Correction TD7

November 12, 2018

1 Exercice 1

1.1 Déterminer l'espace probabilise $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$

Ici, l'épreuve consiste a tirer 1 une boule au hasard d'une urne contenant 10 boules

- Ω

$$\Omega = \{b_0, b_1, ..., b_8, b_9\}$$

- $\mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les parties de Ω. Donc nous pouvons définir

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A | A \in \Omega\}$$

- La mesure de probabilité P

Ici nous avons équiprobabilité. Donc

$$\forall i \in \{0, 1, ..., 8, 9\}, P(b_i) = \frac{1}{10}$$

1.2 Déterminons X

X est une variable aléatoire réelle représentant le numéro d'une boule. X est une application allant de Ω vers $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} X : &\Omega \to \mathbb{R} \\ &b_i \to X(b_i) = i \end{aligned}$$

- L'image de X, donc toutes les valeurs que prend $X(\Omega)$, est

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., 8, 9\}$

- La loi de X

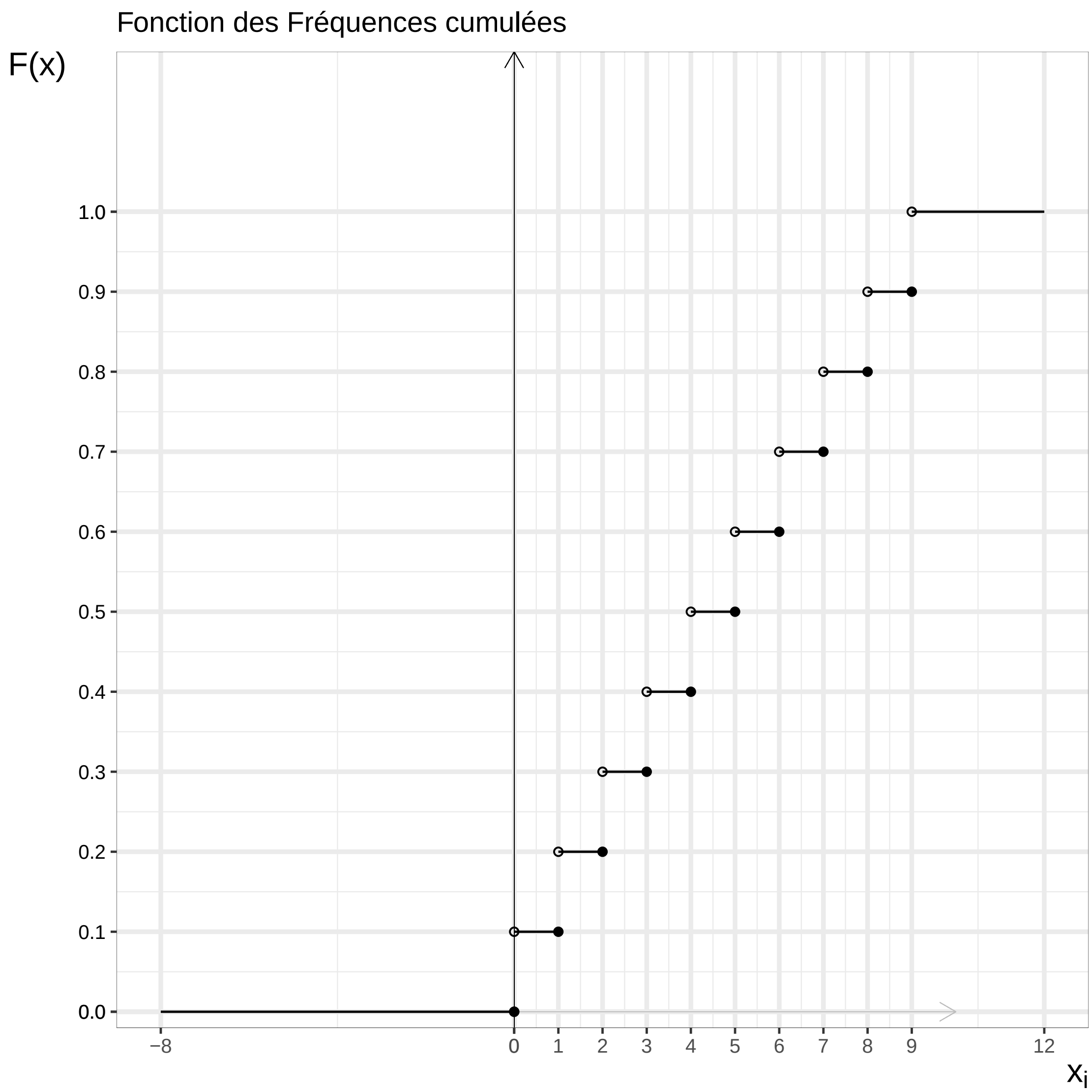
$$\forall x \in \{0, 1, ..., 8, 9\}, P(X = i) = \frac{1}{10}$$

