Correction TD5

www.economie-gestion.com

October 18, 2018

1 Exercice 1

1.1 Étape 1 ensemble fondamental

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

1.2 Étape 2 P(Ω) = 1

1.3 Calculons la probabilité de chaque élément

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 &= 1 \\ \text{En remplacant les } p_i \text{ par leur valeur} \\ p_1 + p_1 + 3p_1 + 2p_1 + 2p_1 + 2(3p_1) &= 1 \\ \iff 15p_1 &= 1 \\ p_1 &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

i	1	2	3	4	5	6	Ω
	p_1	p_1	$3p_1$	$2p_1$	$2p_1$	$6p_1$	
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$

1.4 Probabilité d'obtenir un "numéro pair"

$$\begin{aligned} A = \{2, 4, 6\} \\ P(A) = & P(2 \cap 4 \cap 6) \\ \iff p_2 + p_4 + p_6 = & \frac{9}{15} \end{aligned}$$ [1]

[1] Vous avez sûrement remarqué que 2,4 et 6 sont des événements deux a deux incompatibles. Donc leur intersection est vide.

2 Exercice 2

32 cartes, c'est à dire jeu de carte de pique, trèfle, carreau et coeur, avec les 8 cartes numérotes 7,8,9,10, valet, Dame,Roi et As pour chaque catégorie.

2.1 Première étape déterminons l'ensemble fondamental.

$$\Omega = \left\{ \alpha_i \text{ avec } i = \{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\} \text{ et } \alpha = \{7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as\} \right\}$$

$Card(\Omega) = 32$

2.2 A: "la carte est dame de pique".

Nous avons cette fois-ci équiprobabilité

$$A = \{\text{Dame de pique}\}$$
$$Card(A) = 1$$
$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{32}$$

2.3 B: "la carte est une figure".

$$B = \{\text{Figure}\}$$
$$B = \{\alpha_i \text{ avec } i = \{Pique, Trefle, Carreau, Coeur\} \text{ et } \alpha = \{valet, dame, roi\}\}$$
$$Card(B) = 12$$

equi-probabilite

$$P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{12}{32}$$

2.4 C: "la carte est 10 Rouge".

Nous avons cette fois-ci équiprobabilité

$$C = \{\alpha_i \text{ avec } i = \{Carreau, Coeur\} \text{ et } \alpha = \{10\}\}$$
$$Card(C) = 2$$
$$P(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{2}{32}$$

3 Exercice 3

Soit X une variable aléatoire représentant le nombre d'encyclopédies vendues dans une journée. Une encyclopédie se vend à 50 euros et le coût de déplacement est de 60 euros par jour (coût fixe). A partir de ces informations nous pouvons définir Y comme étant le bénéfice réalise par jour. Y ici est une variable aléatoire.

$$Y = 50X - 60 \tag{1}$$

Synthétisons cette information dans une table

X	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1	0.1	0.15	0.25	0.2	0.2
Y=50X-60	-60	-10	40	90	140	190

Donc Y est notre ensemble fondamental avec. $Y = \{-60, -10, 40, 90, 140, 190\}$

1. Soit A l'évènement où l'agent fait un déficit

$$P(A) = P(Y \leq 0) = P(-60 \cup -10)^2 \tag{2}$$
$$\iff P(-60 + P{-10}) = 0.1 + 0.1 \tag{3}$$
$$P(A) = 0.2 \tag{4}$$

2. Soit B l'évènement où l'agent obtient des bénéfices[3]

$$B = \bar{A} \tag{5}$$
$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(A) \tag{6}$$
$$1 - 0.2 = 0.8 \tag{7}$$

1. Soit C l'événement où l'agent obtient au moins 80 euros dans une journée

$$P(C) = P(\{90\} \cup \{140\} \cup \{190\})$$
$$\iff 0.25 + 0.2 + 0.2 = 0.65$$

4 Exercice 4

L'épreuve dans cette exercice est le tirage de 8 cartes d'un jeu de cartes contenant 32 cartes[4].

