Correction TD4

October 11, 2018

1 Preliminaires

Soit un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. On appelle probabilité P une application $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$, avec $P(\Omega) = 1$ et $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$

- Ω est l'ensemble fondamental
- $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les parties de Ω

2 Exercice 1

Déterminer l'ensemble fondamental et le cardinal des épreuves suivantes.

2.1 Un Jet de pièce de monnaie

$\Omega_1 = \{"Pile", "Face"\}, card(\Omega_1) = 2$

2.2 Lancer d'un dé à six faces

$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, card(\Omega_2) = 6$

2.3 Tirage simultané de k boules d'une urne contenant n boules

2.3.1 Avant de répondre à la question prenons un exemple simple.

Soit $k = 2$ et $n = 4$ Donc nous avons un ensemble de boules numérotées 1 - 4
$B = \{1, 2, 3, 4\}$
Listons les possibilités de tirer 2 boule simultanément.

- Remarques avec un tirage simultané.
  - Nous ne pouvons tirer simultanément 2 fois une boule numerotée 1 par exemple.
  - Nous ne pouvons donner un ordre quelconque aux boules (Elles sont tirées simultanément)

Donc l'ensemble fondamentale est:

$$\Omega = \Big\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\},$$
$$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{4, 3\}\Big\}$$

- Remarque: Ω est un ensemble. Les éléments d'un ensemble sont compris entre des {, }, et l'ordre dans lequel les éléments sont listés n'a aucune importance.

  Ici card(Ω) = 6.

  Nous pouvons reconnaître que choisir 2 boules simultanément d'une urne de 4 boules est une application injective où l'ordre n'est pas important. Donc le nombre d'applications est
  $C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$
  Essayons maintenant de généraliser l'ensemble fondamental.

$$\Omega = \{\{i, j\}|i \in B \text{ et } j \in B \text{ avec } i \neq j\}$$

2.3.2 Solution

Maintenant nous pouvons répondre facilement a l'exercice. Pour k=3 nous avons

$$\Omega = \{\{i, j, k\}|i \in B, j \in B \text{ et } k \in B \text{ avec } i \neq j \neq k\}$$

Mais pour k et n tres grands nous aurons quelques difficultés de notations, la notation suivante pourrait nous permettre de généraliser un peu plus facilement l'ensemble fondamental. Mais il s'agit du même principe que l'exemple précédent.

Soit l'ensemble de boules $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n\}$, l'ensemble fondamental d'un tirage de k boules simultané de B est:

$$\Omega_3 = \left\{\{b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, ..., b_{\sigma(1)}\}|\sigma : \{1, 2, ..., k\} \to \{1, 2, ..., n\}, \text{ avec } \sigma \text{ une application injective}\right\}$$

$card(\Omega_3) = C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

2.4 Tirage une à une et sans remise de k boules d'une urne contenant n boules

2.4.1 Exemple

Pouvez-vous donner un exemple avec un tirage une à une d'une boule à la fois? Ici comme vous tirez une boule une à une, vous pouvez tirer la boule 5 avant la boule 2 par exemple. Donc l'ordre aura une importance.

2.4.2 Solution

Ici la solution est la pratiquement identique à la solution précédente. La subtilitée est que l'ordre dans lequel les boules sont tirées importe maintenant. Donc omega est

$$\Omega_4 = \left\{(b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, ..., b_{\sigma(k)})|\sigma : \{1, 2, ..., k\} \to \{1, 2, ..., n\}, \text{ avec } \sigma \text{ une application injective}\right\},$$

Remarquez que les éléments de l'ensemble est compris entre des parenthèses "(" ")", siginifiant cette fois une séquence, indiquant que l'ordre est important.

$Card(\Omega_4) = A_n^k$, car il s'agit d'une application injective où, l'ordre a de l'importance.

- Est-que l'ensemble fondamental de la question 3 Ω_3 est inférieur a $\Omega 4$? Est-que Ω_3 est compris dans Ω_4?

