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>307 200(1,14)^t</td>
<td>815 840,81</td>
</tr>
</tbody>
</table>

(1) Il s'agit de la valeur résiduelle actualisée.

1) On choisira le projet caractérisé par le délai de récupération le plus court.
2) Ce critère n'indique pas la rentabilité du projet.

8.4 - Comparaison des critères
Si on considère les projets isolément, les méthodes de la VAN et n'a TIR aboutissent à la même conclusion : les projets dont le taux interne de rentabilité est supérieur au taux d'actualisation choisi par l'entreprise ont une valeur actuelle nette positive doivent être retenus.

Si on considère des investissements concurrents, l'application des trois méthodes VAN, TIR, et DR peut conduire à des conclusions différentes. On adopte généralement le TIR même s'il est parfois iréaliste (quand il est très élevé) car la VAN et le DR dépendent du choix du taux d'actualisation.
En effet, la VAN permet uniquement de dire si un projet peut être sélectionné ou non, en fonction du choix arbitraire d'un taux d'actualisation.

Dans les exemples de ce chapitre, le calcul des flux nets de trésorerie a pris en compte le financement des investissements sur des fonds propres de l'entreprise. N'oublions pas qu'il existe d'autres possibilités de financement :
- par emprunt bancaire,
- par crédit-bail,
- par un financement mixte (emprunt et fonds propres).

Il va sans dire que l'incidence du mode de financement sur le choix d'un projet est déterminante car les flux nets de trésorerie vont s'en ressentir et, par conséquent, la rentabilité d'un investissement dépendra davantage de son mode de financement, ce problème est traité dans le cadre des choix et non pas la rentabilité des investissements.

8.5 Exercices

8.1 - Un investissement de 3 500 000 dh permet des gains nets estimés :
* 1 000 000 dh à la fin de la 1ère année.
* 1 100 000 dh à la fin de la 2ème année.
* 1 300 000 dh à la fin de la 3ème année.
* 1 500 000 dh à la fin de la 4ème année.
La valeur résiduelle est estimée à 700 000 dh à la fin de la période d'utilisation

a) calculer la valeur actuelle des gains nets et la valeur résiduelle au taux de 18,75 % par an, puis à 19 % par an.
b) calculer alors le taux interne de rentabilité de l'investissement considéré.

8.2 - Un investissement de 450 000 dh doit procurer des gains nets estimés à :
* 120 000 dh à la fin de la 1ère année.
* 130 000 dh à la fin de la 2ème année.
* 135 000 dh à la fin de la 3ème année.
* 125 000 dh à la fin de la 4ème année.
* 110 000 dh à la fin de la 5ème année.
La valeur résiduelle est estimée à 90 000 dh
Déterminer le TIR de cet investissement sachant qu'il est voisin de 16 %.

8.3 - Une entreprise envisage l'achat d'un équipement pour accroître sa production. Elle hésite entre deux propositions :

- L'investissement A coûtant 900 000 dh qui devrait être utilisé pendant 5 ans. Cet investissement permettrait de réaliser des recettes supplémentaires de 1 440 000 dh par an pendant 5 ans. Les charges relatives à cet investissement sont estimées à 1 200 000 dh par an.

- L'investissement B coûte 960 000 dh et augmenterait le chiffre d'affaires annuel de 1 920 000 dh les 2 premières années, puis 1 200 000 dh les 3 années suivantes. Les charges relatives à cet investissement sont estimées à 1 440 000 dh les 2 premières années, puis 1 020 000 dh les années suivantes.
Les charges comprennent l'amortissement du matériel (180 000 dh par an pour l'investissement A et 192 000 dh par an pour l'investissement B). L'entreprise est soumise à l'impôt sur les sociétés de 35 % et utilise habituellement un taux d'actualisation de 12 %.
Les deux types de matériels ont des valeurs résiduelles nulles.

a) Calculer les valeurs actuelles nettes pour chaque investissement.
b) Déterminer les délais de récupération.
c) Déterminer les taux internes de rentabilité pour les deux types d'investissement.

8.4 - Un investissement dont le prix d'acquisition est de 700 000 dh procure pendant 9 ans des flux nets de trésorerie de 138 800 dh par an. Les flux sont établis selon deux hypothèses :

Hypothèse 1 : les FNT sont perçus en fin d'année.
Hypothèse 2 : les FNT sont perçus annuellement mais le premier dans 1 an et demi.

a) Déterminer le TIR dans les deux cas.
b) Étudier la rentabilité de l'investissement selon les deux hypothèses.

8.5 - Pour diversifier sa production une société a le choix entre les deux projets suivants :

* **Projet A**
  * Prix d'acquisition : 800 000 dh
  * Valeur résiduelle (hors impôt) : 50 000 dh
  * Durée de vie : 6 ans
Les flux nets de trésorerie (bénéfices nets + dotations aux amortissements) dégagés chaque année sont de 120 000 dh la première année et 220 000 dh pour les années suivantes.

**Projet B**

- **Prix d'acquisition**: 950 000 dh
- **Durée de vie**: 6 ans
- **Valeur résiduelle**: Nulle

Les flux nets de trésorerie sont constants durant toute la période d'amortissement et sont estimés à 250 000 par an.

a) **Calculer les VAN des deux projets au taux d'actualisation de 12%**. Peut-on conclure ?
b) **Déterminer les TIR relatifs aux projets d'investissement**. Que peut-on décider ?

**6.6** - Une entreprise envisage l'achat d'un équipement d'une valeur de 800 000 dh.
La durée de vie est de 4 ans et la valeur résiduelle est supposée nulle à la fin de la 4ème année. Les bénéfices nets supposés perçus en fin d'année sont estimés à 37 500 dh la 2ème année, puis 270 000 dh la 3ème année et 4ème année. Il n'y a pas de bénéfice pour la 1ère année. Taux d'actualisation retenu est de 15%.

a) **Calculer la VAN de cet investissement**.
b) **Déterminer le TIR. Interpréter**.
1.2 Soit I le montant des intérêts :

\[ I = 82500 \times 7 \times 11 = 5293,75 \text{ dh} \]

1 200

A la fin du placement, l'individu récupère une somme VD :

\[ VD = 82500 + 5293,75 = 87793,75 \text{ dh}. \]

Ou directement :

\[ VD = 82500 (1 + 11 \times 7) = 87793,75 \text{ dh}. \]

1 200

1.3 Nombre de jours entre la date de placement et la date de remboursement.

- Mois du Mai (3 1-27) 4
- Mois du Juin 30
- Mois de Juillet 31
- Mois d'août 8

Total de 73 jours

A la fin du placement on a une somme VD :

\[ VD = 25200 (1 + 12 \times 73) = 25813,8 \text{ dh} \]

36 000

1.4 Soit C_1 le plus petit capital, les deux capitaux C_1 et C_2 vérifient les relations (1) et (2) :

\[ C_2 - C_1 = 1000 \quad (1) \]

\[ C_1 \times 11 - C_2 \times 9 = 280 \quad (2) \]

De (1) on a : \[ C_2 = 1000 + C_1 \]

Remplaçons dans (2) :

\[ 22C_1 - 18(C_1 + 1000) = 28000 \]

\[ 4C_1 = 28000 + 18000 \]

D'où :

\[ C_1 = 11500 \text{ dh} ; C_2 = 12500 \text{ dh}. \]

1.5 Les calculs sont présentés dans le tableau suivant :

<table>
<thead>
<tr>
<th>C</th>
<th>capital</th>
<th>J</th>
<th>jours</th>
<th>i</th>
<th>t/100</th>
<th>C j i</th>
<th>C j</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>17 500</td>
<td>127</td>
<td>0,09</td>
<td>200 025</td>
<td>2 222 500</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>12 000</td>
<td>47</td>
<td>0,105</td>
<td>59 220</td>
<td>564 000</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>27 500</td>
<td>191</td>
<td>0,085</td>
<td>446 462,5</td>
<td>5 252 500</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

\[ \sum C_k t_k j_k \]

On sait que : taux moyen =

\[ \frac{\sum C_k j_k}{3} \]

Donc Taux moyen = 705707,5 = 0,087785 soit \( t_m = 8,78 \% \)

8 039 000

1.6 Soit C_1 le premier capital et C_2 le second.

On peut écrire :

\[ \left\{ \begin{array}{l}
C_1 t = 176000 \\
100 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}
C_1 = 176000 \\
100 \end{array} \right. \]

\[ C_2(t + 3) = 27500 \]

Puisque \( C_2 - C_1 = 3000 \)

alors :

\[ \begin{array}{l}
275000 - 176000 = 3000 \\
(t + 3) \end{array} \right. \]

Nous obtenons après transformations :

\[ 275 t - 176 t - 528 = 3 t(t + 3) \\
-3 t^2 + 90 t - 528 = 0 \]

Equation du second degré qu'il faut résoudre

\[ \Delta = 8100 - 6 336 = 1 764, \sqrt{\Delta} = 42 \]

\[ \Delta > 0 \] donc deux solutions :
1) Le placement 2 correspond à un taux effectif (ie) sur un an tel que:
\[ ie = \frac{0.068}{1 - 0.068 \times 360/360} = 0.07926 \] soit 7.926%.

On choisit donc le placement 2 car le taux d'intérêt correspondant est supérieur à celui du placement 1.

2) Si (i) est le taux d'intérêt simple précompté du placement 2. Il faut que le taux effectif correspondant soit égal à 7% d'où:
\[ ie = \frac{i - 0.07}{1 - i} = 0.07 \]

Donc \( i = 0.06542 \) soit \( i = 6.542\% \).

1.7 L'unité de temps étant la quinzaine civile entière l'intérêt \( t \) est:
\[ I = (25000 \times 8.5 \times 16 + 11000 \times 8.5 \times 11 + 4200 \times 8.5 \times 5) \times 400 \]
\[ I = (25000 \times 16 + 11000 \times 11 + 4200 \times 5) \times 8.5 \times 2400 \]
\[ I = 644,58 \text{ dh} \]

1.8 On a les données suivantes:
Capital: 12 000 dh
Nbre de jours: 120
Intérêt: 300 dh.

Dans la première ligne du tableau, le solde du livret est créditeur de 20 000 dh (date de valeur le 01/01/06). Dans la seconde ligne du tableau, le solde change de valeur au 01/02/06. On peut compléter la première ligne, en inscrivant le nombre de quinçaines durant lesquelles le solde est resté au niveau de 20 000 dh (deux quinçaines : du 01/06 au 01/02/06). Les intérêts sont alors à 8.5% sur 20 000 dh pendant deux quinçaines.

Après le retrait du 25 mars 06 (valeur 15/03/06) le solde s'élève à 11 500 dh, il ne se modifie en date de valeur que le 01/06/06. Mais le changement de taux de 01/04/06 oblige à décroître cette période en deux sous-périodes (du 15/03/06 au 01/04/06 et du 01/04/06 au 01/06/06) au cours desquelles le taux reste constant. Le solde définitif est au 1er juillet 2006 de 17 272.6 dh (on ajoute au solde à cette date : 16 500 dh le total des intérêts acquis au cours de toute la période : 772.6 dh).
### 1.11

<table>
<thead>
<tr>
<th>Date d'opération</th>
<th>Opération</th>
<th>Capitaux</th>
<th>Solde</th>
<th>Date de jours</th>
<th>Nbre de jours</th>
<th>Nombre</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>01/01</td>
<td>Solde créditeur</td>
<td>20000</td>
<td>20000</td>
<td>31/12</td>
<td>3</td>
<td>60000</td>
</tr>
<tr>
<td>05/01</td>
<td>Chèque CCEMA</td>
<td>18000</td>
<td>2000</td>
<td>03/01</td>
<td>6</td>
<td>12000</td>
</tr>
<tr>
<td>11/01</td>
<td>Virement Lydec</td>
<td>4000</td>
<td>2000</td>
<td>09/01</td>
<td>9</td>
<td>18000</td>
</tr>
<tr>
<td>20/01</td>
<td>Chèque IBENA</td>
<td>13000</td>
<td>15000</td>
<td>18/01</td>
<td>8</td>
<td>120000</td>
</tr>
<tr>
<td>24/01</td>
<td>Effet à encaissement</td>
<td>18000</td>
<td>3000</td>
<td>26/01</td>
<td>2</td>
<td>6000</td>
</tr>
<tr>
<td>27/01</td>
<td>Dépôt en espèces</td>
<td>2500</td>
<td>5500</td>
<td>28/01</td>
<td>3</td>
<td>16500</td>
</tr>
<tr>
<td>31/01</td>
<td>Totaux nombres</td>
<td></td>
<td>138000</td>
<td></td>
<td>94500</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>31/01</td>
<td>Totaux intérêts</td>
<td></td>
<td>46</td>
<td></td>
<td>21</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>31/01</td>
<td>Solde intérêts</td>
<td>25</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>31/01</td>
<td>Solde des capitaux</td>
<td></td>
<td>5475</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Diviseur débiteur**

\[
\frac{36000}{12} = 3000
\]

**Diviseur créditeur**

\[
\frac{36000}{8} = 4500
\]

**Intérêts débiteurs**

\[
\frac{138000}{300} = 46
\]

**Intérêts créditeurs**

\[
\frac{94500}{4500} = 21
\]

La solde des intérêts 46 - 21 = 25 dh (solde débiteur).
Le solde de capitaux est créditeur de : 5500 - 25 = 5475 dh.

---

### 2.1

#### 2.1.1

**Escompte commercial**

**Equivalence de capitaux à intérêt simple**

#### a)

<table>
<thead>
<tr>
<th>Effet</th>
<th>Échéance</th>
<th>Nombre de jours</th>
<th>Escompte</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>19000</td>
<td>13 septembre</td>
<td>100 + 2 = 102</td>
<td>732,14 (1)</td>
</tr>
<tr>
<td>4500</td>
<td>17 juillet</td>
<td>42 + 2 = 44</td>
<td>69,3</td>
</tr>
<tr>
<td>12000</td>
<td>3 août</td>
<td>59 + 2 = 61</td>
<td>25,62</td>
</tr>
<tr>
<td>1500</td>
<td>25 juin</td>
<td>20 + 2 = 22</td>
<td>20, (2)</td>
</tr>
<tr>
<td>26200</td>
<td></td>
<td></td>
<td>26200</td>
</tr>
</tbody>
</table>

- **Escompte**
- **Commission de manipulation**
- **Commission de courtier**
- **Agio H.T.**
- **TVA 10%**
- **Agio T.T.C.**

Net de négociation 26200 - 938,37 = 25261,63 dh

(1) Taux d'escompte est de 13,60% car le nombre de jours est supérieur à 90 jours.
(2) Minimum d'escompte car l'escompte effectif est inférieur à 20 dh.
b) 

<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th>Banque A</th>
<th>Banque B</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Escompte</td>
<td>27 500 x 10 x 75 = 572,92</td>
<td>27 500 x 10,5 x 75 = 601,57</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>36 000</td>
<td>36 000</td>
</tr>
<tr>
<td>Commission de manipulation</td>
<td>1</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>Commission de courrier</td>
<td>0</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td>Commission fixe</td>
<td>0</td>
<td>5</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Agio H.T.**

Pour calculer l'escompte commercial dans les deux banques.

Le choix se porte sur la banque A.

*2.4* 

Nous avons:

- **Valeur nominale**: 15 000 dh
- **Nombre de jours**: 108 + 2 = 110 jours
- **Taux réel**: 14,27422 %
- **Commissions**: 4,5 dh
- **TVA**: 42 dh.

Nous pouvons écrire:

**Agio T.T.C.** = \( 15 000 \times 110 \times 1 + 46,5 = 45,833333 \times 36,000 = 14,27422 \)

On sait de même que:

**Taux réel** = \( (45,833333 \times 36,000) = 14,27422 \)

Ce qui nous donne:

\[ \frac{45 000}{21 450 236,4} = 1 649 999,288 \]

\[ t = \frac{13}{10} \]

D'où **t = 13 %**

Ce qui nous donne un taux d'escompte bancaire de (13 - 0,75) % c'est à dire 12,25 %.

Pour calculer le taux de revient, on doit calculer tout d'abord la valeur nette.

La valeur nette = \( VN = 15 000 - [15 000 \times 13 \times 110 + 46,5] \times 36,000 = 14 357,66 dh \)

D'où:

**Taux de revient** = \( t_r = \frac{642,34 \times 36 000}{1 435 7,66 \times 108} = 14,919 \% \)

*2.5* 

**Commande**

- 1 mars 1500
- 28 mars 2000
- 15 avril 3000
- 25 juin 3000
- 13 août 3000

**Livraison**

- 18 jours
- 120 jours

Date d'évaluation
Il suffit de calculer la valeur des 5 effets à la date de livraison de la machine :
Si $X$ est le montant recherché alors :

$$
X = \frac{1500 + 1500 \times 11 \times 45 + 2000 + 2000 \times 11 \times 18 + 2000}{36000} + \frac{3000 - 2000 \times 11 \times 71 + 3000 - 3000 \times 11 \times 120}{36000}
$$

$$
X = 11356,5456 \quad \text{Soit} \ 11356,55 \text{dh}
$$

**2.6**

<table>
<thead>
<tr>
<th>Effet</th>
<th>Date d'escompte</th>
<th>Date d'échéance</th>
<th>Nombre de jours</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>12 675</td>
<td>14 juin</td>
<td>20 juin</td>
<td>10*</td>
</tr>
<tr>
<td>4 327</td>
<td>14 juin</td>
<td>22 juin</td>
<td>10*</td>
</tr>
<tr>
<td>5 830</td>
<td>14 juin</td>
<td>27 juin</td>
<td>13 + 1 = 14</td>
</tr>
<tr>
<td>7 642</td>
<td>14 juin</td>
<td>12 juillet</td>
<td>28 + 1 = 29</td>
</tr>
</tbody>
</table>

* Nombre de jours minimum

**2.7**

\[
\text{122 jours}
\]

\[
\begin{array}{ccc}
15 000 & 45931,01 & 30 500 \\
15/08/05 & 30/11/05 & 15/12/05 \\
\end{array}
\]

Au 15/08/05 on a l'équivalence suivante :

\[
15 000 + 30 500 - \frac{30 500 \times 122 \times t}{36000} = 45 931,01 - \frac{45 931,01 \times 107 \times t}{36000}
\]

\[
t = 12,999 \% \quad \text{soit} \ t = 13 \%
\]

**2.8**

\[
\text{65 jours}
\]

\[
\begin{array}{ccc}
35 \text{ jours} & 11 \text{ jours} & 2040 \\
1/07/05 & 12/07/05 & 5/08/05 \\
\end{array}
\]

\[
t = 18 \%
\]

**Date d'équivalence**

\[
\text{Au 01/07/05}
\]

\[
X - X \times 11 \times 18 = 2040 - \frac{2040 \times 35 \times 18 + 2040 - 2040 \times 65 \times 18}{36000}
\]

\[
0,9945 \times X = 3978 \text{ dh}
\]

\[
X = 4000 \text{ dh}
\]
Mathématiques Financières

2.9

104 jours
87 jours
45 jours
42 jours

\[ C = \frac{5000 \times 5}{36000} \quad 7000 \quad \frac{12000}{36000} \]

1/05 12/06 15/06 27/07 13/08
Date l'effet d'équivalence unique

\[ t = 11\% \]

a) Au 01/05 on a l'égalité suivante :

\[ C - C \times 11 \times 42 = 5000 - 5000 \times 11 \times 45 + 7000 - 7000 \times 11 \times 87 + 12000 - 12000 \times 11 \times 104 \]

\[ = 36000 \quad 36000 \quad 36000 \quad 36000 \]

\[ 0,9871666 C = 23856,96 \text{ dh} \]

\[ C = 24167,96 \text{ dh} \]

b) On se place toujours au 1 mai, l'échéance commune (de l'effet unique) est donnée par l'égalité entre la somme des valeurs actuelles des 3 effets à remplacer et la valeur actuelle de l'effet unique. Si \( j \) est le nombre de jours entre la date d'équivalence (le 1 mai) et l'échéance de l'effet unique alors :

Au 01/05

\[ 23856,96 = 24600 - 24600 \times 11 \times j \]

\[ = 36000 \]

\[ 7,516666 j = 743,04 \]

\[ j = 98,85 \]

Soit 99 jours après le 01/05

La date d'échéance de l'effet unique est le 8 août de la même année.

c) L'échéance moyenne \( j_m \) des trois effets est telle que

\[ j_m = \frac{\sum_{i=1}^{3} C_i \times j_i}{\sum_{i=1}^{3} C_i} \]

\[ = \frac{36000}{142} \]

2.10

62 jours
50 jours
27 jours

\[ 4000 \quad 65219,09 \quad X \quad t = 12,5\% \]

Date d'équivalence

a) Au 19 mai on a :

\[ 65219,09 - 65219,09 \times 12,5 \times 30 = 40000 - 40000 \times 12,5 \times 27 + X \times 12,5 \times 62 \]

\[ = 36000 \quad 36000 \]

\[ X = 25000 \text{ dh} \]

La valeur nominale du second effet est de 25 000 dh

b) On se place toujours au 19 mai. L'échéance moyenne \( j_m \) des deux effets de 40 000 dh et 25 000 dh est telle que :

\[ j_m = \frac{40000 \times 27 + 25000 \times 62}{65000} = 40,46 \]

Soit 41 jours après le 19 mai c'est-à-dire le 29 juin de la même année.
2.11 Le montant du fonds de commerce n'est pas exigé au comptant. On peut traduire l'énoncé par l'axe de temps suivant :

<table>
<thead>
<tr>
<th>180 jours</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>160000</td>
</tr>
<tr>
<td>50000</td>
</tr>
<tr>
<td>Date d'équivalence (j) jours</td>
</tr>
<tr>
<td>20000</td>
</tr>
<tr>
<td>300000</td>
</tr>
<tr>
<td>5/03/05</td>
</tr>
</tbody>
</table>

\[ t = 15\% \]

a) À la date d'équivalence, on peut écrire :

\[
\begin{align*}
300000 - 200000 \times 12 \times j & = 30000 + 160000 - 160000 \times 13 \times 90 + 300000 - 90000 \times 13 \times 80 \\
36000 & = 36000 \\
10823333333333 & = 11050 \\
3 \times j & = 102 \\
36 & = 36 \\
288900 & = 36,11111111 \\
3 \times j & = 246
\end{align*}
\]

Le paiement global pourrait se faire dans 3 mois et 12 jours.

b) On se place toujours à la date d'équivalence du 5 mars.

\[
\begin{align*}
300000 - 300000 \times 13 \times 102 & = 100000 + 100000 - 100000 \times 13 \times 60 + 100000 - 100000 \times 13 \times j \\
36000 & = 36000 \\
288900 & = 36,11111111 \\
3 \times j & = 246
\end{align*}
\]

Le 3ème effet serait payé suivant les modalités du contrat dans 8 mois et 6 jours.