- Fonction de Répartition de X

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X < x)$$

$$
\begin{aligned}
&\forall x \in \,]-\infty, 0],\ F(x) = P(X < x) = P(\emptyset) = 0\\
&\forall x \in \,]0, 1],\ F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = \frac{1}{10}\\
&\forall x \in \,]1, 2],\ F(x) = P(X < x) = P((X = 0) \cup (X = 1)) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}\\
&\forall x \in \,]2, 3],\ F(x) = P(X < x) = P((X = 0) \cup (X = 1) \cup (X = 2)) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}\\
&\forall x \in \,]3, 4],\ F(x) = \frac{4}{10}\\
&\forall x \in \,]4, 5],\ F(x) = \frac{5}{10}\\
&\vdots\ \vdots\\
&\forall x \in \,]8, 9],\ F(x) = \frac{9}{10}\\
&\forall x \in \ [9, \infty[,\ F(x) = 1
\end{aligned}
$$

1.2.1 Traçage de F



1.3 Calculons l'espérance et la variance de X

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$
$$= \sum_{i=0}^{9} iP(X = i)$$
$$\iff 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + ... + 8 \times P(X = 8) + 9 \times P(X = 9)$$

Nous avons equiprobabilite donc

$$\iff 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{10} + ... + 8 \times \frac{1}{10} + 9 \times \frac{1}{10}$$
$$\iff \frac{1}{10}(0 + 1 + ... + 8 + 9)$$
$$\iff \frac{45}{10} = 4.5$$

1.3.1 Rappel Somme d'une suite arithmétique de rayon r

$$S = 1 \quad + (1 + r) \quad + (1 + 2r) \tag{1}$$
$$S = (1 + 2r) \quad + (1 + r) \quad + 1 \tag{2}$$

En sommmant les Équations 1 et 2

$$2S = (2 + 2r) + (2 + 2r) + (2 + 2r)$$
$$S = \frac{(1 + (1 + 2r))3}{2}$$

- Pouvez-vous trouver la somme de 1,6,11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46 en utilisant le raisonnement précédent?

1.4 Variance de X

$$Var(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]^2 \tag{3}$$
$$\iff \mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}[X]^2] \tag{4}$$

- Pouvez-vous démontrer que 3 $\implies$ 4?

En utilisant ref{eq:4},

$$\begin{aligned}
Var(X) =& \mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}[X]^2] \\
\iff & \sum_{i=0}^{9} i^2 P(X=i) - [\mathbb{E}[X]^2] \\
\iff & \frac{1}{10}(0+1+4+9+16+25+36+49+64+81) - [\mathbb{E}[X]^2] \\
\iff & \frac{1}{10}(0+\underbrace{1+9}_{10}+\underbrace{16+4}_{20}+\underbrace{36+64}_{100}+\underbrace{49+81}_{130}+25) - (4.5)^2 \\
\iff & \frac{285}{10} - 4.5^2 = 8.25
\end{aligned}$$

2 Exercice 2

2.1 Étape 1 déterminons Ω

L'épreuve consiste a tirer simultanément 2 boules d'une urne,

Soit B l'ensemble des boules, $B = \{B_v, B_v, B_v, B_o, B_o, B_r, B_r, B_r, B_r\}$. Les boules sont vertes,orange et rouges sont indiscernables entre eux.