2.5 Tirage de k boules une à une avec remise d'une urne contenant n boules

2.5.1 Pouvez-vous fabriquer une exemple?

2.5.2 Solution

Ici il s'agit la reponse ressemble beaucoup a la question precedente. La seule difference est que il est maintenant possible de tirer k fois la meme boule puisque on remet la boule dans l'urne. Donc

$$\Omega_5 = \left\{ (b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, ..., b_{\sigma(k)}) | \sigma : \{1, 2, ..., k\} \to \{1, 2, ..., n\}, \text{ avec } \sigma \text{ une application} \right\},$$

σ cette fois, est une application et non une application injective. Donc le nombre d'applications est égale à $Card(\Omega_5) = Card(F)^{Card(E)}$ ou E est l'ensemble de départ et F, l'ensemble d'arrivée. C'est a dire n^k.

2.6 Nombre de lancer jusqu'à obtenir pile pour la première fois.

Ici, une fois que nous avons commencé à jouer, il faut obtenir pile pour s'arrêter. Donc nous pouvons avoir,

$$\beta = \left\{ (Pile), (Face, Pile), (Face, Face, Pile), ..., (Face, Face, ..., Pile) \right\},$$

Attention ici on nous demande le nombre de lancer, donc

$$\begin{aligned} \Omega_6 = &\{1, 2, 3, ...\} \\ &\iff \mathbb{N}^* \cup \infty \end{aligned}$$

et $Card(\Omega_6) = \infty$

2.7 La durée d'un livre de Maths.

$\Omega_7 = \mathbb{R}_+$, $Card(\Omega_7) = \infty$

2.8 Le jet de deux dés de tailles differentes.

Ici, vue que les dés sont differents nous pouvons distinger un cas ou nous avons par exemple,

- (1,2) et (2,1).

Donc pour chacune des 6 possibilités d'avoir un chiffre pour le premier dé nous avons six possibilités pour le deuxième dé[1]

Soit $D = \{1, 2, 4, 5, 6, 3\}$,

$$\Omega_7 = \{(i, j) | i \in D \text{ et } j \in D\}$$

Card(Ω_7) $= 6^2 = 36$.

[1]Oui vous, l'aurez compris, le lancer de deux dés discernables est une application

2.9 Jet de deux dés indiscernables.

Ici, à la différence de la question précédente, nous ne pouvons distinger un cas ou nous avons par exemple

- (3,2) ou (2,3).

Nous avons plusieurs méthodes pour résoudre ce problème.

- Méthode 1

Nous pouvons assez facilement lister les possibilités.

$$\Omega_8 = \begin{bmatrix} \{1,1\} & \{2,1\} & \{3,1\} & \{4,1\} & \{5,1\} & \{6,1\} \\ & \{2,2\} & \{3,2\} & \{4,2\} & \{5,2\} & \{6,2\} \\ & & \{3,3\} & \{4,3\} & \{5,3\} & \{6,3\} \\ & & & \{4,4\} & \{5,4\} & \{6,4\} \\ & & & & \{5,5\} & \{6,5\} \\ & & & & & \{6,6\} \end{bmatrix}$$

$Card(\Omega_8) = 1 + 2 + ... + 6 = \frac{6*7}{2} = 21$

- Méthode 2

  Nous pouvons aussi scinder le problème en deux. Soit $D = \{1, 2, 4, 5, 6, 3\}$,

$$\Omega_9 = \left\{ \{i, j | i \in D \text{ et } j \in D \text{ avec } i \neq j\} \cup \{\{i, i\} | i \in D\} \right\}$$

Le premier élément est un ensemble d'une application injective ou l'ordre n'est pas important et le deuxième est simplement les cas où nous avons des doubles. Donc