- Étape 1 Déterminons l'ensemble fondamental associé à cette épreuve.

Remarque:

- 1 main contient 8 cartes donc un élément de l'ensemble fondamental doit contenir 8 cartes.

[2]-60 et -10 sont deux évènement deux à deux incompatibles

[3]Nous sommes des économistes donc un profit nul est un bénéfice

[4]Dans un jeu de 32 cartes on suppose que nous avons les cartes 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As pour chacune des quatre catégories, Pique,Coeur,Carreau,Trèfle

- Ici nous nous intéressons à l'identité des cartes dans une main mais nous ne voulons pas distinguer l'ordre dans lequel ces cartes sont tirées. (Par exemple: Avons-nous 2♡ avant 3♣). Donc chaque élément de l'ensemble fondamental sera lui-même un ensemble. Appelons-le ω. Card(ω)=8.

Soit C l'ensemble de carte.

$$C = \left\{ C_{2_\heartsuit}, C_{3_\heartsuit}, ..., C_{as_\heartsuit}, \right.$$
$$C_{2_\clubsuit}, C_{3_\clubsuit}, ..., C_{as_\clubsuit},$$
$$C_{2_\spadesuit}, C_{3_\spadesuit}, ..., C_{as_\spadesuit},$$
$$\left. C_{2_\diamondsuit}, C_{3_\diamondsuit}, ..., C_{as_\diamondsuit} \right\},$$

$Card(C) = 32$

$$\Omega = \left\{ \{C_{\sigma(1)}, C_{\sigma(2)}, ..., C_{\sigma_(8)}\} | \sigma : \{1, 2, ..., 8\} \to \{\alpha_i\} \right.$$
$$\text{avec } \alpha = \{7, 8, ..., dame, valet, roi, as\}, i = \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit\}$$
$$\left. \text{et } \sigma \text{ une application injective} \right\}$$[5]

σ est une application injective et l'ordre n'importe pas donc

$$Card(\Omega) = C_{32}^{8} = \frac{32!}{(32-8)!8!} = 10518300$$

4.1 Soit A l'événement d'obtenir au moins 1 Roi dans une main de 8 cartes. Donc l'événement A peut être décrit comme

- Méthode 1

$$A = \{1 \text{ Roi et } 7 \text{ non Rois}\} \cup \{2 \text{ Rois et } 6 \text{ non Rois}\} \cup$$
$$\{3 \text{ Rois et } 5 \text{ non Rois}\} \cup \{4 \text{ Rois et } 4 \text{ non Rois}\}$$
$$P(A) = P(\{1 \text{ Roi et } 7 \text{ non Rois}\}) + P(\{2 \text{ Rois et } 6 \text{ non Rois}\}) +$$
$$P(\{3 \text{ Rois et } 5 \text{ non Rois}\}) + P(\{4 \text{ Rois et } 4 \text{ non Rois}\})$$[6]

[5]Vous remarquerez que déterminer l'ensemble fondamental ici est un peu plus complexe car nous avons plus d'éléments a prendre en considération. J'ai tente d'adopter une notation aussi proche que possible que celle de votre cours. Mais elle reste arbitraire. Il n'empêche que c'est essentiel de pouvoir déterminer cet ensemble fondamental. Nos mesures de probabilité en dépendent. Vous devez au moins avoir une idée de cet ensemble. Ici comme nous voyons bien qu'un élément de l'ensemble fondamental w est composée de 8 cartes.