2.12 Première modalité

<table>
<thead>
<tr>
<th>80 jours</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>61 jours</td>
</tr>
<tr>
<td>20000</td>
</tr>
<tr>
<td>50000</td>
</tr>
<tr>
<td>Date d'équivalence</td>
</tr>
<tr>
<td>15/05</td>
</tr>
<tr>
<td>15/07</td>
</tr>
<tr>
<td>03/08</td>
</tr>
</tbody>
</table>

\[ t = 12\% \]

2.13

a) Le paiement porte sur un effet à intérêts simples de 12 %

La valeur totale à payer dans 6 mois est :

\[
120000 + \frac{120000 \times 12 \times 6}{1200} = 127200 \text{ dh}
\]
b) Proposition du vendeur

\[ 2 \text{ mois} \]
\[ 50,000 \]  \[ 20,000 \]  \[ 5 \text{ mois} \]  \[ T \]  \[ T \]  \[ T \]  \[ 8 \text{ mois} \]  \[ 11 \text{ mois} \] 11\%

Si \( T \) est la trimestrialité constante, nous pouvons écrire l'équivalence des deux modes de paiements dans 6 mois :

\[
127,200 = 50,000 + 20,000 - \frac{20,000 \times 2 \times 11}{1200} \\
+ T - \frac{T \times 5 \times 11}{1200} \\
+ T - \frac{T \times 8 \times 11}{1200} \\
+ T - \frac{T \times 11 \times 11}{1200} \\
127,200 = 69,633,34 + 3T - \frac{T \times 11 [5 + 8 + 11]}{1200} \\
57,566,66 = 2,78 T \qquad T = 20,707,19 \text{ dh}
\]

### 3.1 Les intérêts Composés

<table>
<thead>
<tr>
<th>Durée</th>
<th>Taux</th>
<th>Capital (dh)</th>
<th>Valeur acquise (dh)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1) (12 \text{ ans})</td>
<td>7% l'année</td>
<td>22,500</td>
<td>50,674,31</td>
</tr>
<tr>
<td>2) 20 ans</td>
<td>3% le semestre</td>
<td>60,00</td>
<td>19,572,23</td>
</tr>
<tr>
<td>3) 9 trimestres</td>
<td>7,5% l'année</td>
<td>17,000</td>
<td>20,004,05</td>
</tr>
<tr>
<td>4) 5 ans et 9 mois</td>
<td>1,75% le trimestre</td>
<td>20,000</td>
<td>20,807,23</td>
</tr>
</tbody>
</table>

\[ 1) \text{taux} = 7\% \quad \text{Durée} = T \]
\[ C_{12} = 22,500 \left(1,07\right)^{12} = 50,674,31 \]
\[ C_0 = 22,500 \text{ dh} \quad n = \log 50,674,31 = 12 \]
\[ C_0 = 50,674,31 \text{ dh} \quad \log (1,07) \]

\[ 2) \text{taux} = 3\% \text{ le semestre} \quad \text{Durée} = 20 \text{ ans} = 20 \times 2 = 40 \text{ semestres} \]
\[ C_0 = 6,000 \text{ dh} \quad C_{40} = 6,000 \left(1,03\right)^{40} \]
\[ C_{40} = 19,572,23 \text{ dh} \]

\[ 3) \text{taux} = 7,5\% \text{ l'année} \quad \text{Durée} = n \text{ années} \]
\[ C_0 = 17,000 \text{ dh} \quad C_n = 20,004,05 \text{ dh} \]
\[ C_n = 17,000 \left(1,075\right)^n = 20,004,05 \]
\[ (1,075)^n = 1,1767088 \]
n = \log 1.1767088 = 2.249999
\log (1.075)
La période est donc 2,25 années, soit 9 trimestres

4)
Duree = 5 ans 9 mois soit 23 trimestres
\( C_0 = 20000 \text{ dh} \)
\( C_{23} = 29807.23 \text{ dh} \)

\[ t = \frac{e^{20/0.0723} - 1}{20000} \]

taux ?
Calculons le taux trimestriel : \( i_t \)

\[ 20000 (1 + i_t)^{23} = 29807.23 \]
\[ (1 + i_t)^{23} = 1.4903615^{1/23} \]
\[ i_t = 1.4903615^{1/23} - 1 \]
\[ = 0.0175 \]
Donc le taux trimestriel est 1,75 %

3.2
a) Si \( i_t \) est le taux semestriel équivalent, alors:

\[ (1 + i_s)^2 = (1.11) \]
\[ \Rightarrow i_s = 1.11^{1/2} - 1 \]
\[ i_s = 0.0535653 \]
Soit \( i_s = 5,37 \% \)

1) Notons que le taux proportionnel correspondant est de \( 11/2 = 5,5 \% \)
2) Le taux équivalent \( t = 5,37 \% \) peut être calculé à partir de la table 6. Lire à l'intersection de la colonne 6 mois et de la ligne 11 %.

b) Si \( i_t \) est le taux trimestriel équivalent :

\[ (1 + i_t)^4 = 1.1025 \]
\[ \Rightarrow i_t = 1.1025^{1/4} - 1 \]
\[ i_t = 0,024695 \]
Soit un taux trimestriel de 2,47 %
Notons également que le taux proportionnel est égal à :
10,25/4 ≠ 2,56 %.

c) Si \( i_m \) est le taux mensuel équivalent :

\[ (1 + i_m)^{12} = 1,12 \]
\[ i_m = 1,12^{1/12} - 1 \]
\[ i_m = 0,0094887 \]

3.3
1) Avec les taux proportionnels et à 9 % annuel correspond
   \( \rightarrow 9/2 = 4,5 \% \) par semestre
   \( \rightarrow 9/4 = 2,25 \% \) par trimestre
   le deux valeurs acquises sont :
   \( \rightarrow \text{Pendant } 4 \times 2 = 8 \text{ semestres} \)
   \( C_8 = 15000 (1,045)^8 = 21331,50 \text{ dh} \)
   \( \rightarrow \text{Pendant } 4 \times 4 = 16 \text{ trimestres} \)
   \( C_{16} = 15000 (1,0225)^{16} = 21414,32 \text{ dh} \)

2) Avec les taux équivalents et à 9 % annuel correspond :
   \( \rightarrow i_s = (1,09)^{1/2} - 1 \) soit 4,40 % par semestre ;
   \( \rightarrow i_t = (1,09)^{1/4} - 1 \) soit 2,17 % par trimestre.
   les deux valeurs acquises
   \( \rightarrow \text{Pendant } 4 \times 2 = 8 \text{ semestres} \)
   \( C_8 = 15000 (1,044)^8 = 21168,75 \text{ dh} \)
   \( \rightarrow \text{Pendant } 4 \times 4 = 16 \text{ trimestres} \)
   \( C_{16} = 15000 (1,0217)^{16} = 21147,81 \text{ dh} \)

3.4
a) Solution rationnelle :

\[ C_{3+4/12} = 160000 (1,0925)^3 [1 + 0,0925 \times 4/12] \]
\[ = 215066,50 \text{ dh} \]
Le montant des intérêts est :
215066,50 - 160 000 = 55 066,50 dh

b) Solution commerciale :

\[ C_{3+4/12} = 160000 (1,0925)^{3+4/12} = 214 877,76 \text{ dh} \]
Le montant des intérêts est :
214 877,76 - 160 000 = 54 877,76 dh

3.5
Il n'y a pas d'indication concernant les taux,
Il s'agit donc d'un taux annuel.

<table>
<thead>
<tr>
<th>( C_0 )</th>
<th>22 000</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0</td>
<td>0</td>
</tr>
<tr>
<td>5+5/12</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>

\[ C_0 = 22 000 (1,11)^{(5+5/12)} \]
\[ C_0 = 12 500,38 \text{ dh} \]
Mathématiques Financières

<table>
<thead>
<tr>
<th>$C_0$</th>
<th>15 000</th>
<th>$\rightarrow$ 9,25 %</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0</td>
<td>6</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

$C_0 = 15 000 \times (1,0925)^4$
$C_0 = 8 821,91 \text{ dh}$

---

<table>
<thead>
<tr>
<th>$C_0$</th>
<th>18 000</th>
<th>$\rightarrow$ 9 %</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0</td>
<td>13 ans 2 trimestres 2 mois</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

$C_0 = 18 000 \times (1,09)^{13 \times 8/(12)}$
$C_0 = 5 543,41 \text{ dh}$

---

### 3.8

Si $i$ est le taux annuel, $C_0$ est le capital placé, alors :

$C_0 \times (1 + i)^n = 3 C_0$

$(1 + i)^3 = 3$

$i = \frac{\log 3}{3} \approx 1 - 0,129830$

Soit un taux annuel d'environ 12,98 %

---

### 3.9

$300 000 \rightarrow 293 584,86$

<table>
<thead>
<tr>
<th>0</th>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>3</th>
<th>4</th>
<th>5</th>
<th>6</th>
<th>7</th>
<th>8</th>
<th>9</th>
<th>taux semestriel</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>31/12/95</td>
<td>31/12/98</td>
<td>31/12/05</td>
<td>31/12/06</td>
<td>31/12/2011</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\rightarrow$ C$_{3/12/95}$ = 38 800 (1,09)$^{2005-1995}$ = 38 800 (1,09)$^{10} = 16 389,54 \text{ dh}$</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\rightarrow$ C$_{3/12/98}$ = 38 800 (1,09)$^{2005-1998}$ = 38 800 (1,09)$^{7} = 21 224,93 \text{ dh}$</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\rightarrow$ C$_{3/12/05}$ = 38 800 (1,09)$^{2005-2006}$ = 38 800 (1,09)$^1 = 42 292 \text{ dh}$</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\rightarrow$ C$_{3/12/2011}$ = 38 800 (1,09)$^{2005-2011}$ = 38 800 (1,09)$^6 = 65 071,48 \text{ dh}$</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

#### 3.7

Si $i_s$ est le taux semestriel, la valeur acquise du placement au bout des deux premières années est $300 000 \times (1 + i_s)^4$.

La valeur acquise après le retrait est :

$300 000 \times (1 + i_s)^4 - 100 000$

Cette valeur acquise est placée ensuite pendant 4 semestres

$300 000 \times (1 + i_s)^4 - 100 000 \times (1 + i_s)^4 = 293 584,86$

Simplifications par 100 000

$3(1 + i_s)^4 - (1 + i_s)^4 = 2,9358486 = 0$

Posons $(1 + i_s)^4 = X$, L'équation devient :

$3X^4 - X = 2,9358486 = 0$

On trouve

$X = 1 \pm 6,019731$

D'où $X = 1,1698585 = (1 + i_s)^4$

$i_s = 0,0399999$ soit un taux semestriel de 4 %

Ce qui donne un taux annuel équivalent de 8,16 %.
3.10

\[ C_{11/1200} \]

\[ 1 \, 500 \, 000 \]

\[ 31/12/90 \rightarrow 31/12/2006 \]

\[ t_n = 3,25\% \]

\[ 16 \text{ ans} = 32 \text{ semestres} \]

1) La valeur acquise du nouveau placement est :

Valeur actuelle au 31/12/90

\[ C_{31/12/2000} = \left[ \frac{1500 \, 000 \times (1,0325)^{32}}{(1,075)^{16}} \right] \times 3,180793 \]

\[ = 539,025,52 \times 3,180793 \]

\[ = 1 \, 714 \, 528,60 \text{ dh} \]

2) Si n est la date recherchée alors :

\[ 539,025,52 \times (1,075)^n = 1 \, 500 \, 000 \]

\[ (1,075)^n = 2,872995 \]

\[ n = \frac{\log 2,872995}{\log 1,075} = 14,15166 \text{ années} \]

Soit 14 ans 1 mois et 25 jours. La personne aurait 1 500 000 dh vers le 25 février 2005.

3) L'utilité de cette opération est le fait de changer le mode de placement pour bénéficer d'un avantage de taux. Ici la personne obtiendra la même somme 1 500 000 dh, plutôt que prévu.

3.11

1) La valeur acquise globale est :

\[ 10 \, 000 \times (1,07)^4 = 13 \, 107,96 \text{ dh} \]

\[ 25 \, 000 \times (1,075)^4 = 33 \, 386,73 \text{ dh} \]

\[ 55 \, 000 \times (1,075)^4 = 77 \, 636,99 \text{ dh} \]

\[ 124 \, 131,68 \text{ dh} \]

Si \( i_R \) est le taux de rendement moyen, l'égalité s'écrit

\[ 124 \, 131,68 = (10 \, 000 + 25 \, 000 + 55 \, 000) (1 + i_R)^4 \]

Ce qui donne :

\[ (1 + i_R)^4 = 1,37924 \]

\[ i_R = 1,37924^{\frac{1}{4}} - 1 \]

\[ i_R = 0,0837 \text{ soit un taux annuel de } 8,37\% \]

3.12

Les différentes valeurs acquises peuvent s'écrire :

Si \( C_0 \) est la valeur du capital ;

i est le taux du placement ;

n est le nombre d'années.

\[ C_0 (1+i)^n = 1 \, 085 \, 946,64 \] (1)

\[ C_0 (1+i)^{n+2} = 1 \, 290 \, 213,20 \] (2)

\[ C_0 (1+i) = 545 \, 000 \] (3)

(1) donne \( (1+i)^n = 1 \, 085 \, 946,64 \)

(2) \( (1+i)^{n+2} = 1 \, 290 \, 213,20 \)

\[ \frac{(1+i)^n}{(1+i)^{n+2}} = 0,84167995 \]

\[ (1+i)^n = 0,84167995 \]

\[ i = 0,84167995^{\frac{1}{n}} - 1 \]

\[ i = 0,0899999 \]

Soit \( i = 9\% \).

Remplaçons ce taux dans (3)

\[ C_0 (1,09)^n = 545 \, 000 \rightarrow C_0 = 500 \, 000 \text{ dh} \]

Remplaçons le taux et le capital dans (1)

\[ 500 \, 000 (1,09)^n = 1 \, 085 \, 946,64 \]

\[ (1,09)^n = 2,171893 \]

Par les logarithmes on trouve \( n = 9 \text{ années} \)

3.13

Calculons le taux bi-annuel équivalent au taux annuel 10,25%

Si \( i_{2a} \) est ce taux alors :

\[ (1 + i_{2a})^2 = (1,105)^4 \]

\[ i_{2a} = 0,221025 \text{ soit } t_{2a} = 22,1025\% \]

Par ailleurs :

19 semestres = 9,5 années = 4,75 tous les 2 ans.

La valeur acquise est :

\[ C_{4,75 \, 2a} = 100 \, 000 (1,221025)^{4,75} = 258 \, 191,32 \text{ dh} \]
Soit $C_0$ le capital placé

1) Si $n = 6$ ans

$\rightarrow$ La modalité $A = C_0 \times (1.075)^6 = 1.54333 \times C_0$

$\rightarrow$ La modalité $B = C_0 + C_0 \times 9.3 \times 6 / 100 = 1.5580 \times C_0$

On choisit la modalité $B$

2) $n = 7$ ans.

$\rightarrow$ La modalité $A = C_0 \times (1.075)^7 = 1.6590 \times C_0$

$\rightarrow$ La modalité $B = C_0 + C_0 \times 9.3 \times 7 / 100 = 1.651 \times C_0$

On choisit la modalité $A$

3) On sait que l'équivalence se situe entre 6 et 7 ans.

Pour qu'il y ait équivalence il faut que l'égalité suivante soit vérifiée :

$C_0 \times (1.075)^n = C_0 \times [C_0 \times 9.3 \times n] / 100$

$C_0 \times (1.075)^n = C_0 \times (1 + 0.093 \times n)$

$(1.075)^n = 1 + 0.093 \times n$

Ce qui nous donne :

$(1.075)^n - 1 - 0.093 \times n = 0$

On sait que $6 < n < 7$

On utilise l'interpolation linéaire

$$
\begin{align*}
6 & \quad -0.0146986 \\
7 & \quad 0.0080491
\end{align*}
$$

$$
\frac{n - 6}{7 - 6} = \frac{0 + 0.0146985}{0.0080491 + 0.0146985} = 0.646156
$$

Donc $n = 6.646156$ années

Soit 6 ans 7 mois 23 jours

On sait que :

$$
i_1 = i/2 \quad et \quad i_2 = (1 + i^{0.5} - 1
$$

L'égalité s'écrit :

$$
i/2 - (1 + j)^{0.5} + 1 = 0.0006
$$

$(1 + i)^{0.5} = i/2 + 0.9994$
4. Equivalence à intérêts composés

La date d'équivalence peut être placée à n'importe quelle époque. Prenons l'année 3 comme date d'équivalence, ce qui simplifie les calculs.

Si $C$ est la valeur du capital unique alors :

$$C = 10\,200 \times (1,105)^{1+9/12} + 15\,000 \times (1,105)^{5/12} + 22\,500 \times (1,105)^{1+6/12}$$

$$C = 12\,147,43 + 15\,637,20 + 19\,370,42$$

$$C = 47\,155,05$$

La valeur de l'effet unique est de 47 155,05 dh.
Mathématiques Financières

4.2

4 ans

3 ans

Date d'équivalence

15 615,62 dh dans n années ?