$$\begin{aligned}
\Omega =& \{i, j | i \in B, j \in B, \text{avec } i \neq j\} \\
& \text{ou} \\
\Omega =& \Big\{ \{J_{\sigma(1)}, J_{\sigma(2)}\} | \sigma : \{1,2\} \to \{v,v,v,o,o,r,r,r,r\}, \\
& \text{avec } \sigma \text{ une application injective} \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Card(\Omega) =& C_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!2!} \\
\iff & \frac{9!}{7!2!} = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36
\end{aligned}$$

2.2 Étape 2 déterminons X

X est une variable aléatoire reelle (v.a.r) représentant le nombre de points obtenus suite au tirage de deux boules $v \to 2, o \to 1, r \to -3$

$X(\Omega) = \{-6, -2, -1, 2, 3, 4\}$

2.3 Étape 3: Loi de X

- Remarque ici nous tirons les boules au hasard, donc nous avons équiprobabilité, C'est à dire que chaque élément de Ω a la même probabilite. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

$$P(X=-6) = P\{2 \text{ boules rouges}\} = \frac{C_4^2}{36} = \frac{6}{36}$$
$$P(X=-2) = P\{1 \text{ orange et } 1 \text{ rouge}\} = \frac{C_2^1 C_4^1}{36} = \frac{8}{36}$$
$$P(X=-1) = P\{1 \text{ verte et } 1 \text{ rouges}\} = \frac{C_3^1 C_4^1}{36} = \frac{12}{36}$$
$$P(X=2) = P\{2 \text{ oranges}\} = \frac{C_2^2}{36} = \frac{1}{36}$$
$$P(X=3) = P\{1 \text{ verte et } 1 \text{ orange}\} = \frac{C_3^1 C_2^1}{36} = \frac{6}{36}$$
$$P(X=4) = P\{2 \text{ vertes}\} = \frac{C_3^2}{36} = \frac{3}{36}$$

2.4 Espérance et Variance de X

2.4.1

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \times P(X=x) \\
\Longleftrightarrow & -6 \times \frac{6}{36} + -2 \times \frac{8}{36} + -1 \times \frac{12}{36} + 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{6}{36} + 4 \times \frac{3}{36} \\
\Longleftrightarrow & \frac{1}{36}(-36 - 16 - 12 + 2 + 18 + 12) = \frac{-32}{36} = -\frac{8}{9}
\end{aligned}$$

2.4.2

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X=x) - [\mathbb{E}[X]^2] \\
\Longleftrightarrow & (-6)^2 \times \frac{6}{36} + (-2)^2 \times \frac{8}{36} + (-1)^2 \times \frac{12}{36} + 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{6}{36} + 4^2 \times \frac{3}{36} - \left(\frac{-8}{9}\right)^2 \\
\Longleftrightarrow & \frac{1}{36}(216 + 32 + 12 + 4 + 54 + 48) - \frac{64}{81} \\
\Longleftrightarrow & \frac{366}{36} - \frac{64}{81} = \frac{1519}{162}
\end{aligned}$$

3 Exercice 3

3.1 Étape 1 déterminons Ω

L'épreuve consiste à tirer simultanément 4 jetons d'un sac.

Soit J l'ensemble des jetons, $J = \{J_v, J_v, J_v, J_v, J_r, J_r, J_r, J_r\}$. Les jetons sont verts sont indiscernables entre eux. De même pour les jetons rouges.

$$\Omega = \{a, b, c, d | a \in J, b \in J, c \in J, d \in J, \text{avec } a \neq b \neq c \neq d\}$$

ou

$$\Omega = \Big\{ \{J_{\sigma(1)}, J_{\sigma(2)}, J_{\sigma(3)}, J_{\sigma(4)}\} | \sigma : \{1,2,3,4\} \to \{v,v,v,v,r,r,r,r\}, \text{ avec } \sigma \text{ une application injective} \Big\}$$

$$Card(\Omega) = C_8^4 = \frac{8!}{(8-4)!4!}$$
$$\iff \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 70$$