– Calculons ces probabilités Ici nous avons la même probabilité de tirer chaque mains de 8 cartes (le jeu est bien mélangé), donc nous avons

équiprobabilité. Pour un évènement E donne, $P(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)}$
Nous pouvons modéliser. D'abord pour s'assurer d'avoir un Roi nous pouvons séparer jeu en 2 parties une avec les rois, l'ensemble E et l'autre sans les rois l'ensemble F. Nous avons 4 manières de choisir 1 carte dans l'ensemble E, et si l'ordre n'importe pas nous avons C_{28}^{7} manières de choisir 7 cartes dans l'ensemble F. Pour chacune des manières de choisir des cartes dans E nous avons C_{28}^{7} de choisir 7 cartes dans l'ensemble F donc nous avons $C_{4}^{1} \times C_{28}^{7}$ de choisir un main de 8 cartes ayant un roi.

$$P(\{1 \text{ Roi et 7 non Rois}\}) = \frac{Card(\{1 \text{ Roi et 7 non Rois}\})}{Card(\Omega)}$$

Or $Card(\{1 \text{ Roi et 7 non Rois}\}) = C_{4}^{1} \times C_{28}^{7}$

Donc

$$P(\{1 \text{ Roi et 7 non Rois}\}) = \frac{C_{4}^{1} \times C_{28}^{7}}{C_{32}^{8}} = 0.4503$$

Par le meme raisonnement

$$P(\{2 \text{ Roi et 6 non Rois}\}) = \frac{C_{4}^{2} \times C_{28}^{6}}{C_{32}^{8}} = 0.214905450501$$

Par le meme raisonnement

$$P(\{3 \text{ Roi et 5 non Rois}\}) = \frac{C_{4}^{3} \times C_{28}^{5}}{C_{32}^{8}} = 0.03737$$

Par le meme raisonnement

$$P(\{4 \text{ Roi et 4 non Rois}\}) = \frac{C_{4}^{4} \times C_{28}^{4}}{C_{32}^{8}} = 0.00934371$$

Finalement

$P(A) = 0.4503 + 0.214905450501 + 0.03737 + 0.001934371 = 0.7045$

Nous pouvons faire un peu moins de travail en réalisant que le complémentaire de A, d'avoir au moins un roi, dans la mains et de n'avoir aucun roi dans une mains. Donc

[6] Si nous tirons une mains de 8 cartes nous ne pouvons pas obtenir a la fois 2 Rois et 3 Rois donc, nous avons des évènement deux a deux incompatibles, leur intersection est vide.

$$P(\bar{A}) = P(\{0 \text{ Roi et } 8 \text{ non Rois}\}) = \frac{Card(\{0 \text{ Roi et } 8 \text{ non Rois}\})}{Card(\Omega)}$$
$$= \frac{C_4^0 \times C_{28}^8}{C_{32}^8} = 295.494994438 * 10.^-3$$
Donc
$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 295.494994 \times 10^{-3} = 0.7045$$

5 Exercice 5

5.1 Question 1

L'épreuve est un lancer de 2 dés de couleurs différentes. Donc le cardinal d'un élément de l'ensemble fondamental sera égale à deux. Nous connaissons cette ensemble fondamental mais rafraîchissons nous la mémoire.

5.1.1 Étape 1 Déterminons Ω

Soit$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\Omega = \{(i, j) | i \in D, j \in D\}$[7]
ou
Soit $D = \{D_1, D_2, ..., D_6\}$
$\Omega = \{(D_{\sigma(1)}, D_{\sigma(2)}) | \sigma : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \text{ avec } \sigma \text{ une application}\}$

$Card(\Omega) = Card(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})^{Card(\{(1),(2)\})}$ car c'est une application où nous pouvons et nous voulons distinguer l'ordre dans lequel apparaissent les événements. Donc $Card(\Omega) = 36$

5.1.2 Étape 2

Les dés ne sont pas truqués. Donc nous avons la même probabilité d'obtenir chaque élément de Ω. Soit A, l'événement ou la somme des deux des égale a 10. $A = \{(5, 5), (4, 6), (6, 4)\}$

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega_1)} = \frac{3}{36}$$

5.2 Question 2

L'épreuve est un lancer de 2 des identique. A la différence de la question précédente, ici nous ne pouvons distinguer le cas ou nous avons obtenu (1,2) d'un cas ou nous avons obtenu (2,1). En d'autre terme nous ne connaissons pas l'ordre des éléments de Ω