Si n est l'échéance du paiement unique et si l'époque 0 est choisie comme date d'équivalence alors :

\[ 15 615,62 (1,10)^n = 7 500 (1,10)^3 + 10 200 (1,10)^{-4} \]
\[ 15 615,62 (1,10)^n = 5 634,86 + 6 956,74 = 12 601,60 \]
\[ (1,10)^n = 12 601,60 = 0,806 987 \]
\[ 15 615,62 \]

Par les logarithmes :

\[ n = - \log 0,806 987 \]
\[ \log (1,10) \]
\[ n = 2,249 999 années soit 2,5 années \]
Le paiement unique de 15 615,62 dh est à prévoir dans 2 ans et 6 mois.

4.3

a)

3 ans

6 ans

4 ans

2 ans

15 000

20 000

13 000

C ?

13 %

Date d'équivalence

Mathématiques Financières

b)

Prenons l'époque 7 comme date d'équivalence, alors :

\[ C = 15 000 (1,13)^6 + 20 000 (1,13)^4 + 13 000 (1,13)^2 \]
\[ C = 31 229,28 + 32 609,47 + 16 599,7 \]
\[ C = 80 448,45 dh \]

A la date 2-\(\sqrt{12}\) l'égaleité s'écrit :

\[ C = 15 000 (1,13)^{4,5/12} + 20 000 (1,13)^{7/12} + 13 000 (1,13)^{10/12} \]
\[ C = 17 835,52 + 18 623,77 + 9 480,34 \]
\[ C = 55 949,63 dh \]

c)

5 ans

3 ans

1 an

15 000

20 000

13 000

Date d'équivalence

Échéance moyenne dans n années ?

avec C = 15 000 + 20 000 + 13 000 = 48 000 dh
Mathématiques Financières

A la date 0 l'égalité d'équivalence s'écrit :

\[ 48 000 \times (1,13)^n = 15 000 \times (1,13)^3 + 20 000 \times (1,13)^3 + 13 000 \times (1,13)^3 \]
\[ 48 000 \times (1,13)^n = 13 274,34 + 13 861,00 + 7 055,88 \]
\[ (1,13)^n = 34 191,22 = 0,712317 \]
\[ 48 000 \]
\[ n = \log(0,712317) = 2,77564 \text{ années} \]

L'échéance moyenne aurait lieu dans 2,77564 années soit 2 ans 9 mois et 10 jours.

4.4

Appelons X la somme d'argent obtenue par chacune des sœurs à leur vingtième anniversaire. La part de la petite sœur sera capitalisée pendant 12 ans. Celle de l'aînée sera capitalisée pendant 9 ans.

A l'époque 0, au moment du partage, il y a égalité d'équivalence entre les 450 000 dh et la somme des deux valeurs actuelles des parts à 20 ans. On peut écrire :

\[ 450 000 = X \times (1,075)^{12} + X \times (1,075)^9 \]
\[ 450 000 = X \times (0,941438) \]
\[ X = 477 992,18 \text{ dh} \]

Chaque part à 20 ans est de 477 992,18 dh

Il suffit d'actualiser ce capital pour obtenir les deux parts au moment du partage.

La petite reçoit : 477 992,18 \times (1,075)^{12} = 200 686,99 dh

L'aînée reçoit : 477 992,18 \times (1,075)^9 = 249 312,82 dh

Il est évident que la somme globale avoisinera les 450 000 dh car 200 686,99 + 249 312,82 = 449 999,81 dh

4.5

<table>
<thead>
<tr>
<th>60 000</th>
<th>30 000</th>
<th>40 626</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0</td>
<td>1</td>
<td>2</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Date d'équivalence

L'égalité à l'époque 0 donne :

\[ 60 000 = 30 000 (1+i)^1 + 40 626 (1+i)^2 \]

On peut se ramener à une équation du second degré :

\[ 60 000 (1+i)^2 - 30 000 (1+i) - 40 626 = 0 \]

Posons \((1+i) = X\) et divisons par 1 000

\[ 60 X^2 - 30 X - 40,626 = 0 \]

\[ 60 X^2 - 30 X - 40,626 = 0 \]

\[ 10,55\% \]

1) 20 000 25 000 30 000 10,55 %

4.6

\[ 80 000 \quad 15 000 \quad 40 000 \quad 47 086,5 \quad t\% \]

| 0 | 1 | 2 | 3 |

Date d'équivalence

A l'époque 0 l'égalité d'équivalence s'écrit :

\[ 80 000 = 150 000 (1+i)^1 + 40 000 (1+i)^2 + 47 086,5 (1+i)^3 \]

On peut résoudre cette équation par interpolation linéaire, sachant que le taux est voisin de 11%.

\[ a 11\% \text{, } 15 000 (1,11)^1 + 40 000 (1,11)^2 + 47 086,5 (1,11)^3 = 80 344,41 \]
\[ a 12\% \text{, } 15 000 (1,12)^1 + 40 000 (1,12)^2 + 47 086,5 (1,12)^3 = 78 734,41 \]

Le taux est donc compris entre 11% et 12% car 78 734,29<80 000<80 344,29

Par interpolation linéaire :

\[ 0,11 \quad 80 344,41 \]
\[ i \quad 80 000 \]
\[ 0,12 \quad 78 734,29 \]

\[ i - 0,11 = \frac{80 000 - 80 344,41}{0,12 - 0,11} \]

\[ 78 734,29 - 80 344,29 \]

D'où :

\[ i = 0,11 + 0,01 (2,13716) \]
\[ i = 0,121 \text{ donc } t = 11,21\% \]

4.7

1) 20 000 25 000 30 000 10,55 %

Date d'équivalence

\[ 0,12 \]

161
Mathématiques Financières

Le particulier peut se libérer par un seul paiement à condition qu'il y ait équivalence entre le paiement unique et la somme des trois dettes.

Calculons d'abord la somme des valeurs actuaires de l'ensemble des dettes à l'époque 0.

Ce qui donne :

\[ 20,000 (1,105)^4 + 25,000(1,105)^3 + 30,000(1,105)^4 = 55,869,25 \text{dh} \]

Si \( n \) \( \rightarrow \) échéance du paiement de 75 500 dh ;
Si \( n_1 \) \( \rightarrow \) échéance du paiement de 75 000 dh ;
Si \( n_2 \) \( \rightarrow \) échéance du paiement de 74 500 dh .

A l'époque 0, nous pouvons écrire :

\[ \rightarrow 55,869,25 = 75,500 \times (1,105)^n \]
\[ \rightarrow 55,869,25 = 75,000 \times (1,105)^{n_1} \]
\[ \rightarrow 55,869,25 = 74,500 \times (1,105)^{n_2} \]

Prenons le premier paiement et calculons \( n \)

\[ 55,869,25 = 75,500 \times (1,105)^n \]
\[ (1,105)^n \times 55,869,25 = 0,739990 \times 75,500 \]
\[ n = - \log 0,739990 \]
\[ n = 3,015850 \text{ années} \]

Le paiement de 75 500 dh est à prévoir dans 3 ans 6 jours

Par un calcul analogue on trouve :

\[ n_1 = 2,949301 \text{ soit 2 ans 11 mois 12 jours} \]
\[ n_2 = 2,882307 \text{ soit 2 ans 10 mois 18 jours} \]

Donc les paiements sont possibles :

\[ \rightarrow 75,500 \text{ dh dans 3 ans 6 jours} ; \]
\[ \rightarrow 75,000 \text{ dh dans 2 ans 11 mois 12 jours} ; \]
\[ \rightarrow 74,500 \text{ dh dans 2 ans 10 mois 18 jours} . \]

2)

\[ \begin{array}{cccc}
55,869,25 & A & B = 3A & 10,5 \%
\end{array} \]

\[ \begin{array}{cccc}
0 & 1 & 3 & \text{Date d'évaluation}
\end{array} \]

Vérification :

\[ 21,805,51 (1,105)^3 + 65,416,53 (1,105)^2 = 55,869,25 \text{ dh} \]

\[ A = \frac{55,869,25}{2,562167} = 21,805,51 \]
\[ B = 3A = 65,416,53 \]

Mathématiques Financières

A l'époque 0, on peut écrire :

\[ 55,869,25 = A (1,105)^3 + 3A (1,105)^2 \]

\[ A = \frac{55,869,25}{2,562167} = 21,805,51 \]
\[ B = 3A = 65,416,53 \]

Vérification :

\[ 21,805,51 (1,105)^3 + 65,416,53 (1,105)^2 = 55,869,25 \text{ dh} \]
Les annuités

5.1
La situation se présente comme suit :

\[ A_{12} = 32.500 \times 1.09^{12} - 1 = 654.573.39 \]

a) Ici on se situe au moment du dernier versement :

b) On distingue ici deux solutions :
   * solution rationnelle :
     \[ A_{12+5/12} = A_{12} \times (1+5/12 \times 0,09) = 679.119.90 \text{ dh} \]
   * solution commerciale :
     \[ A_{12+9/12} = A_{12} \times 1.09^{9/12} = 678.504,48 \text{ dh} \]

c) Au 31/10/2009 on a :
   \[ A_{14} = A_{12} \times 1.09^2 = 777.698,65 \text{ dh} \]

d) Au 31/10/2010 on a :
   \[ A_{15} = A_{12} \times 1.09^3 = 847.691,53 \text{ dh} \]
5.2

\[ 17\,500 \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} - 1 = 190\,000 \]

D'où

\[ \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} - 1 = 10,85714286 \]

En utilisant la table n° 3 (ou en tenant compte on trouve t proche de 8,5%):

\[ \begin{array}{c|c}
10,8306393 & 8.5 \\
10,8571426 & t \\
10,9290744 & 8.75 \\
\end{array} \]

Par interpolation linéaire on trouve t = 8,57 soit 8,57% l'an.

5.3

\[ 20\,000 \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} - 1 = 300\,000 \]

Ce qui donne

\[ 1095^{8} - 1 = 300\,000 \]

0,095

Par logarithmes on trouve n = 9,76

Comme ici on se situe au moment du dernier versement le problème n'admet de solutions strictes. En effet pour obtenir n entier il importe d'apporter quelques modifications :

1° cas : n = 9 :

* 1ère solution : on modifie toutes les annuités :

\[ \left( \frac{500}{c} \right) \]

\[ a = 300\,000 \times 0,095 = 22\,561,36 \text{ dh} \]

\[ 1,095^{9} - 1 \]

* 2ème solution : on majorera la dernière annuité d'un montant x :

\[ x = 300\,000 - 20\,000 \times 1,095^{9} - 1 = 34\,058,62 \text{ dh} \]

0,095

2° cas : n = 10 :

* 1ère solution : on modifie toutes les annuités :

\[ A = 300\,000 \times 0,095 = 19\,279,85 \text{ dh} \]

\[ 1,095^{10} - 1 \]

* 2ème solution : on diminue la dernière annuité d'un montant y :

\[ y = 20\,000 \times 1,095^{10} - 1 - 300\,000 = 11\,205,81 \text{ dh} \]

0,095

La dernière annuité sera de 8 794,19 dh seulement.

\[ \triangle \]

La valeur acquise de 300 000 dh peut être obtenue à partir de versements égaux à 20 000 dh mais il faut se situer après le dernier versement. Ainsi pour n = 9 le capital de 300 000 dh est constitué x périodes après le dernier terme :

\[ 300\,000 = 20\,000 \times 1,095^{9} - 1 \times 1,095^{x} \]

0,095

Ce qui donne X = 1,27832 soit 1 ans, 3 mois et 28 jours

5.4

1ère solution : on utilise les taux équivalents :

\[ i = 1,08^{12/3} - 1 = 0,019426546 \]

\[ A_{28} = 5\,000 \times 1,019426546^{12} - 1 = 183\,723,92 \text{ dh} \]

0,019426546

2ème solution : on utilise les taux proportionnels :

\[ i = 1,08 - 0,02 \]

\[ A_{28} = 5\,000 \times 1,02^{24} - 1 = 185\,256,05 \text{ dh} \]

0,02

3ème solution :

On scinde la suite des 28 trimestrialités en 4 suites d'annuités

\[ \begin{array}{cccccc}
5\,000 & 5\,000 & 5\,000 & 5\,000 & 5\,000 & 5\,000 \\
1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 & 25 \\
\hline
\end{array} \]

À la date 28 on a :

\[ B_{28} = 5\,000 \times 1,08^{7} - 1 \times (1 + 3/4 \times 0,08) = 47\,290,86 \text{ dh} \]

0,08

\[ \begin{array}{cccccc}
5\,000 & 5\,000 & 5\,000 & 5\,000 & 5\,000 & 5\,000 \\
2 & 6 & 10 & 14 & 18 & 22 & 26 \\
\hline
\end{array} \]

À la date 28 on a :

\[ C_{28} = 5\,000 \times 1,08^{7} - 1 \times (1 + 1/2 \times 0,08) = 46\,398,58 \text{ dh} \]

0,08

---

166

---

167
5.6
Tant que le client est débiteur celui-ci doit verser à la fin de chaque trimestre des intérêts calculés à 12 % l'an. La capitalisation des intérêts est dans ce cas trimestrielle au taux trimestriel de 3 %.
- Au 30/06/06 on aura :
  \[ \text{Débit-crédit} = 60\,000 \times 1,03^4 - 17\,000 \times 1,03^4 - 1 = -3\,591,13\,dh \]
Le solde est donc créditeur de 3 591,13 dh

\[ \Delta \]
Tant que le solde est débiteur il est possible de compenser les intérêts débiteurs et les intérêts créditeurs (calculés au même taux de 3%). Il importe de souligner ici que le client n'est devenu créditeur qu'après le versement du 30/06/06.

Pour un calcul plus précis, on établit des comptes trimestriels :
Solde au 1/10/05 : 60 000 + 60 000 \times 92 \times 12 \times 17 000 = 44 840 dh au débit 36 000
Solde au 1/01/06 : 44 840 + 44 840 \times 92 \times 12 - 17 000 = 29 215,09 dh au débit 36 000
Solde au 1/04/06 : 29 215,09 + 29 215,09 \times 91 \times 12 - 17 000 = 13 101,28 dh au débit 36 000
Solde au 1/07/06 : 17 000 - 13 101,28 + 13 101,28 \times 91 \times 12 = 3 501,31 dh au crédit 36 000

5.7
a) \[ 350\,000 = a \times 1,09^8 - 1 \]
   \[ \text{a} = 29\,115,63 \, dh \]

b) Le capital disponible 5 mois après le dernier versement s'écrit :
\[ A_{5,12} = 29\,115,63 \times 1,08^{4} - 1 \times 1,08^{4/12} = 135\,472,60 \, dh. \]
Autre méthode pour pénaliser le client : on actualise à la date 4+5/12
- les 350 000 dh à 10% (intérêts débiteurs pour le client)
- les 4 versements non échus à 8% (intérêts créditeurs pour le client).
On obtient:

\[ A_{4+5/12} = 350 000 \times 1,1^{(4+5/12)} - 29 115,63 \times 1 - 1,08\frac{1}{2} (1+5/12 \times 0,08) \]
\[ A_{4+5/12} = 126 477,42 \text{ dh} \]

5.8
La situation peut être résumée de la manière suivante:

<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th>22 500</th>
<th>22 500</th>
<th>22 500</th>
<th>9,25%</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>31/10/05</td>
<td>0</td>
<td>1</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>31/10/06</td>
<td>2</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>31/10/07</td>
<td></td>
<td></td>
<td>10</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>31/10/2014</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

Au 31/10/05 on a: \[ A_0 = 22 500 \times 1,0925^{10} = 142 821,83 \text{ dh} \]
Au 31/10/04, on a un différé d'1 an:

\[ A_1 = A_0 \times 1,0925^{1} = 130 729,36 \text{ dh} \]

5.9
1er cas:

\[ 400 000 = 66 000 \times \frac{1}{i} - (1+i)^{-12} \]
Par tâtonnement (ou par la table n 4) puis par interpolation linéaire on trouve un taux de 12,47 % par an.

2ème cas:

\[ 400 000 = 66 000 \times \frac{1}{i} - (1+i)^{-12} \times (1+i)^{-1} \]
Par tâtonnement puis par interpolation linéaire on trouve un taux de 10,38 %.

5.10
1ère solution : utilisation des taux proportionnels.

\[ i = 0,13 \times 108333 = 0,108333 \]

Mathématiques Financières

\[ a_{1-1,010833^{48}} = 180 000 \rightarrow a = 4 828,95 \]

2ème solution : utilisation des taux équivalents

\[ i = 113^{1/2} - 1 = 0,102368 \]
\[ a_{1-1,0102368^{48}} = 180 000 \rightarrow a = 4 765,25 \]

5.11
Ici on a un différé de 9 mois:

\[ D = 9 000 \times 1-1,03125^{24} \times 1,03125^{3} = 137 126,15 \text{ dh} \]

5.12
a) La capacité de remboursement du ménage est de

\[ 12 000 \times 0,3 = 3 600 \text{ dh par mois} \]

D'où le montant demandé:

\[ D = 3 600 \times 1-1,01041666^{180} = 292 084,02 \text{ dh} \]

b) On calcule d'abord la mensualité de remboursement:

\[ 200 000 = a_1-1,01041666^{180} \rightarrow a = 2 465,04 \text{ dh} \]

Il reste 96 mensualités à payer:

\[ D_{94} = 2 465,04 \times 1-1,008333^{96} = 162 450,08 \text{ dh} \]

Quand le taux diminue la valeur actuelle augmente, ici le client doit supporter une pénalité de 2,5 points (le taux annuel passe de 12,5 % à 10 % seulement).

