Correction TD9

1 Exercice 1

1.1 Question 1

$$X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$$
$$P(X = -1) = \frac{3}{6}, P(X = 0) = \frac{2}{6}, P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$
$$\iff -1 \times \frac{3}{6} + 0 \times \frac{2}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$
$$\iff \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x) - \mathbb{E}(X)^2$$
$$\iff (-1)^2 \times \frac{3}{6} + 0^2 \times \frac{2}{6} + 1^2 \times \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

1.2 Question 2

1.2.1 Y

Loi de Y, $Y(X) = \{1, 3, 5\}$

$$P(Y = 1) = P(X = -1) = \frac{3}{6}$$
$$P(Y = 3) = P(X = 0) = \frac{2}{6}$$
$$P(Y = 5) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y=y) \\ &\iff 1 \times \frac{3}{6} + 3 \times \frac{2}{6} + 5 \times \frac{1}{6} = -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) =& \mathbb{E}(2X+3) = 2\mathbb{E}(X) + 3 \\ &\iff 2 * -\frac{1}{3} + 3 = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(Y) &= \sum_{y \in Y(X(\Omega))} y^2 P(Y=y) - \mathbb{E}(Y)^2 \\ &\iff 1^2 \times \frac{3}{6} + 3^2 \times \frac{2}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}\end{aligned}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned}Var(Y) =& Var(2X+3) \\ &\iff 2^2 Var(X) + 0 \\ &\iff 2^2 \frac{5}{9} = \frac{20}{9}\end{aligned}$$

1.2.2 Z

Z $=$ X^2 Loi de Z, $Z(X) = \{0, 1\}$

$$\begin{aligned}P(Z=0) &= P(X=0) = \frac{2}{6} \\ P(Z=1) &= P(X=-1 \cup X=1) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum_{z \in Z(X(\Omega))} zP(Z=z) \\ &\iff 0 \times \frac{2}{6} + 1 \times \frac{4}{6} = \frac{4}{6}\end{aligned}$$

Autre méthode

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X^2) = \frac{4}{6}$$

Nous avons déjà calculé $\mathbb{E}(X^2)$ lorsque nous avons calculé $Var(X)$

$$Var(Z) = \sum_{z \in Z(X(\Omega))} z^2 P(Z = z) - \mathbb{E}(Z)^2$$
$$\iff 0^2 \times \frac{2}{6} + 1^2 \times \frac{4}{6} - \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{8}{36}$$

1.2.3 T

$T = X^3$
T = X³ Loi de T, $T(X) = \{-1, 0, 1\}$

$$P(T = -1) = P(X = -1) = \frac{3}{6}$$
$$P(T = 0) = P(X = 0) = \frac{2}{6}$$
$$P(T = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{z \in T(X(\Omega))} zP(T = z)$$
$$\iff -1 \times \frac{3}{6} + 0 \times \frac{2}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

var(T) = var(X)
La lois de X et de T sont les mêmes.

2 Exercice 2

Y/X	0	1
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

2.1 Loi marginale de X

$X = \{0, 1\}$
X=0 = (X=0 ∩ Y=1) ∩ (X=0 ∩ Y=0) P(X=0) = P(0,1) + P(0,0) = 0.1 + 0.3 = 0.4
De la même manière P(X=1) = P(1,1) + P(1,0) = 0.2 + 0.4 = 0.6

2.2 Loi marginale de Y

$Y = \{0, 1\}$ P(Y=0) = P(1,0) + P(0,0) = 0.1 + 0.2 = 0.3 P(Y=1) = P(0,1) + P(1,1) = 0.3 + 0.4 = 0.7

2.3 Cov(X,Y)

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$$E(XY) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)} (xy)P(X = x, Y = y)$$
$$\iff (0\times 0)\times 0.1 + (0\times 1)\times 0.2 + (1\times 0)\times 0.3 + (1\times 1)\times 0.4 = 0.4$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X} xP(X = x)$$
$$\iff 0\times 0.4 + 1\times 0.6 = 0.6$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y\in Y} yP(Y = y)$$
$$\iff 0\times 0.3 + \times 0.7 = 0.7$$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X,Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$
$$\iff 0.4 - (0.6)(0.7)$$
$$\iff 0.4 - 0.42 = -0.02$$

2.4 P-indépendance?

Si X et Y indépendantes $P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1) \times P(Y = 1)$. Or $P(X = 1, Y = 1) = 0.4$, mais $P(X = 1) \times P(Y = 1) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$. Donc $P(X = 1, Y = 1) \neq P(Y = 1) \times P(X = 1)$, X et Y ne sont pas indépendants. De manière générale, X et Y indépendantes $\implies Cov(X,Y) = 0$, Donc $Cov(X,Y) \neq 0 \implies$ X et Y pas p-indépendantes.