[7] Notez les parenthèses (i,j) pour distinguer les cas ou nous avons (1,2) et (2,1) par exemple

5.2.1 Déterminons Ω

Soit $D = \{D_1, D_2, ..., D_6\}$

$$\Omega = \Big\{\{D_{\sigma(1)}, D_{\sigma(2)}\} | \sigma : \{1,2\} \to \{1,2,3,4,5,6\}, \text{ avec } \sigma \text{ une application injective}\Big\} \cup \Big\{\{D_{\sigma(1)}, D_{\sigma(1)}\} | \ \sigma : \{1\} \to \{1,2,3,4,5,6\}\Big\}$$

$$Card(\Omega_2) = C_6^2 + C_6^1 = 21 \quad (8)$$

5.2.2 Étape 2

Remarque:

- Que les des soit identiques ou non nous devrions avoir la même probabilité d'obtenir un total de 10, si les des sont non truques.
- $Card(\Omega_2) < Card(\Omega_1)$.

Le seule moyen de réconcilier c'est deux points est que dans le deuxième cas nous n'avons plus équiprobabilité.

La probabilité d'obtenir {1,4} dans le cas ou les des sont indiscernable, est égale a la probabilité d'obtenir (1,4) ∪ (4,1) dans le cas où les dés sont discernables. C'est a dire

$$P(\{1,4\}) = P((1,4)) + P((4,1)) = \frac{2}{36} \quad (9)$$

De manières plus générale nous avons.

$P(\Omega) = 1$

$\iff P(\{1,1\}) + P(\{1,2\}) + P(\{1,3\}) + ...P(\{6,6\}) = 1$

D'apres l'Equation 8, nous avons 15 non pairs et 6 pairs

$\Rightarrow 15p_{ij} + 6p_{ii} = 1$

En utilisant le resultat de l'Equation 9, nous avons $p_{ij} = 2p_{ii}$

$\Rightarrow 15(2p_{ii}) + 6p_{ii} = 1$

$\iff p_{ii} = \frac{1}{36}$ et $p_{ij} = \frac{2}{36}$[8]

$P(A) = P(\{6,4\} \cup P(\{5,5\}) = \frac{2}{36} + \frac{1}{36}$

[8] Nous n'avons pas équiprobabilité

6 Exercice 6

6.1 Question 1

L'épreuve est le tirage simultané de deux cartes d'un jeu de 32 cartes.

Soit C l'ensemble de cartes.

$$C = \left\{ \begin{array}{l} C_{2_\heartsuit}, C_{3_\heartsuit}, ..., C_{as_\heartsuit}, \\ C_{2_\clubsuit}, C_{3_\clubsuit}, ..., C_{as_\clubsuit}, \\ C_{2_\spadesuit}, C_{3_\spadesuit}, ..., C_{as_\spadesuit}, \\ C_{2_\diamondsuit}, C_{3_\diamondsuit}, ..., C_{as_\diamondsuit} \end{array} \right\},$$

6.1.1 Étape 1 déterminons l'Ω

$$\Omega = \Big\{ \{C_{\sigma(1)}, C_{\sigma(2)}\} | \sigma : \{1,2\} \to \{\alpha_i\} \text{ avec } \alpha = \{7, 8, ..., dame, valet, roi, as\}, i = \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit\} \text{ et } \sigma \text{ une application injective}\} \Big\}$$

1. $Card(\Omega) = C^2_{32} = 496$

6.1.2 Étape 2 Calculons P(A)

Nous avons equiprobabilite, donc, $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$. Nous avons 8♠ dans le jeu, $Card(A) = C^2_8$

$$P(A) = \frac{C^2_8}{496} = \frac{7}{124}$$

6.2 Question 2

L'epreuve est le tirage une a une et sans remise de deux cartes d'un jeu de 32 carte.