5.13
\[ i = 1,04^{1/12} - 1 = 0,0032737 \]
Pour 8 ans M. Ben Abdallah doit verser à sa société:

\[ A = 350 000 \times 0,0032737 \times 4 254,61 \text{ dh} \]

171
Mathématiques Financières

5.14

a) $550\,000 = a \times (1.1^6 - 1) \times 1.1^2 \quad \rightarrow \quad a = 58\,912.45\,dh$

b) Le prix de la machine est égal à

$P = 550\,000 + 49\,064.45 = 1\times 1.065^{15} + 1.065^{15} - 1 = 1\,000\,000\,dh$

5.15

a) Ici on utilise les taux équivalents :

$i = 1.09^{12} - 1 = 0.00720732$

Le capital est constitué un mois après le dernier versement :

\[
\text{Age} \quad \text{cotisation mensuelle} \quad \text{Capital à 60 ans}
\]

<table>
<thead>
<tr>
<th>Âge</th>
<th>Cotisation mensuelle</th>
<th>Capital à 60 ans</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>30 ans</td>
<td>300 dh</td>
<td>300 \times 1.0072^{20} - 1 = 514.314</td>
</tr>
<tr>
<td>40 ans</td>
<td>600 dh</td>
<td>600 \times 1.0072^{30} - 1 = 386.074</td>
</tr>
<tr>
<td>50 ans</td>
<td>1500 dh</td>
<td>1500 \times 1.0072^{40} - 1 = 386.629</td>
</tr>
</tbody>
</table>

5.16

\[
\begin{array}{cccccccc}
159\,448.39 & a & a & a & - & - & 622\,059.49 \\
\hline
-1 & 0 & 1 & 2 & 12 & 13 & 14 \\
\hline
\end{array}
\]

\[
\frac{1}{1-0.09^{15}} = 0.095 \quad \text{soit} \quad 9.5\% \text{ l'an}
\]

D'où $A_0 = 159\,448\times 1.095 = 174\,595.99\,dh$

b) $a = 174\,595.99 \times 0.095 = 25\,000\,dh$

\[
\frac{1}{1.095^{12}} = 0.095
\]

c) $25\,000 \times 12 = 300\,000 \text{ ici on cherche l'échéance moyenne de la suite}

\[
12 \times 0.095^{n-1} = 1 - 0.095^{12} \quad \rightarrow \quad n = 5 \text{ ans, 11 mois et 17 jours}
\]

5.17

\[
\begin{array}{cccccc}
35\,000 & 50\,000 & 65\,000 & 200\,000 \\
\hline
0 & 1 & 2 & 3 & 12 \\
\hline
\end{array}
\]

\[
A_{12} = (35\,000 + 15\,000) \times 1.05^{12} - 1 = 12 \times 15\,000 = 2\,205\,280.14\,dh
\]

\[
A_14 = A_{12} \times 1.05^{2} = 2\,692\,702.19\,dh
\]
6. Les emprunts indivis

6.1

Les deux premières années l'emprunteur versera à la fin de chaque année 19 800 dh au titre d'intérêts (180 000 x 0,11 = 19 800). Pour les deux dernières années l'intérêt annuel n'est plus que de 9 900dh. En effet, juste après le versement du 2ème terme, la dette initiale est réduite de moitié. D'où le tableau d'amortissement :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>Amortis</th>
<th>Annuité</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>180 000</td>
<td>19 800</td>
<td>0</td>
<td>19 800</td>
<td>180 000</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>180 000</td>
<td>19 800</td>
<td>90 000</td>
<td>109 800</td>
<td>90 000</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>90 000</td>
<td>9 900</td>
<td>0</td>
<td>9 900</td>
<td>90 000</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>90 000</td>
<td>9 900</td>
<td>90 000</td>
<td>99 900</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>

6.2

Il convient d'abord de calculer le 1er amortissement :

Soit X ce 1er amortissement : $M_1 = X$

On sait que : $\sum_{p=1}^{5} M_p = 215 000$

On encore : $X + (X + 10 000) + (X + 20 000) + \ldots + (X + 40 000) = 215 000$
Mathématiques Financières

Ce qui donne : \( 5 \times 100\ 000 = 215\ 000 \)

D'où : \( X = 23\ 000 \)

\[ S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = n \times U_1 + \frac{n(n-1)}{2} r \]

avec \( S_5 = 215\ 000 \) et \( r = 10\ 000 \) on trouve :

\[ U_1 = 23\ 000 \]

Le tableau d'amortissement se présente comme suit :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>AMORT</th>
<th>ANN</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>215\ 000,00</td>
<td>22\ 575,00</td>
<td>23\ 000,00</td>
<td>45\ 575,00</td>
<td>192\ 000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>192\ 000,00</td>
<td>20\ 160,00</td>
<td>33\ 000,00</td>
<td>53\ 160,00</td>
<td>159\ 000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>159\ 000,00</td>
<td>16\ 695,00</td>
<td>43\ 000,00</td>
<td>56\ 695,00</td>
<td>116\ 000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>116\ 000,00</td>
<td>12\ 180,00</td>
<td>53\ 000,00</td>
<td>65\ 180,00</td>
<td>63\ 000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>63\ 000,00</td>
<td>6\ 615,00</td>
<td>63\ 000,00</td>
<td>69\ 615,00</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>

6.3

a) Le taux d'intérêt s'écrit :

\[ i = 1116,84 \div 93\ 070 = 0,12 \text{ soit } 1,2 \% \text{ par mois.} \]

Le 40\ème amortissement se calcule ainsi :

\[ M_{40} = 2786,84 \times 1116,84 = 1\ 670\ dh \]

Comme on connaît la loi des amortissements (progression arithmétique de raison \( r = 30 \)) la construction des lignes demandées du tableau d'amortissement ne semble pas poser de problèmes particuliers.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>Amortis</th>
<th>Mensualité</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>40</td>
<td>93\ 070,00</td>
<td>1\ 116,84</td>
<td>1\ 670,00</td>
<td>2\ 786,84</td>
<td>91\ 400,00</td>
</tr>
<tr>
<td>41</td>
<td>91\ 400,00</td>
<td>1\ 096,80</td>
<td>1\ 700,00</td>
<td>2\ 796,80</td>
<td>89\ 700,00</td>
</tr>
<tr>
<td>42</td>
<td>89\ 700,00</td>
<td>1\ 076,40</td>
<td>1\ 730,00</td>
<td>2\ 806,40</td>
<td>87\ 970,00</td>
</tr>
<tr>
<td>43</td>
<td>87\ 970,00</td>
<td>1\ 056,64</td>
<td>1\ 760,00</td>
<td>2\ 816,64</td>
<td>86\ 240,00</td>
</tr>
</tbody>
</table>

b) La mensualité constante s'écrit :

\[ a = 134\ 800 \times 0,012 = 2\ 630,62\ dh \]

La dette restante juste après le paiement de la 39ème mensualité peut être calculée de 3 manières :

\[ DV_{39} = 134\ 800 \times 0,102^{39} - 0,102^{39} = 84\ 794,52\ dh \]

\[ DV_{39} = 134\ 800 \times 0,102^{39} - 2\ 630,62 \times 0,102^{39} = 84\ 794,52\ dh \]

\[ DV_{39} = 2\ 630,62 \times 0,102^{39} - 1 = 84\ 794,52\ dh \]

6.4

Pour les deux dernières formules on a tenu compte, au niveau de la mensualité, de tous les chiffres après la virgule.

En multipliant \( DV_{39} \) par le taux on trouve l'intérêt, que l'on retranche de la mensualité pour trouver l'amortissement :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>Amortis</th>
<th>Mensualité</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>40</td>
<td>84\ 794,52</td>
<td>1\ 017,53</td>
<td>1\ 613,09</td>
<td>2\ 630,62</td>
<td>83\ 181,43</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Cette ligne peut être établie autrement :

\[ M_{40} = M_1 (1+r)^{39} = 134\ 800 \times 0,102^{39} = 1\ 613,08 \]

Par soustraction on obtient l'intérêt puis le capital en début de période.

a) On calcule d'abord l'intérêt :

\[ a = 450\ 000 \times 0,125 = 114\ 140,64\ dh \]

\[ 1-1,125^{-48} \]
Mathématiques Financières

<table>
<thead>
<tr>
<th>ANNÉE</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>TVA</th>
<th>AMORT</th>
<th>ANNU</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>420000,00</td>
<td>462000,00</td>
<td>46200,00</td>
<td>65980,86</td>
<td>116800,86</td>
<td>354019,14</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>354019,14</td>
<td>38942,11</td>
<td>38942,41</td>
<td>79945,55</td>
<td>116800,86</td>
<td>280054,59</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>3280054,59</td>
<td>30086,01</td>
<td>30086,00</td>
<td>82914,26</td>
<td>116800,86</td>
<td>197140,34</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>197140,34</td>
<td>21685,44</td>
<td>21685,54</td>
<td>92948,88</td>
<td>116800,86</td>
<td>104193,45</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>104193,45</td>
<td>11461,28</td>
<td>11461,13</td>
<td>104193,45</td>
<td>116800,86</td>
<td>0,00</td>
</tr>
</tbody>
</table>

b) L'amortissement s'écrit : \( M = 420000 = 84000 \) dh

D'où le tableau d'amortissement :

<table>
<thead>
<tr>
<th>ANNÉE</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>TVA</th>
<th>AMORT</th>
<th>ANNU</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>420000,00</td>
<td>462000,00</td>
<td>46200,00</td>
<td>84000,00</td>
<td>134620,00</td>
<td>336000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>336000,00</td>
<td>36960,00</td>
<td>36960,00</td>
<td>84000,00</td>
<td>124656,00</td>
<td>252000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>252000,00</td>
<td>27720,00</td>
<td>27720,00</td>
<td>84000,00</td>
<td>114492,00</td>
<td>168000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>168000,00</td>
<td>18480,00</td>
<td>18480,00</td>
<td>84000,00</td>
<td>104328,00</td>
<td>84000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>84000,00</td>
<td>9240,00</td>
<td>9240,00</td>
<td>84000,00</td>
<td>94164,00</td>
<td>0,00</td>
</tr>
</tbody>
</table>

6.6 a) Le premier amortissement se calcule ainsi :

\[ M_1 = 106 \, 190,50 - 72000 = 34 \, 190,50 \text{ dh} \]

Or

\[ M_1 = M_0 \left(1 + i\right)^2 \]

D'où

\[ \left(1 + i\right)^2 = \frac{M_1}{M_0} \]

Ce qui donne : \( i = \left(\frac{M_1}{M_0}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,12 \) soit : 12 % \%.

b) \( C = 72000 = 600000 \) dh

0,12

c) \( a = C \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \quad M_1 = C \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \]

D'où \( M_1 / a = \left(1 + i\right)^{-n} = 2,310548 \)

Par logarithmes on trouve \( n = 10 \)

6.7 Pour le calcul de l'amortissement il y a lieu de tenir compte du différend de 2 ans; en effet, si on se situe un an avant le 1er versement le capital n'est plus de 500 000 dh mais de 627 200 dh (= 500 000 x 1,12^2) d'où l'amortissement :

\[ a = 627200 \cdot 0,12 = 152551,17 \text{ dh} \]

1-1,12^6
D'où le tableau d'amortissement :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CD P</th>
<th>I</th>
<th>AMORT</th>
<th>ANN</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>500 000,00</td>
<td></td>
<td></td>
<td>560 000,00</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>560 000,00</td>
<td></td>
<td></td>
<td>560 000,00</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>627 200,00</td>
<td>75 264,00</td>
<td>77 287,17</td>
<td>1 522 551,17</td>
<td>549 912,83</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>549 912,83</td>
<td>65 989,54</td>
<td>86 561,63</td>
<td>1 522 551,17</td>
<td>463 351,20</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>463 351,20</td>
<td>55 602,14</td>
<td>96 949,03</td>
<td>1 522 551,17</td>
<td>366 402,17</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>366 402,17</td>
<td>43 968,26</td>
<td>108 828,91</td>
<td>1 522 551,17</td>
<td>257 819,26</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>257 819,26</td>
<td>30 938,31</td>
<td>121 612,85</td>
<td>1 522 551,17</td>
<td>136 206,40</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>136 206,40</td>
<td>16 344,77</td>
<td>136 206,40</td>
<td>1 522 551,17</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>

1) Le capital à amortir n'est plus de 500 000 dh mais de 627 200 dh. En effet il y a lieu, ici, de tenir compte des intérêts de 2 ans, qui se sont accumulés.

2) L'introduction de la TVA est une complication dans la mesure où le capital à amortir est partagé entre l'organisme de crédit et l'État. Les questions relatives à la fiscalité seront abordées dans un deuxième tome.

Dans la pratique, le remboursement s'effectue à l'aide de mensualités. Cela ne semble pas poser de problèmes particuliers, il suffit de se rappeler que les organismes de crédit utilisent, généralement, pour ce type de situation, les taux proportionnel. Ici le taux mensuel sera :

\[ i_m = \frac{0.09 \times 1.07}{12} = 0.008025 \text{ TTC} \]

Soit 0.8025 % par mois TTC

a) Ici on a 9 annuités de placement, le capital de 320 000 dh doit être constitué un an après le dernier versement :

\[ 320 000 = a \left( \frac{1.09^{-1} - 1}{0.09} \right) \rightarrow a = 22 546,44 \text{ dh} \]

b) L'emprunteur verse :

- 38 400 dh (320 000 \times 0.12)

Pendant 10 ans à l'organisme de crédit ;

- et 22 546,44 dh pendant 9 ans à l'organisme de capitalisation.

En actualisant ces versements au taux de 12 % on obtient : 

\[ A_9 = (38 400+22 546,44) \left(1-1.12^{-9} \right) + 38 400 \times 1.12^{-10} \]

\[ A_9 = 33 710,63 \text{ dh} \]

C'est le montant du crédit qui correspond aux engagements de l'emprunteur. Nous avons donc une différence de 17 101,63 dh. Il s'agit ici de montrer à tel point le système américain pénalise l'emprunteur.

D'où le tableau d'amortissement :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CD P</th>
<th>I</th>
<th>TVA</th>
<th>AMORT</th>
<th>ANN</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>375 000,00</td>
<td>33 750,00</td>
<td>2 362,50</td>
<td>0,00</td>
<td>361 12,50</td>
<td>375 000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>375 000,00</td>
<td>33 750,00</td>
<td>2 362,50</td>
<td>0,00</td>
<td>361 12,50</td>
<td>375 000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>375 000,00</td>
<td>33 750,00</td>
<td>2 362,50</td>
<td>0,00</td>
<td>361 12,50</td>
<td>375 000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>313 121,75</td>
<td>281 809,6</td>
<td>1 972,67</td>
<td>0,73</td>
<td>245 284,63</td>
<td>245 284,63</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>245 284,63</td>
<td>220 752,6</td>
<td>1 545,29</td>
<td>0,73</td>
<td>170 914,80</td>
<td>170 914,80</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>17 091,48</td>
<td>15 382,33</td>
<td>1 076,76</td>
<td>0,73</td>
<td>89 383,15</td>
<td>89 383,15</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>89 383,15</td>
<td>8 044,48</td>
<td>563,11</td>
<td>0,73</td>
<td>97 990,75</td>
<td>97 990,75</td>
</tr>
</tbody>
</table>

a) Un an après le dernier versement on se retrouve avec une valeur acquise de :

\[ A_6 = 37 330,67 \times 1.085^{-1} \times 1.085 = 33 999,98 \text{ dh} \]

Qu'on arrondit à 240 000 dh

Il lui manque donc 260 000 – 240 000 = 20 000 dh, qu'il doit verser avec l'intérêt de la dernière année (33 800 dh).
b) À la date 0 on a:

\[
\left(33\,800 + 37\,330,67\right) \left(1 + \underbar{i}\right)^{5} + \left(33\,800 + 20\,000\right) (1 + \underbar{i})^{0} = 360\,000
\]

Par tâtonnement on trouve \( \underbar{i} = 0,1525 \) soit 15.25 % l'an. Là, également on réalise à tel point l'emprunteur est pénalisé.

\[
7 
\]

**Les emprunts obligataires**

7.1 a) Le nominale de la dette s'écrit :

\[
C = \frac{\text{d}B}{i} \quad \Rightarrow \quad 6\,000\,000 = 600\,000\,000 \, \text{dh}
\]

Le coupon d'une obligation est égal à :

\[
V = 575 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{575}{0,115} = 5\,000 \, \text{dh}
\]

En divisant le nominale \( C \) par la valeur d'une obligation, on obtient le nombre total d'obligations :

\[
N = \frac{C}{V} = 120\,000 \, \text{obligations}
\]

La société rembourse chaque année 2 000 obligations

\( 10\,000\,000 \quad \Rightarrow \quad 20\,000 \); en 6 ans, elle amortit donc toute sa dette.

5 000

b) L'amortissement est constant, mais l'intérêt diminue chaque année de 1 500 000 dh

\( (10\,000\,000 \times 0,115) \)

En effet, chaque année 20 000 obligations sont amorties

\( (20\,000 \times 575 = 11\,500\,000 \, \text{dh}) \)

Les annuités sont donc en progression arithmétique de raison

\[ r = -1\,150\,000 \quad \text{et de premier terme} \quad a_1 = 16\,900\,000 \, \text{dh} \]
7.2

a) \[ \sum_{n} m_n = 22,000 \text{ on trouve } n = 8 \]

1 000 + 1 500 + 2 000 + 2 500 + 3 000 + 3 500 + 4 000 + 4 500 = 22 000

b) A partir de la colonne des nombres d'obligations amorties, on construit le tableau d'amortissement (les valeurs sont exprimées en milliers de dh)

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>NOA</th>
<th>AMORT</th>
<th>AAUNU</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>33 000,00</td>
<td>4 125,00</td>
<td>1 000</td>
<td>1 500</td>
<td>5 625,00</td>
<td>31 500,00</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>31 500,00</td>
<td>3 977,40</td>
<td>1 500</td>
<td>2 250</td>
<td>6 187,50</td>
<td>29 250,00</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>29 250,00</td>
<td>3 652,25</td>
<td>2 000</td>
<td>3 000</td>
<td>6 656,25</td>
<td>26 250,00</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>26 250,00</td>
<td>3 281,25</td>
<td>2 500</td>
<td>3 750</td>
<td>7 031,25</td>
<td>22 500,00</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>2 500,00</td>
<td>2 812,50</td>
<td>3 000</td>
<td>4 500</td>
<td>7 312,50</td>
<td>18 000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>18 000,00</td>
<td>2 250,00</td>
<td>3 500</td>
<td>5 250</td>
<td>7 500,00</td>
<td>12 750,00</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>12 750,00</td>
<td>1 593,75</td>
<td>4 000</td>
<td>6 000</td>
<td>7 593,75</td>
<td>6 750,00</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>6 750,00</td>
<td>843,75</td>
<td>4 500</td>
<td>6 750</td>
<td>7 593,75</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>

7.3

a) Icono:

\[ C = 50 000 000 \text{ dh, } V = 50 000 000 = 5 000 \text{ dh} \]

\[ R = 5 500 \text{ dh} \]

Soit, \( i' = \frac{V}{100} = 0,1090909 \)

Le premier nombre d'obligations amorties s'écrit :

\[ m_1 = \frac{10 000 \times 0,1090909}{1,1090909 - 1} = 1 608,61 \]

En multipliant à chaque fois par 1,1090909, on obtient les autres nombres d'obligations amorties :

\[ m_2 = 1 784,69 \]

\[ m_3 = 1 978,72 \]

\[ m_4 = 2 194,58 \]

et 

\[ m_5 = 2 433,88 \]

On forme le cumul de ces nombres qu'on arrondit à l'entier le plus voisin ; par soustraction on obtient les nombres d'obligations arrondies qui permettent la construction du tableau d'amortissement.