$Card(\Omega_9) = \frac{6!}{(6-2)!2!} + 6 = 21$

3 Exercice 2

3.1 L'ensemble fondamental d'un tirage d'une urne contenant 9 jetons

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, ..., 9\} \quad (1)$$

3.2 Événements

- Le numero est pair

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \quad (2)$$

- Le numero est un multiple de 3

$$B = \{3, 6, 9\} \quad (3)$$

3.3

- $\bar{A}$: complémentaire de A

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

- $\bar{B}$: complémentaire de B

$$\bar{B} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

- $A \cap B$: pair et multiple de 3

$$A \cap B = \{6\}$$

- $A \cup B$: pair ou multiple de 3

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$$

- $\bar{A} \cap B$: non pair et multiple de 3

$$\bar{A} \cap B = \{3, 9\}$$

- $\bar{A} \cap \bar{B}$: non pair et non multiple de 3

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 5, 7\}$$

- $\bar{A} \cup \bar{B}$: non pair ou non multiple de 3

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

- $A \bar{\cap} B$: le complémentaire de $A \cap B$

$$\overline{A \cap B} = \Omega - A \cap B$$
$$\overline{A \cap B} = \Omega \setminus \{6\}$$

Remarquez que la solution est égale a $\bar{A} \cap \bar{B}$

- $A \bar{\cup} B$: le complémentaire de $A \cup B$

$$\overline{A \cup B} = \Omega - A \cup B$$

Remarquez que la solution est égale a $\bar{A} \cup \bar{B}$

4 Exercice 3

Soit $(\Omega, \mathcal{P}, P)$, un espace probabilise.

4.1 Montez que $P(\emptyset) = 0$

$(\Omega, \mathcal{P}, P)$ est un espace probabilisable, donc,

$$P(\Omega) = 1$$
$$\text{or } \emptyset = \bar{\Omega}$$
$$\Rightarrow P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega)$$

4.2 Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $(A \subset \Omega)$

Montrez que $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$$\begin{aligned} & \Omega = A \cup \bar{A} \\ & \Rightarrow P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A}) - P(A \cap \bar{A}) \\ \text{or } A \cap \bar{A} = \emptyset \text{ donc} & \\ & 1 = P(A) + P(\bar{A}) - P(\emptyset) \\ & \iff P(\bar{A}) = 1 - P(A) \end{aligned}$$

4.3 Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)(A \subset B)$

Montrez que : $P(A) \leq P(B)$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

$$\begin{aligned} & A \subset B \\ & \iff B = B \setminus A \cup A \\ & \iff P(B) = P(B \setminus A) + P(A) - P(B \setminus A \cap A) \\ & \iff P(B) = P(B \setminus A) + P(A) - P(\emptyset) \\ & \iff P(B) \geq P(A) \end{aligned}$$

4.4 Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$

Montrez que $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

$$\begin{aligned} & A = A \setminus B \cup (A \cap B) \\ & \Rightarrow P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) - P(A \setminus B \cap (A \cap B)) \\ \iff & P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) - P(\emptyset) \\ \iff & P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

4.5 Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$

Montrez que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\begin{aligned} A \cup B = & (A \setminus B \cup B \setminus A) \cup (A \cap B) \\ & \iff P(A \setminus B) + P(B \setminus A) - P((A \setminus B) \cap (B \setminus A)) \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question 4 nous avons

$$\begin{aligned} P(A \cup B) = & P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) + \\ & P(A \cap B) \end{aligned}$$

4.6 Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $C \in \mathcal{P}(\Omega)$

Montrez que $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(P(B \cap C)) - P(A \cap B) + P(A \cap B \cap C)$

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) \text{soit } D = (B \cup C)$$
$$\iff A \cup D$$

En utilisant le résultat de la question 6 du TD nous avons

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$

remplaçons D par sa valeur

$$P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P((B \cup C)) - P(A \cap (B \cup C))$$

par recurrsion nous avons

$$P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap (B \cup C))$$

or $P(A \cap (B \cup C)) = P(A \cap C) \cup (B \cap C)$

Donc,

$$P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P((A \cap C) \cup (B \cap C))]$$

par récursion nous avons

$$P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap C \cap B \cap C)]$$

Ainsi

$$P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

4.7 $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $C \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont trois événements deux a deux incompatibles

$$P(B \cap C) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = 0$$

Donc

$$P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B) + P(C)$$