6.2.1 Étape 1 déterminons Ω

$$\Omega = \Big\{ (C_{\sigma(1)}, C_{\sigma(2)}) | \sigma : \{1,2\} \to \{\alpha_i\} \text{ avec } \alpha = \{7, 8, ..., dame, valet, roi, as\}, i = \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit\} \text{ et } \sigma \text{ une application injective}\} \Big\}$$

$Card(\Omega) = A^2_{32} = 992$

6.2.2 Étape 2 Calculons P(A)

Nous avons équiprobabilité, donc, $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$. Nous avons 8♠ dans le jeu, $Card(A) = A_8^2$

$$P(A) = \frac{A_8^2}{992} = \frac{7}{124}$$

Remarque:

$$\left.\begin{array}{r} C_8^2 = \dfrac{A_8^2}{2!} \\ C_{32}^2 = \dfrac{A_{32}^2}{2!} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \frac{C_8^2}{C_{32}^2} = \frac{A_8^2}{A_{32}^2}$$

6.3 Question 3

L'epreuve est le tirage <u>une a une avec remise</u> de <u>deux</u> cartes d'un jeu de 32 carte.

6.3.1 Étape 1 déterminons Ω

$$\Omega = \Big\{(C_{\sigma(1)}, C_{\sigma(2)}) | \sigma : \{1,2\} \to \{\alpha_i\} \text{ avec } \\ \alpha = \{7, 8, ..., dame, valet, roi, as\}, i = \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit\} \\ \text{et } \sigma \text{ une application}\}\Big\}$$

$Card(\Omega) = 32^2 = 1024$

6.3.2 Étape 2 Calculons P(A)

Nous avons équiprobabilité, donc, $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$. Nous avons 8♠ dans le jeu, $Card(A) = 8^2$

$$P(A) = \frac{64}{1024} = \frac{1}{16}$$

7 Exercice 7

L'épreuve consiste à tirer simultanément 3 boules d'un sac contenant 9 boules.

7.1 Étape 1 déterminons Ω

Soit

$$B = \{b_{b,1}, b_{b,2}, b_{b,3}, b_{b,4} \\ b_{n,1}, b_{n,2}, b_{n,3}, b_{n,4}, b_{n,5}\}$$

$$\Omega = \Big\{ \{b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, b_{\sigma(3)}\} | \sigma : \{1,2,3\} \to \{\{b,1\},...,\{b,4\},\{n,1\},...,\{n,5\}\} \text{ et } \sigma \text{ une application injective} \Big\}$$

Nous pouvons aussi écrire

$$\Omega = \Big\{ \{b_i, b_j, b_k\} | b_i \in B, b_j \in B \text{ et } b_k \in B \text{ avec } i \neq j \neq k \Big\}$$

$Card(\Omega) = C_9^3 = 84$
Nous avons équiprobabilité. Soit $E \in \mathcal{P}(\Omega), P(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)}$

7.1.1 P(A) où A:"Toutes les boules sont blanches"

$$Card(A) = C_4^3$$
$$P(A) = \frac{C_4^3}{C_9^3}$$
$$\iff \frac{\frac{4!}{(4-3)!3!}}{\frac{9!}{(9-3)!3!}} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

7.1.2 P(B) où B:"les boules sont de couleurs differentes"

$$B = \{1b \text{ et } 2n\} \cup \{2b \text{ et } 1n\}$$
$$P(B) = P(\{1b \text{ et } 2n\}) + P(\{2b \text{ et } 1n\})$$
$$P(B) = \frac{C_4^1 \times C_5^2}{84} + \frac{C_4^2 \times C_5^1}{84}$$
$$P(B) = \frac{40}{84} + \frac{30}{84} = \frac{70}{84}$$

7.1.3 P(C) où C:"Les numéros des boules sont impairs"

$$C = \{b1, b3, n1, n3, n5\}$$
$$P(C) = \frac{C_5^3}{84} = \frac{10}{84}$$