7.4

La société doit payer à la fin de chaque année pour les 61 premières obligations la somme de :

\[ 30 100 + 10 \times 8 000 + 50 \times 00 = 360 100 \text{ dh} \]

Soit une prime nette de :

\[ 360 100 - 61 \times 3 500 = 146 600 \text{ dh} \]

Comme cette prime est constante, la construction du tableau d'amortissement ne pose pas de problème. Les amortissements restent en progression géométrique de raison 1,05

Le tableau d'amortissement se présente comme suit (en milliers de dh):

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>NOA</th>
<th>AMORT</th>
<th>PRIME</th>
<th>ANNU</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>63 000,00</td>
<td>6 615,00</td>
<td>1 546</td>
<td>5 411,00</td>
<td>146,60</td>
<td>12 172,60</td>
<td>57 589,00</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>57 589,00</td>
<td>6 064,85</td>
<td>1 708</td>
<td>5 978,00</td>
<td>146,60</td>
<td>12 171,45</td>
<td>51 611,00</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>51 611,00</td>
<td>5 419,16</td>
<td>1 887</td>
<td>6 604,50</td>
<td>146,60</td>
<td>12 170,26</td>
<td>45 006,50</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>45 006,50</td>
<td>4 725,68</td>
<td>2 085</td>
<td>7 297,50</td>
<td>146,60</td>
<td>12 169,78</td>
<td>37 709,00</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>37 709,00</td>
<td>3 995,45</td>
<td>2 305</td>
<td>8 067,50</td>
<td>146,60</td>
<td>12 173,55</td>
<td>29 641,50</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>29 641,50</td>
<td>3 112,36</td>
<td>2 546</td>
<td>8 911,00</td>
<td>146,60</td>
<td>12 169,96</td>
<td>20 730,50</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>20 730,50</td>
<td>2 176,70</td>
<td>2 814</td>
<td>9 849,00</td>
<td>146,60</td>
<td>12 172,30</td>
<td>10 881,50</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>10 881,50</td>
<td>1 142,56</td>
<td>3 109</td>
<td>10 881,50</td>
<td>146,60</td>
<td>12 170,66</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>
- Loi 1 on a : \( V = 2500 \text{ dh } (= 6250000) \), \( R = 2800 \text{ dh } \)
\[ i = 0.13 \text{ et } V_i = 325 \text{ dh } \]

- Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 1ère année :
  à la date 0 ; il verse 2500 dh
  à la date 1 ; il reçoit 3125 dh

À la date 1 on a :
\[ 2500(1+i) = 3125 \leftarrow \rightarrow i = 0.25 \text{ soit } 25\% \]

- Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 2ème année
  à la date 0 ; il verse 2500 dh
  à la date 1 ; il reçoit 325 dh
  à la date 2 ; il reçoit 3125 dh

À la date 2 on a :
\[ 2500(1+i)^2 = 325(1+i) + 3125 \]
La résolution donne : \( t = 0.1849 \), soit 18,49 %

- Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 8ème année
  à la date 0 ; il verse 2500 dh
  à la date 1 ; il reçoit 325 dh
  à la date 8 ; il reçoit 325 + 2800 = 3125 dh

À la date 8 on a :
\[ 2500(1+i)^8 = 325(1+i)^7 + 1 + 2800 \]

Ou encore
\[ 2500(1+i)^8 - 325(1+i)^7 - 1 = 2800 \]

Par tâtonnement, puis par interpolation linéaire, on trouve
\[ i = 0.1391 ; \text{ soit } t = 13,91\% \]

\[ \Delta \]

On remarque donc que le taux de rendement diminue, cette situation s'explique par le fait que la prime de remboursement, qui est de 300 dh (\( = 2800 - 2500 \)) a plus de valeur à la fin de la 1ère année qu'à la fin de la 2ème année ; elle a beaucoup moins de valeur à la fin de la 8ème année.

\[ \Delta \]

On remarque également que le taux de rendement diminue. Dans le fond, cette situation ne diffère pas de la précédente (cf. exercice n° 7.5). En effet, on peut considérer ici que la valeur nominale est de 3000 dh et que la valeur de remboursement est de 250 dh ; dans ce cas, le taux d'intérêt initial n'est plus de 12,50 % mais de 13,54 % à peu près (\( t = 406,25/3000 \))

- 7.6

a) Loi 1 on a :
\[ V = 45750000 = 3250 \text{ dh } \]
\[ i = 0.125 \text{ et } V_i = 406,25 \text{ dh } \]

L'obligation est achetée à une valeur \( E = 3000 \text{ dh } \), inférieure à la valeur nominale, soit une prime de remboursement de 250 dh par obligation.

b) Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 1ère année :
  À la date 0 ; il verse 3000 dh
  À la date 1 ; il reçoit 406,25 dh

À la date 1 on a :
\[ 3000(1+i) = 3250 + 406,25 \]
\[ \leftarrow \rightarrow i = 0.21875 \text{ soit } 21,88\% \]

- Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 2ème année :
  À la date 0 ; il verse 3000 dh
  À la date 1 ; il reçoit 406,25 dh
  À la date 2 ; il reçoit 3656,25 dh

À la date 2 on a :
\[ 3000(1+i)^2 = 406,25(1+i) + 3656,25 \]
ce qui donne : \( i = 0.1738 \text{ soit } t = 17,38\% \)

- Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 6ème année :
  À la date 0 ; il verse 3000 dh
  À la date 1 ; il reçoit 406,25 dh
  À la date 6 ; il reçoit 3656,25 dh

À la date 6 on a :
\[ 3000(1+i)^6 = 406,25(1+i)^5 + 3250 \]

On trouve : \( i = 0,1451 \text{ soit } t = 14,51\% \)

\[ \Delta \]

On remarque que les taux d'intérêt initiaux ne sont pas constants. Ils ne sont pas plus en progression arithmétique ; en effet :
L'écart est trop grand.

\[ m_2 - m_1 = 404 \]
\[ m_3 - m_2 = 451 \]

Ainsi :

\[ m_2 \neq m_3 \]

Les nombres d'obligations amorties semblent être en progression géométrique (on retiendra comme ratio \( q = 1,125 \)). Le système adopté ici est celui de l'amortissement par annuités constantes.

b) 

Ici on a :

\[ V = M_1 = 16,177,500 = 4,500 \text{ dh} \]
\[ m_1 = 3,595 \]

Et

\[ R = 17,256,000 = 4,800 \text{ dh} \]
\[ 3,595 \]

\[ i = \frac{V}{R} = 0,1125 \]

\[ \Rightarrow i = R \frac{i}{V} = 0,12 \]

Soit 12%.

L'intérêt de la première année s'écrit :

\[ I_1 = a_1 - m_1 R = 29,406,000 - 17,256,000 \]
\[ I_1 = 12,150,000 \]

D'où

\[ C = I_1 = 12,150,000 \]
\[ i = 0,12 \]

c) Le nombre total d'obligations est égal à :

\[ N = C = 22,500 \text{ obligations} \]

On sait que

\[ m_1 = \frac{N}{V} - \frac{i}{(1 + i)^n} - 1 \]

Ce qui donne

\[ 1,1125^5 = 1,704 \]

Par logarithmes, on trouve \( n = 5 \).

7.8

Comme le remboursement se fait à une valeur (3 000 dh par obligation) supérieure à la valeur nominale (2 750 dh par obligation), l'emprunt va revenir à la société plus cher qu'il ne devrait l'être. Le taux réel sera donc supérieur à 12%. Le taux réel de l'emprunt est celui qui égale le capital perçu par la société et les engagements actualisés de celle-ci. Il importe donc de calculer les annuités de remboursement.

Mathématiques Financières

a) amortissements constantes :

Le tableau d'amortissement se présente comme suit : (en milliers de dh):

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>NOA</th>
<th>AMORT</th>
<th>REMB</th>
<th>ANNU</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>41 250</td>
<td>4 950</td>
<td>3 000</td>
<td>8 250</td>
<td>9 000</td>
<td>13 950</td>
<td>33 000</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>33 000</td>
<td>3 960</td>
<td>3 000</td>
<td>8 250</td>
<td>9 000</td>
<td>12 960</td>
<td>24 750</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>24 750</td>
<td>2 970</td>
<td>3 000</td>
<td>8 250</td>
<td>9 000</td>
<td>11 970</td>
<td>16 500</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>16 500</td>
<td>1 980</td>
<td>3 000</td>
<td>8 250</td>
<td>9 000</td>
<td>10 980</td>
<td>8 250</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>8 250</td>
<td>0990</td>
<td>3 000</td>
<td>8 250</td>
<td>9 000</td>
<td>9 990</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>

A la date 0 on a :

\[ 13 950 (1 + i)^1 + 12 960 (1 + i)^2 + 11 970 (1 + i)^3 + 10 980 (1 + i)^4 + 9 990 (1 + i)^5 = 41 250 \]

Par tâtonnement puis par interpolation linéaire,
On trouve : \( i = 0,1478 \) soit \( t = 14,78\% \)

b) annuités constantes :

Le tableau d'amortissement devient : (en milliers de dh):

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>NOA</th>
<th>AMORT</th>
<th>REMB</th>
<th>ANNU</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>41 250</td>
<td>4 950</td>
<td>2 409</td>
<td>6 625</td>
<td>7 227</td>
<td>12 177</td>
<td>34 625</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>34 625</td>
<td>4 155</td>
<td>2 673</td>
<td>7 351</td>
<td>8 019</td>
<td>12 174</td>
<td>27 275</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>27 275</td>
<td>3 273</td>
<td>2 968</td>
<td>8 162</td>
<td>8 904</td>
<td>12 172</td>
<td>19 113</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>19 113</td>
<td>2 294</td>
<td>3 294</td>
<td>9 059</td>
<td>9 882</td>
<td>12 176</td>
<td>10 054</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>10 054</td>
<td>1 206</td>
<td>3 656</td>
<td>10 054</td>
<td>10 968</td>
<td>12 174</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>

A la date 0 on a :

\[ 12 177 (1 + i)^1 + 12 174 (1 + i)^2 + 12 176 (1 + i)^3 + 12 177 (1 + i)^4 + 12 174 (1 + i)^5 = 41 250 \]

On trouve : \( i = 0,1455 \) soit \( t = 14,55\% \)

Remarque

Ce taux est légèrement inférieur au précédent, cela tient au fait que les annuités sont, ici, moins fortes les premières années, par rapport au cas précédent. On démontre aisément que l'annuité effective est : sensiblement égale à :

\[ a = N \frac{R}{1 - (1 + i)^n} \]
L'on a  
\[ a = 15 \, 000 \times 3 \, 000 \times 0,11 \]
\[ a = 12 \, 175 \, 663,93 \, \text{dh} \]

A la date 0 on a:
\[ 12 \, 175 \, 663,93 \frac{1-(1+i)^{-5}}{i} = 41 \, 250 \, 000 \]
D'où:
\[ \frac{1-(1+i)^{-5}}{i} = 3,3879056 \]
Ce qui donne:  \[ i = 0,1455 \]
soit  \( t = 14,55 \% \)

La VAN de ce projet est donc égale à:
\[ \text{VAN} = -900 \, 000 + 333 \, 600 \left[ 1 - (1,12)^{-5} \right] = 302 \, 553,34 \, \text{dh} \]
\[ 0,12 \]

**Investissement B**

<table>
<thead>
<tr>
<th>Année</th>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>3</th>
<th>4</th>
<th>5</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Recettes</td>
<td>1920000</td>
<td>1920000</td>
<td>1200000</td>
<td>1200000</td>
<td>1200000</td>
</tr>
<tr>
<td>Charges</td>
<td>1440000</td>
<td>1440000</td>
<td>1020000</td>
<td>1020000</td>
<td>1020000</td>
</tr>
<tr>
<td>Résultat avant impôts</td>
<td>480000</td>
<td>480000</td>
<td>180000</td>
<td>180000</td>
<td>180000</td>
</tr>
<tr>
<td>IS À 36%</td>
<td>172800</td>
<td>172800</td>
<td>64800</td>
<td>64800</td>
<td>64800</td>
</tr>
<tr>
<td>Résultat après impôts</td>
<td>307200</td>
<td>307200</td>
<td>115200</td>
<td>115200</td>
<td>115200</td>
</tr>
<tr>
<td>Amortissements</td>
<td>192000</td>
<td>192000</td>
<td>192000</td>
<td>192000</td>
<td>192000</td>
</tr>
<tr>
<td>FNT</td>
<td>499200</td>
<td>499200</td>
<td>307200</td>
<td>307200</td>
<td>307200</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Les FNT se présentent ainsi:

- 960 000 499 200 499 200 307 200 307 200 307 200

<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th>0</th>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>3</th>
<th>4</th>
<th>5</th>
</tr>
</thead>
</table>
| Calculons maintenant la VAN
\[ \text{VAN} = -960 \, 000 + 499 \, 200 \left[ 1 - (1,12)^{-2} \right] + 307 \, 200 \left[ 1 - (1,12)^{-3} \right] (1,12)^{2} \]
\[ 0,12 \]
\[ 0,12 \]
\[ = 471 \, 877,04 \, \text{dh} \]

On ne peut pas conclure, car les montants des deux investissements sont différents. Calculons les indices de profitabilité:

\[ IP = \sum_{k=1}^{n} \frac{\text{FNT actualisés}}{I} \]

\[ (IP)_A = \frac{1202 \, 553,34}{900 \, 000} = 1,336 \]

\[ (IP)_B = \frac{1431 \, 877,04}{960 \, 000} = 1,491 \]

Conclusion: choisir l'investissement B.

b) Le tableau suivant nous facilite la recherche des délais de récupération:
### 8.1 La rentabilité des investissements

#### a) Calculons les deux valeurs actuelles (VA):

À 18,75% → $VA = 1000000 \cdot (1,1875)^1 + 1100000 \cdot (1,1875)^2 + 1300000 \cdot (1,1875)^3 + 1500000 \cdot (1,1875)^4 + 700000 \cdot (1,1875)^5 = 3504822,71$ dh

À 19% → $VA = 100000 \cdot (1,19) + 1100000 \cdot (1,19)^2 + 1300000 \cdot (1,19)^3 + 1500000 \cdot (1,19)^4 + 700000 \cdot (1,19)^5 = 3485629,25$ dh

#### b) Calculons les VAN de cet investissement:

Pour 18,75% → $VAN = -350000 + 3504822,71 = +4822,71$ dh

Pour 19% → $VAN = -350000 + 3485629,25 = -14370,25$ dh

Le TIR est tel que:

<table>
<thead>
<tr>
<th>TIR</th>
<th>VAN</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>18,75%</td>
<td>4822,71</td>
</tr>
<tr>
<td>19%</td>
<td>-14370,25</td>
</tr>
</tbody>
</table>
8.2

Calculons la VAN à 16 %

\[
\text{VAN} = -450\,000 + 120\,000 (1,16)^1 + 130\,000 (1,16)^2 +135\,000(1,16)^3 + 125\,000(1,16)^4 + 110\,000(1,16)^5 + 90\,000(1,16)^6 = 807,23\text{ dh}
\]

On sait que le TIR annule la VAN, et que pour toute valeur supérieure au TIR, la VAN est négative.

Puisque à 16% : la VAN = 807,23 dh. Essayons à un taux supérieur, 16,25% par exemple. Pour encadrer le TIR d'où :

<table>
<thead>
<tr>
<th>TIR</th>
<th>VAN</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>16%</td>
<td>807,23</td>
</tr>
<tr>
<td>TIR</td>
<td>0</td>
</tr>
<tr>
<td>16,25%</td>
<td>-1 998,57</td>
</tr>
</tbody>
</table>

TIR = 16 + 0,25 \[0 - 807,23\] - 1 998,57 - 807,23

TIR \approx 16,07 %

8.3

**Investissement A**

Le tableau ci-dessous donne les flux nets de trésorerie.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Année</th>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>3</th>
<th>4</th>
<th>5</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Recettes</td>
<td>1 440 000</td>
<td>1 440 000</td>
<td>1 440 000</td>
<td>1 440 000</td>
<td>1 440 000</td>
</tr>
<tr>
<td>Charges</td>
<td>1 200 000</td>
<td>1 200 000</td>
<td>1 200 000</td>
<td>1 200 000</td>
<td>1 200 000</td>
</tr>
<tr>
<td>= Résultat avant impôts</td>
<td>240 000</td>
<td>240 000</td>
<td>240 000</td>
<td>240 000</td>
<td>240 000</td>
</tr>
<tr>
<td>- IS À 36%</td>
<td>86 400</td>
<td>86 400</td>
<td>86 400</td>
<td>86 400</td>
<td>86 400</td>
</tr>
<tr>
<td>= Résultat après impôts</td>
<td>153 600</td>
<td>153 600</td>
<td>153 600</td>
<td>153 600</td>
<td>153 600</td>
</tr>
<tr>
<td>+ Amortissements</td>
<td>180 000</td>
<td>180 000</td>
<td>180 000</td>
<td>180 000</td>
<td>180 000</td>
</tr>
<tr>
<td>FNT</td>
<td>333 600</td>
<td>333 600</td>
<td>333 600</td>
<td>333 600</td>
<td>333 600</td>
</tr>
</tbody>
</table>

La VAN de ce projet est donc égale à :

\[
\text{VAN} = -900\,000 + 333\,600 \left[ 1 - (1,12)^{-5} \right] = 302\,553,34\text{ dh} \frac{0,12}{0,12}
\]

**Investissement B**

<table>
<thead>
<tr>
<th>Année</th>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>3</th>
<th>4</th>
<th>5</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Recettes</td>
<td>1 920 000</td>
<td>1 920 000</td>
<td>1 200 000</td>
<td>1 200 000</td>
<td>1 200 000</td>
</tr>
<tr>
<td>Charges</td>
<td>1 440 000</td>
<td>1 440 000</td>
<td>1 200 000</td>
<td>1 200 000</td>
<td>1 200 000</td>
</tr>
<tr>
<td>= Résultat avant impôts</td>
<td>480 000</td>
<td>480 000</td>
<td>180 000</td>
<td>180 000</td>
<td>180 000</td>
</tr>
<tr>
<td>- IS À 36%</td>
<td>172 800</td>
<td>172 800</td>
<td>64 800</td>
<td>64 800</td>
<td>64 800</td>
</tr>
<tr>
<td>= Résultat après impôts</td>
<td>307 200</td>
<td>307 200</td>
<td>115 200</td>
<td>115 200</td>
<td>115 200</td>
</tr>
<tr>
<td>+ Amortissements</td>
<td>192 000</td>
<td>192 000</td>
<td>192 000</td>
<td>192 000</td>
<td>192 000</td>
</tr>
<tr>
<td>FNT</td>
<td>499 200</td>
<td>499 200</td>
<td>307 200</td>
<td>307 200</td>
<td>307 200</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Les FNT se présentent ainsi :

<table>
<thead>
<tr>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>3</th>
<th>4</th>
<th>5</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>-960 000</td>
<td>499 200</td>
<td>499 200</td>
<td>307 200</td>
<td>307 200</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Calculez maintenant la VAN

\[
\text{VAN} = -960\,000 + 499\,200 \left[ 1 - (1,12)^{-2} + 307\,200 \left[ 1 - (1,12)^{-3} (1,12)^2 \right] \right] \frac{0,12}{0,12}
\]

\[
= 471\,877,04\text{ dh}
\]

On ne peut pas conclure, car les montants des deux investissements sont différents. Calculons les indices de profitabilité :

\[
\text{IP} = \sum_{k=1}^{n} \text{FNT actualisés}/I
\]

\[
(\text{IP})_A = \frac{1\,202\,553,34}{900\,000} = 1,336
\]

\[
(\text{IP})_B = \frac{1\,431\,877,04}{960\,000} = 1,491
\]

Conclusion : choisir l'investissement B.

b) Le tableau suivant nous facilite la recherche des délais de récupération :

192

193
### Mathématiques Financières

<table>
<thead>
<tr>
<th>Investissement A</th>
<th>Investissement B</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>297 857,14</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>265 943,86</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>237 449,89</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>212 008,83</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>189 293,60</td>
</tr>
</tbody>
</table>

D'où $DR_A$ est compris entre 3 et 4 ans

#### 3

Année | Cumul des FNT act. | DR | 801 250,91 | 900 000 | 1 013 259,74 |

$DR_A = 3 + 900 000 - 801 250,91 = 3,465 778$ années

Soit 3 ans 5 mois et 18 jours.

De la même manière et par interpolation linéaire, on trouve

$DR_B = 2$ ans 6 mois et 12 jours

Conclusion : choisir l'investissement B.

---

On remarque là aussi, l'inconvénient du délai de récupération. En plus du choix arbitraire du taux d'actualisation qui ne prend pas en compte les flux de trésorerie après le délai recherché.

e) **Investissement A**

Recherche du TIR : si $r$ est ce taux, alors :

$$333 600 \left(1 - (1 + r)^5\right) = 900 000$$

Le taux recherché est donc supérieur au taux d'actualisation de 12%.

### Hypothèse 1

On peut écrire à la date 0 :

$$700 000 = 138 800 \left(1 - (1 + r)^9\right)$$

avec $TIR = r$

Ce qui donne $1 - (1 + r)^9 = 5,043227$

D'après la table financière n° 4 on a : $13 < r < 13,5$

Par interpolation linéaire :

<table>
<thead>
<tr>
<th>taux</th>
<th>VAN.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>13 %</td>
<td>12 273,73</td>
</tr>
<tr>
<td>TIR</td>
<td>0</td>
</tr>
<tr>
<td>13,5%</td>
<td>-773,86</td>
</tr>
</tbody>
</table>
Hypothèse 2

A la date 0 on l'égalité suivante :

\[ 700 \, 000 = 138 \, 800 \left(1 - \frac{1}{(1 + r)^9}\right) \left(1 + r\right)^{0.5} \frac{1}{r} \]

On sait en plus que le taux est voisin de 13%.

Essayons de calculer tout d'abord la 1ère VAN à 13%.

On sait que la VAN est négative à 13%. Le taux 13% est donc supérieur au TIR. Essayons par tâtonnements avec des taux inférieurs à 13%.