3.2 Étape 2 déterminons X

X est une variable aléatoire réelle (v.a.r) représentant le nombre de jetons verts tirés.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

3.3 Étape 3: Loi de X

- remarque ici nous tirons les jetons au hasard, donc nous avons équiprobabilité. Donc soit $A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

$$P(X=0) = P\{4 \text{ jetons rouges}\} = \frac{C_4^4}{70} = \frac{1}{70}$$
$$P(X=1) = P\{3 \text{ verts et } 1 \text{ rouge}\} = \frac{C_4^3 C_4^1}{70} = \frac{16}{70}$$
$$P(X=2) = P\{2 \text{ verts et } 2 \text{ rouges}\} = \frac{C_4^2 C_4^2}{70} = \frac{36}{70}$$
$$P(X=3) = P\{3 \text{ verts et } 1 \text{ rouges}\} = \frac{C_4^4 C_4^1}{70} = \frac{16}{70}$$
$$P(X=4) = P\{4 \text{ verts et } 0 \text{ rouge}\} = \frac{C_4^4 C_4^0}{70} = \frac{1}{70}$$

3.4 Espérance et Variance de X

3.4.1

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \times P(X = x) \\
&\iff 0 \times \frac{1}{70} + 1 \times \frac{16}{70} + 2 \times \frac{36}{70} + 3 \times \frac{16}{70} + 4 \times \frac{1}{70} \\
&\iff \frac{1}{70}(16 + 72 + 48 + 4) = \frac{140}{70} = 2
\end{aligned}$$

3.4.2

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x) - [\mathbb{E}[X]^2] \\
&\iff 0 \times \frac{1}{70} + 1^2 \times \frac{16}{70} + 2^2 \times \frac{36}{70} + 3^2 \times \frac{16}{70} + 4^2 \times \frac{1}{70} - 2^2 \\
&\iff \frac{1}{70}(16 + 144 + 144 + 16) - 4 = \frac{320}{70} - 4 \\
&\iff \frac{4}{7}
\end{aligned}$$

4 Exercice 4

4.1 Déterminons X

X est une variable aléatoire représentant le nombre de tirage avant d'obtenir une boule rouge $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

4.2 Loi de X

4.2.1 Modélisons les premiers tirages

Soit E l'ensemble de départ des boules. Nous avons 2 boules dans l'urne au début du jeu donc. $E = \{B, R\}$. Il nous faut déterminer la probabilité pour tout X.

- P(Boule rouge au premier tirage),

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

- P(Boule rouge au deuxième tirage). Pour obtenir une boule rouge au deuxième tirage, nous avons obtenu une boule bleue au premier tirage. Donc la probabilité d'obtenir une boule rouge au deuxième tirage va changer...

$$\begin{aligned} P(X=2) = & P(B \cap R) \\ \Longleftrightarrow & P(B) \times P_{\mathrm{B}}(R) \\ \Longleftrightarrow & \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- Boule rouge au troisième tirage.

$$\begin{aligned} P(X=3) = & P(B \cap B \cap R) \\ \Longleftrightarrow & P(B) \times P_{\mathrm{B}}(B) \times P_{B \cap B}(R) \\ \Longleftrightarrow & \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Boule rouge au quatrième tirage.

$$\begin{aligned} P(X=3) = & P(B \cap B \cap B \cap R) \\ \Longleftrightarrow & P(B) \times P_{\mathrm{B}}(B) \times P_{B \cap B}(B) \times P_{B \cap B \cap B}(R) \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5}$$

Essayons de trouver une forme générale. Nous pouvons réécrire les résultats précédents.

$$\begin{aligned} P(X=2) = & \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1!}{3!} \\ P(X=3) = & \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2!}{4!} \\ P(X=4) = & \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3!}{5!} \end{aligned}$$