Attention $Cov(X,Y) = 0 \not\Longrightarrow X, Y$ independantes

3 Exercice 3

$$X\Omega = \{0,1\}, P(X = 0) = \frac{3}{4}, P(X = 1) = \frac{1}{4}$$
$$Y\Omega = \{0,1\}, P(Y = 0) = \frac{1}{3}, P(Y = 1) = \frac{2}{3}$$

3.1 Loi de (X,Y)

$$\begin{aligned} P(X=1,Y=1) &= P_{\text{X=1}}(Y=1)\times P(X=1) \\ &\iff P_{\text{Y=1}}(X=1)\times P(Y=1) \end{aligned}$$

L'énoncé ne nous donne aucune probabilité conditionnelle, donc de manière générale, nous ne pouvons déterminer la loi de (X,Y)

3.2 Loi de (X,Y) si indépendance

$$\begin{aligned} P(X=1,Y=1) &= P_{\text{X=1}}(Y=1)\times P(X=1) \\ &\iff P(Y=1)\times P(X=1) = \frac{1}{4}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{12} \\ P(X=1,Y=0) =& P(X=1)\times P(Y=0) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{12} \\ P(X=0,Y=1) =& P(X=0)\times P(Y=1) = \frac{3}{4}\times\frac{2}{3} = \frac{6}{12} \\ P(X=0,Y=0) =& P(X=0)\times P(Y=0) = \frac{3}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{3}{12} \end{aligned}$$

3.3 Covariance de (X,Y)

Si (X,Y) sont independantes, cov(X,Y) = 0. Pouvez-vous le vérifier?

4 Exercice 4

Le nombre de couples, est $A_3^2 = 6$

$$\begin{aligned} (X,Y) = &\{(1,2),(1,3),(2,3) \\ &(2,1),(3,1),(3,2)\} \end{aligned}$$

4.1 Loi de (X,Y)

$$P(1,2) = P(X=1) \times P_{X=1}(Y=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
$$P(1,3) = P(X=1) \times P_{X=1}(Y=3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
$$P(2,3) = P(X=2) \times P_{X=2}(Y=3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
$$P(2,1) = P(X=2) \times P_{X=2}(Y=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
$$P(3,2) = P(X=3) \times P_{X=3}(Y=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
$$P(3,1) = P(X=3) \times P_{X=3}(Y=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Nous avons équiprobablité.

4.2 Cov(X,Y)

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)} xyP(X=x, Y=y)$$
$$\iff \frac{1}{6}(1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 1)$$
$$\iff \frac{1}{6}(2+3+6+2+6+3) = \frac{22}{6}$$

Pour calculer les expérances de X et Y il faut d'abord déterminer les lois marginales de X et de Y.

4.2.1 Loi marginal de X

$$P(X=1) = P(1,2) + P(1,3) = \frac{2}{6}$$
$$P(X=2) = P(2,1) + P(2,3) = \frac{2}{6}$$
$$P(X=3) = P(3,1) + P(3,2) = \frac{2}{6}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{6}(1+2+3) = 2$$

4.2.2 Loi marginal de Y

$$P(Y=1) = P(1,2) + P(1,3) = \frac{2}{6}$$
$$P(Y=2) = P(2,1) + P(2,3) = \frac{2}{6}$$
$$P(Y=3) = P(3,1) + P(3,2) = \frac{2}{6}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{2}{6}(1+2+3) = 2$$

4.2.3 Cov(X,Y)

$$Cov(X,Y) = \frac{22}{6} - 4$$
$$\iff \frac{22}{6} - \frac{24}{6} = -\frac{1}{3}$$

4.3 Indépendance?

$Cov(X,Y) \neq 0$ donc X et Y ne sont pas p-indépendantes.

Remarque P(1,1) = 0, donc (1,1) sont des événements deux à deux incompatibles, mais $P(X=1) \times P(Y=1) = \frac{1}{9}$. Donc des évéments incompatibles sont forcément dépendants, si le premier 1 se réalise le deuxième ne peux pas se réaliser.