<table>
<thead>
<tr>
<th>taux</th>
<th>VAN</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>12%</td>
<td>-1180,47</td>
</tr>
<tr>
<td>TIR</td>
<td>0</td>
</tr>
<tr>
<td>11%</td>
<td>29 467,97</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Par interpolation linéaire, on trouve TIR = 11,96% 

b) 

\[ \text{si} \ TIR < 11,96 \% \ 
\text{et} \ H_1 \text{ rentables} 
\text{si} \ 13,47 < TIR < 11,96 \% \ 
\text{et} \ H_1 \text{ non rentable} 
\text{si} \ TIR < 13,47 \% \ 
\text{et} \ H_1 \text{ et } H_2 \text{ non rentables} \]

8.5 

a) Calculons les deux VAN pour les deux investissements au taux d'actualisation : 12%.

\[ VAN_A = 800 \, 000 + 120 \, 000 \left(1,12\right)^1 + 220 \, 000 \left(1,12\right)^2 + 50 \, 000 \left(1,12\right)^3 \]

= 40 555,45 dh

\[ VAN_B = -950 \, 000 + 250 \, 000 \left(1,12\right)^6 \]

= 77 851,83 dh

b) Déterminons les TIR :

**Investissement A**

<table>
<thead>
<tr>
<th>taux</th>
<th>VAN</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>12%</td>
<td>40 555,45</td>
</tr>
<tr>
<td>13%</td>
<td>14 981,30</td>
</tr>
<tr>
<td>TIR</td>
<td>0</td>
</tr>
<tr>
<td>14%</td>
<td>-9 433,12</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Donc, 13 < TIR_A < 14 par interpolation linéaire, on trouve TIR_A = 13,61 %

**Investissement B**

<table>
<thead>
<tr>
<th>taux</th>
<th>VAN</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>12%</td>
<td>77 851,93</td>
</tr>
<tr>
<td>13%</td>
<td>49 387,44</td>
</tr>
<tr>
<td>14%</td>
<td>22 166,87</td>
</tr>
<tr>
<td>TIR</td>
<td>0</td>
</tr>
<tr>
<td>15%</td>
<td>-3 879,33</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Donc, 14 < TIR_B < 15 par interpolation linéaire, on trouve TIR_B = 14,85 %

Conclusion : choisir toujours l'investissement B.
8.6

Les bénéfices nets sont calculés normalement après déduction de l'impôt sur les sociétés. Il faut ajouter à ces bénéfices les dotation aux amortissements :

\[ 800 \, 000 \div 4 = 200 \, 000 \] à la fin de chaque année pour retrouver les flux nets de trésorerie.

D'où le tableau suivant :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Année</th>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>3</th>
<th>4</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Bénéfice net</td>
<td>0</td>
<td>37 500</td>
<td>270 500</td>
<td>270 500</td>
</tr>
<tr>
<td>+ Amortissement</td>
<td>200 000</td>
<td>200 000</td>
<td>200 000</td>
<td>200 000</td>
</tr>
<tr>
<td>FNT</td>
<td>200 000</td>
<td>237 500</td>
<td>470 500</td>
<td>470 500</td>
</tr>
</tbody>
</table>

a) Calculons la VAN à 15% :

\[
\text{VAN} = -800\,000 + 200\,000 (1.15)^4 + 237\,500 (1.15)^2 \\
+ 470\,500 (1.15)^{4/4} + 470\,500 (1.15) \\
= 131\,539.70 \text{ dh}
\]

d) On sait, d'après la réponse précédente, que le TIR est supérieur à 15 %.

Essayons de le déterminer par tâtonnements :

<table>
<thead>
<tr>
<th>taux</th>
<th>VAN</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>15%</td>
<td>(131,539.70)</td>
</tr>
<tr>
<td>20%</td>
<td>(31,471.80)</td>
</tr>
<tr>
<td>TIR</td>
<td>0</td>
</tr>
<tr>
<td>22%</td>
<td>(-5,007.40)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Par interpolation linéaire, on trouve : TIR = 21.72 %
Intérêts simples
Escompte commerciale
Equivalence à intérêt simple

Intérêt simple

A-1 Un héritage brut s'élève à 1 200 000 dh, sur lequel il y'a 20% de droit à payer. A combien se montent les droits ?
Solution → D = 240 000 dh

A-2 Le prix d'achat d'une marchandise est de 3 600 dh. A combien faut-il vendre pour gagner 25 % du PV ?
Solution → PV = 4 800 dh

A-3 Le prix de vente TVA de 19,5% comprise, d'un produit s'élève à 1 434 dh. Que vaut son prix hors TVA ?
Solution → P (hors TVA) = 1 200 dh

A-4 a) A quel bénéfice en % du PV correspondent un bénéfice de 10 % du PA ?
b) A quel bénéfice en % du PA correspond un bénéfice de 25 % du PV ?
Solution → a) t = 9,09 %
b) t = 33,33 %

A-5 Calculer l'intérêt d'un placement de 12 620 dh pendant 72 jours. Taux 5,5 %.
Solution → I = 204,82 dh

Mathématiques Financières

A-6 Calculer l'intérêt produit par un placement de 7 645 dh au taux annuel de 8 % du 17 mars au 14 octobre 2006 ?
Solution → I = 358,47 dh

A-7 Calculer l'intérêt produit par 4 832 dh placés au taux annuel de 4,75 % du 3 juin 2006 au 27 novembre 2006 ? Pour l'année civile et commerciale.
Solution → Pour 360 jours, I = 110,93 dh
Pour 365 jours, I = 109,34 dh

A-8 Calculer l'intérêt produit par un placement de 9 800 dh au taux annuel de 4,50 % du 18 août 2006 au 27 décembre 2006 sur un livret d'épargne ?
Solution → I = 128,63 dh

A-9 Quel est le capital qui, placé au taux annuel de 6 % pendant 45 jours, rapporte 19,80 dh ?
Solution → I = 2 640 dh

A-10 Quel est le capital qui, placé au taux annuel de 8,5 % pendant 81 jours, acquiert une valeur acquise de 3 587,32 dh ?
Solution → I = 3 520 dh

A-11 A quel taux annuel a été placé un capital de 4 600 dh qui a rapporté en 91 jours 62,79 dh d'intérêt ?
Solution → t = 5,4 %

A-12 A quel taux trimestriel a été placé un capital de 5 425 dh qui rapporté en 108 jours 123,69 dh d'intérêt ?
Solution → t = 1,9 % taux proportionnel et trimestriel.

A-13 Au bout de combien de temps un capital de 4 320 dh, placé au taux annuel de 5,75 % acquiert une valeur acquise de 4 524,93 dh ?
Solution → n = 297 jours
Mathématiques Financières

A-14 Après une baisse de 15 % suivit d'une baisse de t %, on obtient une baisse de 30%. Calculer t.

Solution $\rightarrow t = 17,65$ % taux annuel

A-15 On supposant que l'herbe d'une pelouse grandit de 5 % par jour, quel sera le pourcentage d'augmentation arrondi à l'unité, de sa hauteur en 15 jours ?

Solution $\rightarrow$ le pourcentage d'augmentation est $= 108$ %

A-16 Une personne place les 3/7 de son capital à 9 % pendant 8 mois, le reste est placé à un certain taux pendant 14 mois. La première partie lui rapporte 1 260 dh d'intérêt, la deuxième partie lui rapporte 3 920 dh d'intérêts

a) Trouver le capital placé.
b) Déterminer le taux pour lequel la deuxième partie du capital est placé.
c) Calculer le taux moyen des deux placements.

Solution $\rightarrow a) C = 49 000$ dh $C_1 = 28 000$ dh $C_2 = 21 000$ dh
b) $t = 12$ %
c) $t$. moy $= 11,1$ %

A-17 Un capital C placé à 9 % pendant une certaine durée a acquis une valeur de 317 500 dh. Placé à 10 % pendant un an de moins ce capital C fournit un intérêt de 50 000 dh. Calculer le capital et la durée de ce placement.

Solution $\rightarrow C = 50 000$ dh et $n = 3$ ans

A-18 le 15 avril, un particulier présente 3 effets à l'escompte. La banque lui remet la même somme pour chacun d'eux :

Le premier est de 4 800 dh au 27 mai.
Le deuxième est de 4 834,32 dh 17 juin
Le troisième est de 4 896 dh.

1) Déterminer le taux d'escompte (arrondi).
2) Calculer la somme totale remise par la banque au client.
3) Quelle est l'échéance du troisième effet.

Escompte à intérêt simple.

Solution $\rightarrow 1) t = 12$ %
2) $S = 14 198,4$ dh
3) Le 24 juillet de la même année.

A-19 Le 28 février 2006, je promets de payer à l'ordre de Mr. ERRADI Mohamed la somme de mille cinq cent dirhams... (1 500 dh) avec l'intérêt de 15 %.

Ce billet est escompté le 14 décembre 2005 au taux de 13 %.

Calculer: a) l'escompte du billet.
b) la période de l'escompte.
c) la valeur définitive.
d) l'escompte de la banque.
e) la valeur actuelle du billet.

Solution $\rightarrow a) le 28 février 2006$
b) 76 jours
c) 1 581,75 dh
d) 43,41 dh
e) 1 538,34 dh

A-20 Le 26 avril deux effets sont présentés à l'escompte chez la même banque, au même taux. La banque remet la même somme nette pour chacun des deux effets. Sachant que le nominal du premier effet est de 7 370 dh et que son échéance est fixée au 31 mai, et que le nominal du deuxième effet est de 7 430 dh avec une échéance au 30 juin. Chercher le taux de l'escompte.

Solution $\rightarrow t = 9,6$ % taux annuel.

A-21 Une personne place 10 000 dh à intérêts simples à un certain taux. À la fin de l'année, elle joint les intérêts au capital et replace le tout pour une autre année à un taux inférieur de 1 % au précédent. Au bout de la deuxième année elle retire 11 130 dh.

Quels sont les taux auxquels cette personne a placé son argent ? Vérifier.

Solution $\rightarrow 1^r$ taux $= 6$ % les taux sont annuels.
$2^e$ taux $= 5$ %

A-22 Une personne achète un poste de télévision d'un montant de 7 500 dh le 01/12/05. Elle paie 20 % au comptant, le solde en trois mensualités constantes. Le premier versement intervient dans trois mois.

Calculer le montant de chaque versement; taux d'intérêt simple est de 18 %.

Solution $\rightarrow M = 2 127,65$ dh
Mathématiques Financières

A-23 Un particulier place : 1 000 dh le 01/03/06, puis, 5 000 dh le 01/05/06; enfin 10 000 dh le 01/06/06, et il récupère 16 840 dh le 1/09/06.
Quel est le taux annuel de ce placement ?

Solution → t = 18% taux annuel.

A-24 Deux capitaux dont la somme est 23 600 dh sont placés à intérêts simples :
Le premier au taux t% l'an.
Le second au taux (t+2)% l'an.
Chacun des deux capitaux rapporte annuellement :
Le premier .... 960 dh ;
Le second ... 1 160 dh.
1) Calculer les taux de placement.
2) Évaluer les deux capitaux.
3) Les deux capitaux sont placés à la même date. Si on désigne par n la durée de placement exprimée en année, calculer en fonction de n, les valeurs acquises y₁ et y₂ par les deux capitaux.
4) Au bout de combien de temps les deux capitaux auront-ils la même valeur acquise ?

Solution → 1) 1° taux = 8%, 2° taux = 10%
2) Les deux capitaux sont respectivement 12 000 dh et 11 600 dh.
3) y₁ = 12 000 + 960n
y₂ = 11 600 + 1 160n
4) 2 ans.

A-25 Déterminer la date d'échéance d'un effet de 14 320 dh qui se substituerait le 10 novembre à un effet de 14 200 dh payable le 30 novembre. Taux d'escompte 10%.

Solution → Date d'échéance : le 30 décembre de la même année.

A-26 Un effet de nominal 17 750 dh se substituerait le 5 octobre à un autre de 17 570 dh payable le 29 novembre de la même année.
Déterminer la date d'échéance du premier effet.

Solution → n = 90,95 soit 91 jours après le 5 octobre, soit le 6 janvier de l'année suivante.

A-27 Etablir le compte courant et d'intérêt de Mr EL HACHMI arrêté le 30 juin 2006.
Taux débiteur : 9,85 %
Taux créditeur : 4,50 %
01/04 Solde créditeur : 18 852 dh valeur 31/03
28/04 Remise de chèques à encaisser : 6 950 dh valeur 05/05
02/05 Achat de marchandises : 19 508 dh valeur 30/04
12/05 Retrait par chèque : 3 000 dh valeur 11/05
16/05 Virement reçu : 8 250 dh valeur 18/05
14/05 Virement en espèce : 2 430 dh valeur 16/06

Solution → Le solde est créditeur de : 14 117,67 dh

A-28 Un particulier porte à l'escompte un effet de valeur nominal 15 000 dh aux conditions suivantes :
- Taux d'escompte : 10,4%
- Commission proportionnelle : 0,4%
- Commission indépendante du temps : 0,2%
- Commission fixe : 20 dh

Majoration de 4 jours de banque.
Le taux réel d'escompte de cet effet vaut 12,5%

En déduire la durée réelle d'escompte.

Solution → la durée réelle d'escompte est de 96 jours.

A-29 Une personne achète le 1er mars 2006, un fond de commerce comprenant :
- Des marchandises pour 40 000 dh
- Un mobilier pour 35 000 dh
- Des créances clients pour 15 000 dh
- Des immobilisations pour 76 000 dh

Elle règle, au comptant le 4/5 du prix d'acquisition, et le reste à échéances successives de 3 mois, taux d'intérêt simple de 13 %
Calculer le montant de chaque versement.

Solution → M = 27 590,02 dh

A-30 Un libraire signe les traites suivantes :
- 1 500 000 dh à 2 mois
- 2 000 000 dh à 5 mois
- 1 800 000 dh à 8 mois
Ses affaires sont cycliques et ses bénéfices sont importants. Au début de l'année scolaire et au début du deuxième semestre. Il souhaite remplacer ses traites par deux versements égaux l'un dans 6 mois et l'autre dans 12 mois. Les deux parties concernées, le banquier et le libraire sont d'accord pour effectuer les calculs d'équivalence à intérêt simple au taux de 8 % avec une date d'évaluation se situant 1 an après la signature des effets de commerce.

Déterminer le montant de ces deux versements.

Solution $\longrightarrow$ Deux versements constants de 2.716 339,86 dh.

**Mathématiques Financières**

**B Intérêts composés**

**Equivalence à intérêt composé**

**Annuités**

**B-1** On place un capital de 250 000 dh à intérêts composés au taux de 9,5 % l'an ; 5 ans après on retire le capital et les intérêts pour remplacer le tout à intérêts composés pendant 6 ans; la valeur acquise de ce deuxième placement est alors de 716 447,34 dh. Trouver le taux de ce deuxième placement.

Solution $\longrightarrow$ $i = 0,105$ soit 10,5 % l'année.

**B-2** On s'engage à verser 60 mensualités de 2 500 dh chacune : calculer le capital constitué 5 mois après le dernier versement. Taux : 11% l'an (utiliser les taux équivalents)

Solution $\longrightarrow$ $C = 204 790,27$ dh

**B-3** Une dette de 250 000 dh est remboursable en 72 mensualités constantes. Sachant que la première mensualité est payable un an après la date du contrat. Calculer la mensualité de remboursement. Taux 12,5 % l'an (utiliser les taux équivalents).

Solution $\longrightarrow$ la mensualité est de 5 421,11 dh

**B-4** Un capital $C$, placé à 9 % pendant une certaine durée a acquis une valeur de 317 500 dh. Placé à 10 % pendant un an de moins ce capital $C$ aurait fourni un intérêt de 50 000 dh (intérêts simples). Calculer le capital et la durée de placement

Solution $\longrightarrow C = 250 000$ dh $n = 1080$ jour soit 3 ans

**B-5** 1) Calculer la valeur acquise par un capital de 220 000 dh placé pendant 4 ans et 7 mois. Capitalisation semestrielle au taux semestriel de 5 %.

   a) solution rationnelle.

   b) solution commerciale.
2) Le capital ainsi constitué est complété par une somme $x$, le tout est placé à intérêts simples pendant 6 mois au taux de 9%, la valeur acquise à la fin de cette deuxième période de placement est de 400 000 dh.

Calculer le montant de ce complément.

Solution → 1) $a - VA = 344 136,31$ dh, solution rationnelle.
           $b - VA = 344 078,81$ dh, solution commerciale.

2) Si on prend 344 136,31 dh alors $x = 38 638,81$ dh

$344 078,81$ dh alors $x = 38 696,31$ dh

**B-6** Calculer le taux qui, appliqué à un capital de 90 000 dh donne au bout de 8 ans une valeur acquise de 200 051 dh par capitalisation annuelle des intérêts.

Solution → $t = 10,5\%$

**B-7** Pour une dette contractée il y'a 4 an, un particulier doit actuellement verser 200 000 dh. Dans le contrat initial deux possibilités lui étaient offertes :

- Rembourser par anticipation à la fin de la 3\ème année.
- Déterminer une prorogation et rembourser à la fin de la 5\ème année.

1) Quelle somme doit-il verser à la date 3 ?
2) Quelle somme doit-il verser à la date 5 ?
3) Calculer le montant de crédit qui lui a été accordé. Taux annuel : 10 % intérêts composés, période : l'année.

Solution → 1) $A_3 = 181 818,18$ dh, à la date 3.
           2) $A_5 = 220 000$ dh, à la date 5.
           3) $A_0 = 136 602,69$ dh, à la date 0

**B-8** Une banque annonce dans une publicité :
"Nous vous offrons 13,07% nets de tous frais. Vous nous envoyez 100 dh et dans huit ans nous vous donnerons 204,56 dh".
Cette banque a été condamnée pour publicité frauduleuse.

A quel mécanisme correspond le taux proposé, et quel est le taux réel de ce placement ?

Solution → Placements à intérêts composés
Taux réel de ce placement pour 8 ans est de 9,36 %

**B-9** Une personne a le choix entre de mode de placements :
- Soit un placement à intérêt simple au taux de 8 %.
- Soit un placement à intérêt simple précompté de 6,8 %.

a) Quel est le placement le plus intéressant ?
b) A quel taux annuel d'intérêts simples précomptés peut-elle placer son argent pour toucher le même intérêt que le 1\ère placement?
c) Vérifier vos calculs pour un capital de 2 500 dh.

Solution → a) Le 1\ère cas est le plus intéressant. Car le taux d'intérêt simple effectif correspondant au taux précompté n'est que 7,3 %.
b) Taux précompté doit être de 7,4 %.

**B-10** Un particulier peut placer une somme d'argent suivant deux modalités de placement pendant $n$ années.
A : 8 % par an à intérêts composés.
B : 8,83 % par an à intérêts simples.

1) Que doit-il choisir si $n = 3$ ?
2) Que doit-il choisir si $n = 4$ ?
3) Quelle est, approximativement, la valeur de $n$ pour laquelle les deux modalités sont équivalentes ?

Solution → 1) Si $n = 3$ on choisit l'intérêt simple.
          2) Si $n = 4$ on choisit l'intérêt composé.
          3) On trouve approximativement et par interpolation linéaire $n = 3,416$ années soit 3 ans et 5 mois.

**B-11** Un particulier peut placer une somme d'argent suivant deux modalités de placements :
A : à intérêts simples, au taux de 7 %.
B : à intérêts composés, au taux de 6 %.

1) Quelle modalité doit-il choisir s'il place son argent pendant une durée de six ans ?
2) Quelle modalité doit-il choisir s'il place son argent pendant une durée de sept ans ?
3) Quelle est approximativement la durée du placement pour laquelle les deux modalités sont équivalentes ?

Solution → 1) Si $n = 6$ on choisit la modalité A.
           2) Si $n = 7$ on choisit la modalité B.
           3) 6 ans et 28 jours, par interpolation linéaire.
Mathématiques Financières

1. A intérêts composés :

Formule A : donne une valeur acquise de 184 815 dh.
Formule B : donne une valeur acquise de 184 540 dh.
On choisit la formule A.