Par suite nous pouvons remarquer que

$$\begin{aligned} P(X=k) = & \frac{(k-1)!}{(k+1)!} \ \forall k \in \{1, 2, 3, ...\} \\ \Longleftrightarrow & \frac{(k-1)!}{(k+1)(k)(k-1)!} \\ \Longleftrightarrow & \frac{(k-1)!}{(k+1)(k)(k-1)!} \\ \Longleftrightarrow & \frac{1}{k+1} \times \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Que ce passe-t-il quand $k \to +\infty$? Regardons d'un peu plus près.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k(k+1)} = 0$$

4.3 Calculons l'Espérance et la Variance de X

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X=k) \\
&\iff \sum_{k \in \mathbb{N}^*} kP(X=k) \\
&\iff 1 \times P(X=1) \quad +2 \times P(X=2) + \quad 3 \times P(X=3) + ... \\
&\iff 1 \times \frac{1}{1(1+1)} \quad +2 \times \frac{1}{2(2+1)} \quad + \quad 3 \times \frac{1}{3(3+1)} + ... \\
&\iff \frac{1}{(2)} \quad + \frac{1}{(3)} \quad + \quad \frac{1}{(4)} + ... \\
&\iff \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Nous avons une série infinie (la somme des termes d'une suite infinie), voyons si elle converge. Nous avons

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X=k) = S = \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + ...$$

l'idée ici est d'esssayer de trouver une autre série inférieure à S dont on connaît la valeur. Par exemple...

$$S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + ...$$ [1]

Nous pouvons regrouper les termes de S_1

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + ... \\
&\iff \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... \\
&\iff \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

Quand $n \to \infty, S_1 \to \infty$, donc $S \to \infty$. Donc $\mathbb{E}[X]$ et $Var(X)$ ne sont pas definies.

5 Exercice 5

X est une v.a.r représentant le nombre de voitures, passant en un point donné, entre 17h et 18h.

[1] S_1 est inférieur a S car chacun des termes de S_1 est inférieur ou égale a chacun des termes de S

Nous cherchons la $P(3500 < X < 4000)$

$$
\begin{aligned}
& P(3500 < X < 4000) \\
\Longleftrightarrow\ & P(3500 - \mathbb{E}[X] \leq X - \mathbb{E}[X] \leq 4500 - \mathbb{E}[X]) \Longleftrightarrow \quad P(3500 - 4000 \leq X - \mathbb{E}[X] \leq 4500 - 4000) \qquad (5) \\
\Longleftrightarrow\ & P(-500 \leq X - \mathbb{E}[X] \leq 500) \\
\Longleftrightarrow\ & P(|X - \mathbb{E}[X]| \leq 500) \\
\Longleftrightarrow\ & 1 - P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 500) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

- L'inegalite de Bienayme-Tchebychev

Theorème 1. *Soit X une v.a.r admettant une espérance $\mathbb{E}[X]$ et une variance $Var(X)$. Alors $\forall t > 0$ nous avons $P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2}$*

Donc, dans notre cas, l'inegalité de Bienayme-Tchebychev nous dit que

$$
\begin{aligned}
P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 500) &\leq \frac{Var(x)}{500^2} \\
P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 500) &\leq \frac{100000}{250000} \\
P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 500) &\leq 0.4 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Il ne nous reste plus qu'à réécrire l'Inéquation 7 pour retrouver l'expression 6

$$
\begin{aligned}
& P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 500) \leq 0.4 \\
\Longleftrightarrow\ & - P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 500) \geq -0.4 \\
\Longleftrightarrow\ & 1 - P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 500) \geq 1 - 0.4
\end{aligned}
$$

Comme $1 - P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 500) \Longleftrightarrow P(3500 - \mathbb{E}[X] \leq X - \mathbb{E}[X] \leq 4500 - \mathbb{E}[X])$
Donc

$$
\begin{aligned}
& 1 - P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 500) \geq 1 - 0.4 \\
\Longleftrightarrow\ & P(3500 - \mathbb{E}[X] \leq X - \mathbb{E}[X] \leq 4500 - \mathbb{E}[X]) \geq 0.6
\end{aligned}
$$

Je vous laisse terminer. Réponse $P(3500 \leq X \leq 4500) \geq 0.6$