2. Le tableau ci-joint est tiré d'un prospectus d'une banque décrivant un plan de retraite. Retrouver le taux annuel de placement qui a permis la constitution d'un capital de 1 156 298 dh à l'aide d'une cotisation constante mensuelle de 300 dh de l'âge de 25 ans jusqu'à 60 ans. Dire également si les autres placements donnent le même taux de rendement.

Coup de pouce : on a utilisé les taux équivalents et l'interpolation linéaire.

<table>
<thead>
<tr>
<th>âge</th>
<th>Cotisation mensuelle en dh</th>
<th>Capital à 60 ans en dh</th>
<th>Rente annuelle à vie à 60 ans en dh</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>25 ans</td>
<td>300</td>
<td>1 156 298</td>
<td>150 011</td>
</tr>
<tr>
<td>30 ans</td>
<td>500</td>
<td>1 146 073</td>
<td>148 685</td>
</tr>
<tr>
<td>35 ans</td>
<td>800</td>
<td>1 075 122</td>
<td>139 480</td>
</tr>
<tr>
<td>40 ans</td>
<td>1 000</td>
<td>768 319</td>
<td>99 677</td>
</tr>
<tr>
<td>45 ans</td>
<td>1 200</td>
<td>502 727</td>
<td>65 221</td>
</tr>
<tr>
<td>50 ans</td>
<td>1 500</td>
<td>310 299</td>
<td>40 256</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Le taux est de ≈ 10,5 % par an calculé sur la base de 420 versements.

Une personne s'était engagé à payer 15 anuités de 5 000 dh chacune à un créancier. La première venant à échéance le 31 décembre 2000A. Elle obtient de se libérer en un versement unique le 1er Avril de l'année 2000A + 4, compte tenu des intérêts composés au taux de 6 % l'an. Quel sera le montant (M) de ce paiement unique?

Solution → M = 62 206,948 dh.

Un commerçant devait payer une certaine somme immédiatement, il obtient de son créancier de la régler par 8 anuités égales à 4 600 dh, la première payée un an plus tard. Le taux étant de 5 %, on demande quel était le montant de la dette initiale V₀?

Solution → V₀ = 29 730,77 dh.
Mathématiques Financières

B-18 Une suite de 10 annuités de 8 000 dh, placée le 1er janvier de chacune des dix années successives, a produit à la fin de la dixième année une valeur définitive de 102 000 dh. Quel était le taux de placement ?

Solution \[ t \approx 4,37 \% \]

B-19 Trois personnes A, B et C ont placé des capitaux égaux à intérêts composés, pendant 2 ans aux conditions suivantes :
A- au taux annuel de 9 %,
B- au taux semestriel de 4,5 %,
C- au taux trimestriel de 2,25 %.
1) Au bout de 2 ans, les intérêts produits par les capitaux A et B présentent une différence de 33,14 dh. Calculer la valeur commune des sommes placées.
2) Quelle est la différence des intérêts produits par les placements B et C ?
3) A quel taux annuel A devrait-il placer son capital pour que les intérêts produits au bout de 2 ans soient égaux aux intérêts du placement fait par C ?
4) A quel taux semestriel B devrait-il placer son capital pour que les intérêts produits au bout de 2 ans soient égaux aux intérêts du placements fait par C ?

Solution \[ 1) A = B = 7 560 dh \]
\[ 2) \text{la différence des intérêts est de } 17,50 \text{ dh.} \]
\[ 3) \text{au taux de } 9,308 \% \]
\[ 4) \text{au taux semestriel de } 4,550 \% \]

B-20 Une personne place un capital de 40 000 dh à intérêts composés. Trois ans après, elle retire 42 000 dh. Trois ans après ce retrait, le compte est créditeur de 8 577,41 dh.
1) Calculer le taux de capitalisation.
2) Quelle somme (S) a le maximum peut-elle retirer pour disposer de 10 000 dh sur le compte trois ans après le retrait ?

Solution \[ 1) t = 7 \% \]
\[ 2) S = 40 038,74 \text{ dh} \]

B-21 On considère un taux annuel (t) dont les taux semestriels proportionnels \( t_1 \) et équivalent à \( t_2 \) vérifient la relation \( t_1 \cdot t_2 = 0,18 \% \).
Calculer t.

Solution \[ t \approx 12,36 \% \]

Mathématiques Financières

B-22 Une personne place en banque 5 000 dh le 1er mars et 1 250 dh le 1er septembre suivant. Le 1er mars de l'année suivante, elle retire capital et intérêts réunis ; la somme de 6 592 dh.
1) A quel taux semestriel de capitalisation, les intérêts ont-ils été calculés ?
2) Quel est le taux équivalent ?

Solution \[ 1) t_1 = 3 \%, \text{ taux semestriel.} \]
\[ 2) t_2 = 6,09 \%, \text{ taux équivalent (taux annuel)} \]

B-23 On avait emprunté 150 000 dh à intérêts composés. Au lieu de rembourser le capital et les intérêts 5 ans après comme prévu, on propose de rembourser à cette date 80 000 dh seulement, le reste étant acquitté 5 ans plus tard par un versement de 124 704,40 dh. Quel est le taux unique retenu pour les calculs ?

Solution \[ t \approx 4 \%, \text{ équation de second ordre.} \]

B-24 Un emprunt de 40 000 dh contracté au taux de 10 %, est remboursable par deux versements égaux échéant dans un an et trois ans.
1) Déterminer le montant (M) de ces deux versements.
2) L'emprunteur supporte des frais de dossiers, d'un montant de 500 dh, payés au moment de l'emprunt, calculer le taux effectif (ou réel) de l'emprunt.

Solution \[ a) M = 24 090,50 \text{ dh.} \]
\[ b) \text{taux réel } \approx 10,73 \% \text{ par an.} \]

B-25 L'acheteur d'un fond commercial a le choix entre trois modes de règlement.
a) 54 000 dh payable comptant.
b) payer trois versements de 20 000 dh chacun, le premier au comptant, le second dans deux ans et le troisième dans 4 ans.
c) 6 versements de 10 500 dh, le premier au comptant.
Compte tenu des intérêts composés à 5 % l'année, indiquer le meilleur mode de règlement.

Solution \[ c'est évident le meilleur mode est au comptant mais vérifier quand même. \]
B-26 Un particulier place 10 000 dh le 1/3 de chaque année à partir du 1/3/X au taux annuel (t) (t : voisin de 7 %) et reçoit 95 242,71 dh le 1/3/2006, comprenant 35 242,71 dh d'intérêts.
Calculer n, nombre de versement, et t, taux de placement.

Solution  \[ n = 6 \text{ ans.} \]
\[ t = 7,25 \% . \]

B-27 On propose le contrat de placement suivant :
Vous placez aujourd'hui en une seule fois 50 000 dh, le taux d'intérêts versé est de 5 % pour chacune des trois premières années. Ce taux d'intérêts est porté à 8 % les années suivantes.
1) De quelle somme dispose-t-on au bout de 3 ans ?
2) De quelle somme dispose-t-on au bout de 8 ans ?
3) Quel est dans ce cas le taux moyen annuel de placement ?

Solution  \[ S = 57 881,25 \text{ dh, au bout de 3 ans.} \]
\[ S = 85 046,55 \text{ dh, au bout de 8 ans.} \]
\[ t \approx 6,865 \%, \text{ le taux moyen annuel.} \]

B-28 Un locataire qui a un loyer mensuel de 2 850 dh payable le 1er de chaque mois ne peut le payer ni le 1er janvier 2002 ni le 1er février 2002 ni le 1er mars 2002 ni le 1er avril 2002. Il propose à son propriétaire de régler ces loyers en retard par le paiement d'une semestralité constante qui sera versée le 1er janvier et le 1er juillet de chaque année. La première est payable le 1er janvier 2004 et la dernière le 1er juillet 2006.
1) Calculer cette semestralité à un taux de 9 % par an, de manière que le nouveau mode de paiement soit équivalent à l'ancien.
2) Le propriétaire n'accepte pas cet arrangement, il trouve que la semestralité à payer ne tient pas compte des indemnités de retard, il propose d'augmenter chaque semestralité de 10 %, soit 248,06 dh et que le paiement soit effectué par 12 trimestrialité à un taux de 2,5 % par trimestre. La première trimestrialité est payable le 1er octobre 2004.
Calculer le montant de la nouvelle traite.

Solution  \[ S = 2 480 60 \text{ dh (S : semestrialité)} \]
\[ T = 1 500,25 \text{ dh (T : trimestrialité)} \]

B-29

Crédit sans complications

Mr : LAHMINE BRAHIM
EL JADIDA SUD
Réf : 36NE/94
Casablanca, le 13/02/06

Cher client :

Nous vous remercions de la confiance que vous nous avez témoignée en sollicitant notre établissement pour le prêt cité en référence et dont vous trouverez ci-après les principales caractéristiques :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Libellé en dh</th>
<th>Débit</th>
<th>Crédit</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Montant du prêt</td>
<td>15 000</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Assurance Décès/Invalidité</td>
<td>284,73</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Frais du dossier</td>
<td>171</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Reste à votre crédit</td>
<td>14 544,27</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

Périodicité de prêtement : mensuelle.
Nombre d'échéances : 36.
Montant d'échéance TTC : 634,00 dh.
Date première échéance : 02/02/2004.
Date dernière échéance : 02/01/2007.

Nous vous prions de croire, Cher client, à l'assurance de nos sentiments les meilleurs.

Signé : CSC

Calculer le TEG (taux effectif global) relatif à cette opération de crédit, sachant, que le prêt est effectué à intérêts composés.

Solution  \[ \text{TEG} = 32,084 \%. \]
Une personne effectue les placements suivants pendant six ans :
1 000 dh à 4 %.
2 000 dh à 4,75 %.
5 000 dh à 6 %.

a) Calculer les valeurs acquises.
b) Calculer le taux de rendement moyen.

Solution → a) Valeur acquise = 11 000 dh
b) Taux moyen tm = 4,45 %.

C-1 Un capital de 450 000 dh doit être constitué deux ans après le dernier terme, par le versement de 10 annuités de montant a chacune. Taux : 10 % l'an. Calculer a.

Solution : → annuité a = 23 335,06 dh

C-2 Calculer au 31/10/2006 la valeur actuelle d'une suite d'annuités de 35 000 dh chacune. Date du premier versement : 31/10/2007, date du dernier versement : 31/10/2014

Solution : → Au 31/10/2006 la valeur actuelle est de 173 867,30 dh

C-3 Un emprunt de 550 000 dh est remboursable en 5 annuités immédiates. Taux : 12 % l'an. TVA : 10 % sur les intérêts.
Construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.
a) Amortissements constants.
b) Annuités constantes.
### Solution

**1er cas : Amortissement constant**

<table>
<thead>
<tr>
<th>ANÉE</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>TVA</th>
<th>AMORT</th>
<th>ANNU</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>650000,00</td>
<td>66000,00</td>
<td>6600,00</td>
<td>110000,00</td>
<td>182600,00</td>
<td>440000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>440000,00</td>
<td>52800,00</td>
<td>5280,00</td>
<td>110000,00</td>
<td>168080,00</td>
<td>330000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>330000,00</td>
<td>39600,00</td>
<td>3960,00</td>
<td>110000,00</td>
<td>153560,00</td>
<td>220000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>220000,00</td>
<td>26400,00</td>
<td>2640,00</td>
<td>110000,00</td>
<td>139040,00</td>
<td>110000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>110000,00</td>
<td>13200,00</td>
<td>1320,00</td>
<td>110000,00</td>
<td>124520,00</td>
<td>0,00</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**2ème cas : Annuités constantes**

<table>
<thead>
<tr>
<th>ANÉE</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>TVA</th>
<th>AMORT</th>
<th>ANNU</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>650000,00</td>
<td>66000,00</td>
<td>6600,00</td>
<td>84536,79</td>
<td>157136,79</td>
<td>485463,21</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>465463,21</td>
<td>55855,59</td>
<td>5585,59</td>
<td>389787,57</td>
<td>465463,21</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>369787,57</td>
<td>44372,11</td>
<td>4437,21</td>
<td>261440,11</td>
<td>369787,57</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>261440,11</td>
<td>31372,81</td>
<td>3137,28</td>
<td>138813,41</td>
<td>261440,11</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>138813,41</td>
<td>16567,16</td>
<td>1656,71</td>
<td>0,00</td>
<td>138813,41</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

### C-5

Une personne emprunte un capital de 400 000 dh au taux de 9 % l’an. TVA : 10 % des intérêts. Cet emprunt est remboursable par le versement de 5 annuités constantes avec un différé de 2 ans pendant lequel l’emprunteur ne verse aucune somme à l’organisme prêteur. Taux : 13,2 % l’an.

Construire le tableau d’amortissement de et emprunt.

**Solution**

<table>
<thead>
<tr>
<th>ANÉE</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>TVA</th>
<th>AMORT</th>
<th>ANNU</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>400000,00</td>
<td>36000,00</td>
<td>3600,00</td>
<td>0,00</td>
<td>39600,00</td>
<td>400000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>400000,00</td>
<td>36000,00</td>
<td>3600,00</td>
<td>0,00</td>
<td>39600,00</td>
<td>400000,00</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>400000,00</td>
<td>36000,00</td>
<td>3600,00</td>
<td>65649,56</td>
<td>105249,56</td>
<td>334350,44</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>334350,44</td>
<td>30091,54</td>
<td>3009,15</td>
<td>72148,67</td>
<td>105249,56</td>
<td>282201,57</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>282201,57</td>
<td>23598,14</td>
<td>2359,81</td>
<td>79291,81</td>
<td>105249,56</td>
<td>182900,96</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>182900,96</td>
<td>18481,90</td>
<td>1848,19</td>
<td>87141,48</td>
<td>105249,56</td>
<td>95758,48</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>95758,48</td>
<td>8819,16</td>
<td>881,92</td>
<td>95758,48</td>
<td>0,00</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

### C-6

Un investissement de 5 080 000 dh permet des gains nets estimés à :
- 1 500 000 dh à la fin de la première année.
- 1 700 000 dh à la fin de la deuxième année.
- 1 900 000 dh à la fin de la troisième année.
- 2 200 000 dh à la fin de la quatrième année.

La valeur résiduelle étant estimée à 600 000 dh à la fin de la période d’utilisation.

a) Calculer la valeur actuelle des gains nets et de la valeur résiduelle au taux de 18 % puis au taux de 18,25 %.

b) Déterminer alors le taux de rendement de l’investissement considéré.

**Solution**

<table>
<thead>
<tr>
<th>TIR</th>
<th>V.ACT à 18%</th>
<th>V.ACT à 18,25%</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>-5 080 000</td>
<td>-</td>
<td>-</td>
</tr>
<tr>
<td>1 500 000</td>
<td>1 271 186</td>
<td>1 268 498,9</td>
</tr>
<tr>
<td>1 700 000</td>
<td>1 220 913</td>
<td>1 215 755,0</td>
</tr>
<tr>
<td>1 900 000</td>
<td>1 156 398</td>
<td>1 149 079,7</td>
</tr>
<tr>
<td>2 200 000</td>
<td>1 444 208</td>
<td>1 432 034,3</td>
</tr>
</tbody>
</table>

0,181159 5 092 707,4 5 092 707 5 065 369,5

b) TIR = 18,12 %.
C-7 Un investissement dont le prix d’acquisition est de 900 000 dh procure pendant 8 ans des flux nets de trésorerie de 195 000 dh par an. Les flux sont établis selon les deux hypothèses suivantes :

H1 : les FNT sont perçus en fin d’année.
H2 : les FNT sont perçus annuellement mais le premier dans un an et demi.

a) Déterminer le TIR dans les deux cas.
b) Étudier la rentabilité de l’investissement selon les deux hypothèses.
c)

Solution → a) H1 on trouve TIR = 14,15 %.
H2 on trouve TIR = 12,43 %.

b) Le TIR < 12,43 : H1 et H2 sont rentables.
TIR > 14,15 : H1 et H2 ne sont pas rentables.
Si 12,43 < TIR < 14,15 : H1 → non rentable.
H2 → rentable.

C-8 Monsieur RIALATOU décide de constituer un capital de 350 000 dh dans 5 ans par versements mensuels, au taux annuel de 7,8 %. Un mois après le dernier versement, il vous demande de l’ aider pour :

a) Calculer la mensualité de ce placement.
b) Calculer le capital qu’il pourrait retirer en une seule fois, 3 mois après le versement de la 35ème mensualité étant donné qu’en cas de remboursement anticipé, le taux de capitalisation est ramené à 5,5 %.

Solution → a) En utilisant les taux équivalents la mensualité est de m = 4 791,40 dh
b) Le montant à retirer est de M = 183 537,75

C-9 Un capital (K) est placé à intérêts composés pendant (n) année au taux annuel (t). Sa valeur acquise est de 825 701,06 dh.

Si K avait été placé pendant une durée triple (3n). Sa valeur acquise aurait été de 1 148 874,12 dh.
S’il avait été placé pendant un an, sa valeur acquise aurait été de 757 750 dh.

Calculer :
* le capital C.
* le taux t.
* la durée de placement n.

Solution : → On ne sait pas obligé de répondre aux questions dans le même ordre.
* Capital est de 700 000 dh
* Taux est de 8,25 %.
* Durée = 2 ans et 30 jours.

C-10 Le 13ème amortissement d’un emprunt indivis à annuités constantes s’élève à 10 000 dh. Le 25ème et dernier amortissement est de 19 012,07 dh. Calculer :

* Le taux de l’emprunt.
* Le 1er amortissement.
* La somme empruntée.
* L’annuité.
* Établir la 13ème ligne du tableau d’amortissement.

Solution → * Le taux est de t = 5,5 %.
* Le 1er amortissement, M₁ est de 5 259,71 dh.
* Le capital emprunté est de C = 269 052,89 dh.
* L’annuité est a = 20 057,21 dh.
* La 13ème ligne se présente comme suit :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>M</th>
<th>a</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>13</td>
<td>182 867,16</td>
<td></td>
<td>10 057,71</td>
<td>20 057,21</td>
<td>372 867,46</td>
</tr>
</tbody>
</table>

C-11 Un emprunt de 10 000 000 dh est divisé en 4 000 obligations. Le remboursement s’effectue à la fin de chaque année, à une valeur de 2 625 dh par obligation et ceci pendant 5 ans. Taux : 13,65 %.
La somme des intérêts et du remboursement à la valeur de 2 625 dh est constante.
Calculer le taux auquel l’argent est effectivement placé pour :

a) Les obligations sont au 1er tour (tirage).
b) Les obligations sont au 2ème tour (tirage).

Solution → a) Le taux est de t = 18,65 %.
b) Le taux est de t = 15,96 %.

C-12 Déterminer la valeur acquise pour une suite de 28 trimestrières constantes de 4 560 dh chacune au taux annuel de 7,80 %.
a) Au moment du dernier versement.
b) 5 trimestres après le dernier versement.
c) 2 ans et 7 mois après le dernier versement.
d) 6 mois avant le 1er versement.
e) Au moment du dernier versement.

Solution → Le taux trimestriel équivalent est de t₁ = 1,895426 %
À ce taux on trouve :
a) 166 416,06 dh. b) 182 796,84 dh
b) 202 050, 70 dh. d) 96 540, 43 dh.
c) 104 070, 58 dh.
Mathématiques Financières

C-13 Un particulier achète un appartement à crédit. La STPV (société toit pour vivre) lui accorde l'intégralité du montant de l'achat et lui propose ce qui suit :
- Taux d'intérêts : 11 % l'année.
- Versement d'une mensualité de 6 979,97 dh à la fin de chaque mois pour une durée de 20 ans.
- Le premier versement aura lieu un mois après la signature du contrat.
Calculer le prix de l'appartement.

Solution → Le prix de l'appartement est de 700 000 dh.

C-14 Un emprunt individuel d'un montant C est remboursable en (n) annuités constantes (a), au taux annuel (t). On sait que :
\[ M_3 \text{ (3ème amortissement)} = 7 213,78 dh. \]
\[ M_9 \text{ (9ème amortissement)} = 12 435,05 dh. \]
\[ 5 \text{ (5ème intérêt)} = 4 966,88 dh. \]
Retrouver :
a) Le taux.
b) L'annuité.
c) Le capital.
d) La durée de l'emprunt.
e) Établir les 2 dernières lignes du tableau d'amortissement.

Solution →
a) Le taux = 9,5 %.
b) L'annuité = 13 616,39 dh.
c) Le capital = 80 000 dh.
d) La durée = 9 ans.
e) Tableau d'amortissement :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>Annuité</th>
<th>M</th>
<th>C</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>8</td>
<td>23 791,68</td>
<td>2 260,18</td>
<td>13 616,39</td>
<td>11 356,21</td>
<td>12 435,05</td>
</tr>
<tr>
<td>9</td>
<td>12 435,05</td>
<td>1 181,33</td>
<td>13 616,39</td>
<td>12 435,05</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Mathématiques Financières

C-15 Monsieur RABH place à la BFT (Banque Finance tout), le 1er mars 2002, une somme de 150 000 dh puis le 1er mars 2004 retire 55 000 dh. Deux années après ce retrait, le solde de son compte s'élève à 146 391,74 dh, compte tenu des intérêts capitalisés annuellement.
- Quel est le taux annuel de capitalisation ?
- Quel serait son solde s'il avait capitalisé son placement à un taux semestriel de 4,45 % pendant la même période en effectuant le même retrait ?

Solution →
- Le taux annuel de capitalisation = 9 %.
- Le nouveau solde serait = 147 036,85 dh.

C-16 Un emprunt individuel d'un montant (E) est remboursable par mensualités constantes (m) au taux annuel (t). On sait que :
\[ M_1 + M_2 = 6 170,62 dh. \]
\[ M_2 + M_3 = 6 247,75 dh. \]
\[ M_n + M_{n-1} = 10 926,99 dh. \] [Somme des deux derniers amortissements]
Retrouver : t, n, m, E. 
(Arrondir le taux i (retrouvé) au 3ème chiffre après la virgule par excès).

Solution → On retrouve :
- Le taux mensuel est de \(i_m = 0,125\) soit un taux annuel de \(t = 15\ %.
- La durée est : 48 mois.
- La mensualité est : 5 566,15 dh.
- Le montant de l'emprunt est : 200 000 dh.

C-17 Un père de famille dispose de 100 000 dh. Il les partage actuellement entre ses trois enfants âgés de 5 ans, 9 ans et 11 ans. Ces parts sont placées et produisent un intérêt annuel de 6,5 %.
Calculer ces trois parts de manière que les trois enfants disposent du même capital à leur majorité. Calculer ce capital.

Solution →
1- Les parts sont :
* Enfant de 5 ans aura : 26 697,9 dh.
* Enfant de 9 ans aura : 34 346 dh.
* Enfant de 11 ans aura : 38 956,1 dh.

2- La capitalisation de chaque montant donne : 60 537,2 dh.
Mathématiques Financières

C-18 Une personne contracte un emprunt de 750 000 dh, amortissable en 8 ans par
annuités constantes sur la base d’un taux d’intérêt annuel de 8,50 %.

a) Calculer le capital restant du immédiatement après le paiement de la
troisième annuité.
b) Construire les trois dernières lignes d’amortissement.

Solution  a) $CFP_3 = 524 097,50$ dh.

b)

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>M</th>
<th>Annuité</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>...</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>...</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>339 680,9</td>
<td>28 872,9</td>
<td>104 125,1</td>
<td>132 998</td>
<td>235 554,8</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>235 554,8</td>
<td>20 022,2</td>
<td>112 975,8</td>
<td>132 998</td>
<td>122 579</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>122 579</td>
<td>104,9</td>
<td>122 579</td>
<td>132 998</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>

C-19 Un emprunt étudiant est proposé aux conditions suivantes :
- Crédit de 40 000 dh à 6 % (taux proportionnel).
- Aucun remboursement pendant 2 ans.
- Remboursement mensuel pendant les trois années suivantes.
a) Calculer les mensualités de remboursement de ce crédit.
b) Calculer les mensualités de remboursement s’il n’y avait pas de différe.

Solution  a) En tenant compte du différe, on trouve une mensualité de 1 367,28 dh.
b) En ne tenant pas compte du différe, on trouve une mensualité différente de 1 216,87 dh.

C-20 Un emprunt indivis est remboursable en (n) anuités constantes au taux
annuel $(t)$.
On sait que :
Le premier plus le deuxième amortissement $= 5 476,11$ dh.
Le deuxième plus le troisième amortissement $= 6 188,11$ dh.
La somme des deux derniers amortissements $= 30 311,34$ dh.
a) Retrouver : le capital, le taux, l’annuité et la durée.
b) Reconstituer la 10ème ligne du tableau d’amortissement.

Solution  a) - Le capital est $= 120 000$ dh.
- Le taux est $= 13$%.
- L’annuité est $= 18 171,15$dh.
- La durée est $= 16$ périodes.

b)

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>M</th>
<th>Annuité</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>...</td>
<td>...</td>
<td>...</td>
<td>...</td>
<td>...</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>10</td>
<td>80 363,92</td>
<td>10 447,31</td>
<td>...</td>
<td>...</td>
<td>7 723,84</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>18 171,25</td>
</tr>
</tbody>
</table>

C-21 Un crédit de 10 000 dh pour une année, au taux de 13 % est accordé à un
particulier. Les frais du dossier s’élèvent à 300 dh sont réglables le jour du
versement du prêt. Le remboursement est effectué par mensualités
constantes. Chaque échéance mensuel étant majorée de 3 dh pour frais.
Calculer le T.E.G.

Solution  On retrouve un T.E.G. avoisinant 19,68%

C-22 Un particulier emprunte 50 000 dh le 1/07/2003 au taux annuel $(t)$ (voisin de
9 %). Le remboursement s’effectue en 8 semestriels de 7 835,33 dh, la
1) Calculer t.
2) Après avoir remboursé deux semestriels, le particulier obtient de
rembourser le solde plus rapidement : il verse alors trois semestriales
constantes $(S)$, la première échéant le 1/07/2005.
Calculer $S$

Solution  a) On retrouve un taux semestriel avoisinant 4,28 %. Soit un taux
annuel équivalent de $\approx 8,24\%$.
2) $S = 14 744,95$ dh.

C-23 Un emprunt indivis d’un montant $K$ est remboursable en $(n)$ anuités
constantes $(a)$, au taux annuel $(t)$. On sait que : $M_3$ (troisième amortissement) est de $4 633,07$ dh, $M_5$ (cinquième amortissement) est de $10 157,67$ dh et $I_5$
(cinquième intérêt) est de $5 542,34$ dh.
1) Retrouver $t$, $K$, $a$ et $n$.

Solution  a) - Taux : $17\%$.
- Annuité : $11 884,55$ dh.
- Capital : $50 000$ dh.
- Durée : $8$ ans.
C-24 Pour acquérir un local de 250 000 dh, Monsieur Beznass peut bénéficier d’un prêt aidé par l’état pour la création d’entreprise, d’un montant de 100 000 dh au taux de 10% sur 10ans. L’autre prêt d’un montant de 150 000 dh a été contracté auprès de Monsieur Commercy au taux de 15% sur 10 ans. Ces deux prêts sont remboursables par annuités constantes.

1) Calculer le montant de l’annuité totale de remboursement que devra payer M. Beznass.
2) Quel sera le capital restant dû à Monsieur Commercy au bout de 5 ans ?

Solution

1) Annuité totale est de 46 162,33 dh.
2) Capital restant dû après le versement de la 5ème annuité : CFP₅ = 100 188,63 dh

C-25 Un prêt de 750 000 dh est consenti le 1er mars 2004 au taux de 14 % pour financer un investissement. Le remboursement s’effectue par annuités constantes de fin de période, la dernière annuité échéant le 28 février 2009.

1) Calculer le montant de l’annuité et dresser le tableau d’amortissement de l’emprunt.
2) Existe-t-il d’autres méthodes pour financer une immobilisation ? Quels sont leurs avantages ?

Solution

1) Annuité = 218 462,62 dh.

Tableau d’amortissement :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>M</th>
<th>annuité</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>750 000</td>
<td>105 000</td>
<td>113 462,62</td>
<td>218 462,62</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>636 537,38</td>
<td>89 115,23</td>
<td>129 347,39</td>
<td>218 462,62</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>507 189,99</td>
<td>71 006,60</td>
<td>147 456,02</td>
<td>218 462,62</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>359 733,97</td>
<td>50 962,75</td>
<td>168 099,86</td>
<td>218 462,62</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>191 634,11</td>
<td>26 828,77</td>
<td>191 633,84</td>
<td>218 462,62</td>
</tr>
</tbody>
</table>

2) Autre modes de financements :

* Augmentation de capital par apports nouveaux : n’aggrave pas la situation financière.
* Crédit-bail : pas d’apport initial. Location avec possibilité d’achat au terme du contrat, loyers déductibles du bénéfice.

C-26 Un emprunt de 10 000 000 dh est dévisé en 4 000 obligations. Le remboursement s’effectue à la fin de chaque année, à une valeur de 2 625 dh par obligation et ceci pendant 5 ans. Taux : 13,65 %. Le remboursement s’effectue par annuités constantes.

Construire le tableau d’amortissement de cet emprunt.

Solution

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>Obligation Vivante</th>
<th>I</th>
<th>NOA</th>
<th>A</th>
<th>Amortisation</th>
<th>Flot</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>10 000 000</td>
<td>4 000 000</td>
<td>1 365 000</td>
<td>615</td>
<td>2 987 250</td>
<td>1 545 000</td>
<td>77 250</td>
<td>8 655 000</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>8 455 000</td>
<td>3 300</td>
<td>1 155 007,50</td>
<td>607</td>
<td>2 943 732,50</td>
<td>1 472 500</td>
<td>87 125</td>
<td>6 712 500</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>6 712 500</td>
<td>2 685</td>
<td>916 256,25</td>
<td>740</td>
<td>2 584 256,25</td>
<td>1 970 000</td>
<td>98 500</td>
<td>4 742 500</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>4 742 500</td>
<td>1 897</td>
<td>647 351,25</td>
<td>891</td>
<td>2 095 225</td>
<td>2 227 500</td>
<td>111 375</td>
<td>2 717 500</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>2 315 000</td>
<td>1 006</td>
<td>343 297,50</td>
<td>1 006</td>
<td>2 284 047,50</td>
<td>2 150 500</td>
<td>125 250</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>

C-27 La société Casa-Export emprunte à la banque commerciale 500 000 dh le 01/08/2004, elle rembourse en 36 mensualités constantes au taux annuel de 12 %, à partir du 01/09/2004.

1) Calculer le versement mensuel m.
2) Combien la société doit-elle à la date 01/05/2006, juste après le paiement de la mensualité ?

Solution

En utilisant les taux équivalents :
1) Mensualité = 1 646,81 dh.
2) Elle doit payer la somme de : 229 136,66 dh.

C-28 Un investissement de 500 000 dh est amortissable linéairement sur 10 ans. Sa valeur résiduelle est nulle. Il permet des CAF (Capacité d’Autofinancement) de 120 000 dh.

1) Calculer la VAN de cet investissement à 10 % par an, puis à 20 % par an.
2) Quel est le TIR de cet investissement ?

Solution

1) VAN à 10 % est de 237 348 dh.
   VAN à 20 % est de 3 097 dh.
2) i = TIR ↔ VAN = 0, par interpolation linéaire on trouve TIR ≈ 20,18 %
La B.C.A (Banque Cassablancaise des Affaires) accorde à son personnel, un crédit pour acquérir un logement aux conditions suivantes :
- Plafond : 1 000 000 dh.
- Taux annuel : 6 %.
- Remboursement par semestrielités constantes, la première est payable 1 mois après la signature du contrat.
- Durée maximum : 20 ans.
- Possibilité de remboursement par anticipation avec une pénalité de 1,5 points (sur le taux annuel).

Mr RIAL BEZNEZ, un cadre de la B.C.A, emprunte 800 000 dh et s'engage à rembourser pendant 15 ans par mensualités constantes. Mais en réalité Mr BEZNEZ pense rembourser définitivement sa dette au bout de 9 ans en supportant, bien entendu, la pénalité (car les versements non échus vont être actualisés à 4,5 %).

Pour constituer le montant qui sera exigible à la fin de 9ème année, Mr BEZNEZ pense placer chaque mois, une somme constante auprès d'un organisme de crédit « SALAF EXPRESS » à un taux de 7,5 % par an, pendant 9 ans, le premier paiement intervient au moment de l'octroi du crédit, par la B.C.A. Le but bien entendu est de préparer le versement à la fin de la 9ème année pour liquider définitivement sa dette.

1) Calculer la mensualité du remboursement.
2) Calculer le montant qui reste à payer dans le cas de Mr A. BEZNEZ, juste après le paiement de la 108ème mensualité, c'est-à-dire à la fin de la 11ème année.
3) Reconstituer les lignes 107 et 108 du tableau d'amortissement de l'emprunt initial.
4) Quel est le montant de chaque mensualité que Mr. BEZNEZ doit placer immédiatement, auprès de »SALAF EXPRESS« pour constituer à la fin de la 9ème année la somme nécessaire au remboursement définitif de la dette?

Solution → 1) La mensualité est de = 6 750 dh.
2) Le capital restant du après le paiement de la 10ème mensualité : CFP_{108} = 425 276,39 dh

L'entreprise DERDEK a contracté un emprunt remboursable par 15 anciétés. On sait que le 5ème et le 8ème amortissement s'élève respectivement à 141 222,99 dh et 185 415,23 dh.

A tout moment à la date d'une échéance, l'entreprise à la possibilité de se libérer de la totalité de sa dette, moyennant le paiement d'une indemnité égale à 2,75 % du montant du capital du.

Suite à une forte baisse des taux d'intérêts, l'entreprise décide de tout rembourser juste après le paiement de la 11ème anciété.
1) Déterminer le taux de l'emprunt, le montant de l'anciété et la valeur du capital emprunté.
2) Déterminer le capital restant du après le versement de la 11ème anciété.
3) Quel Le montant global à payer en plus de la 11ème anciété pour se libérer totalement du premier emprunt.
4) Sachant que la société DERDEK a contracté un second emprunt pour se libérer du premier d'un montant de 1 265 000 dh qui est remboursable en 60 mensualités constantes au taux mensuel de 0,7 %.
   a) Déterminer le montant de chacune de ces mensualités, sachant que la première est payable un mois après le remboursement du premier emprunt.
   b) Reconstituer la 59ème et la 60ème ligne du tableau d'amortissement.

Solution → 1) Taux : 9,5 %.
   - Capital : 3 000 000 dh.
   - Annuité : 383 231,08 dh.
2) CFP_{11} = 1 228 056,78 dh.
3) Le montant à payer est 1 261 828,32 dh.
4) a) Mensualité est de 25 892,49 dh.

228
b) 59ème et 60ème ligne du tableau d’amortissement.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>I</th>
<th>M</th>
<th>Annuité</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>59</td>
<td>51 248,57</td>
<td>258,74</td>
<td>25 533,75</td>
<td>25 892,49</td>
<td>25 712,50</td>
</tr>
<tr>
<td>60</td>
<td>25 712,50</td>
<td>179,99</td>
<td>25 712,49</td>
<td>25 892,49</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>

[C-31] L’entreprise IROMATIQUE hésite entre deux projet A et B, de durée de vie identique (trois ans) et de valeur résiduelle nulle.

**LE PROJET A:** Nécessite un investissement de 1 000 000 dh et donne naissance chaque année à des capacités d’autofinancement identiques et de montant 402 110 dh.

**LE PROJET B:** Nécessite un investissement de même montant que le projet A et donne naissance à des capacités d’autofinancement de :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Année</th>
<th>Montant</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1ère Année</td>
<td>730 000 dh.</td>
</tr>
<tr>
<td>2ème Année</td>
<td>250 000 dh.</td>
</tr>
<tr>
<td>3ème Année</td>
<td>200 000 dh.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

1) Quel projet faut-il retenir compte tenu d’un taux d’actualisation de 4% ?
2) Calculer le taux de rentabilité interne de chaque projet.
3) Quel projet retenir ? Justifier votre réponse ?

**Solution**

1) \( \text{VAN}_A = 115 891,9 \text{ dh.} \)
\( \text{VAN}_B = 110 861,5 \text{ dh.} \)

A priori, on choisit A, mais puisque les deux projets ont le même montant, il faut recalculer les indices de profitabilité, dans ce cas on trouve :

\( \text{TIR}_A \approx 0,896 \)
\( \text{TIR}_B \approx 0,9 \)

On choisit alors, le projet B.

2) Par interpolation linéaire, on trouve

\* \( \text{TIR}_A \approx 10,01 \% \)
\* \( \text{TIR}_B \approx 11,51 \% \)

On choisit, le projet B.

3) Dans les deux cas c'est le projet B.

[C-32] Un emprunt obligataire est constitué de 40 000 obligations remboursables en 20 ans, au taux annuel de 7 %. Pour chaque obligation, la valeur nominale d’une obligation est égale à 800 dh et la valeur de remboursement à 810 dh.

1) Reconstituer la première, la deuxième et la vingtième ligne du tableau d’amortissement dans le cas des annuités quasi-constants.

2) Quel est le taux de rendement d’une obligation remboursée au bout de 5 ans ?

**Solution**

1) Tableau d’amortissement correspondant :

<table>
<thead>
<tr>
<th>Période</th>
<th>CDP</th>
<th>Intérêt</th>
<th>NOA</th>
<th>Prime</th>
<th>Amortis</th>
<th>Annuité</th>
<th>CFP</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>32 000</td>
<td>2 240</td>
<td>985</td>
<td>9,85</td>
<td>788</td>
<td>3 037,85</td>
<td>31 212</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>31 212</td>
<td>2 184,84</td>
<td>1 053</td>
<td>10,53</td>
<td>842,4</td>
<td>3 037,77</td>
<td>30 369,6</td>
</tr>
<tr>
<td>20</td>
<td>2 806,4</td>
<td>196,42</td>
<td>3 508</td>
<td>35,08</td>
<td>2 806,4</td>
<td>3 037,57</td>
<td>0</td>
</tr>
</tbody>
</table>

2) Par interpolation linéaire on trouve, un taux de rendement au bout de 5 ans avoisinant les 7,24%.

[C-33] La société BM’KANI décide de réaliser un investissement de 1 000 000 dh.

Elle ne peut en fournir qu’une faible part par autofinancement et doit recourir à un emprunt indivis pour financer le solde. Deux établissements bancaires lui proposent les services suivants :

**Le Crédit de Casablanca** :
Il propose un emprunt remboursable par annuités constantes, la première échéant dans un an. Les amortissements de la troisième et de la sixième année valent respectivement 42 938,10 dh et 59 121,02 dh. Le rapport entre l’intérêt de la quatrième année et celui de la troisième année vaut 0,9409146.

**Le Crédit du Sud** :
Il propose un emprunt remboursé en 24 semestrielles constantes, la première échéant dans un an. Pour un emprunt de 10 000 dh. La semestriel vaudrait 802,18 dh.

1) Retrouver, dans le cas du Crédit de Casablanca le taux de l’emprunt, l’annuité constante (arrondir au dirham le plus proche), le premier amortissement, le montant de l’emprunt (identique pour les deux banques) et le nombre d’annuités.

Quel est le pourcentage du montant de l’investissement fourni par l’autofinancement ?
2) Calculer le taux semestriel proposé par Le Crédit du Sud, le taux annuel équivalent à ce taux est voisin de 11%.
3) Quelle banque faut-il choisir ?

Solution

1) * Taux : 11,25 %.
    * Annuité : 124 693,07 dh.
    * Amortis : $M_i = 34 693,07$ dh.
    * Capital : 800 000 dh.
    * Durée : 12 anuités.
    * 20 % : autofinancement.

2) Taux semestriel ≈ 5,489 %.

3) On choisit la banque "Le Crédit du Sud".