Correction TD3

October 5, 2018

1 Rappels

- $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1$, $0! = 1$

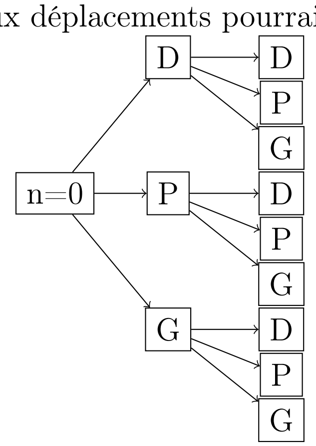
  Soit E et F deux ensembles avec $card(E) = n$ et $card(F) = p$.

- Le nombre d'applications de E dans F est $card(F)^{card(E)}$
- Le nombre d'applications injectives de E and F est $\frac{n!}{(n-p)!} = A_n^p$
- Pré-requis dans le cour de probabilité.
  - Lettres de l'alphabet romain (20 consonnes et 6 voyelles)
  - Chiffre digital (0-9)
  - Jeu de 52 cartes (2-10, valet, dame, roi, as) pour $\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit$
  - Jeu de 32 cartes (7-10, valet, dame, roi, as) pour $\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit$

2 Exercice 1

Remarquons d'abord qu'un cube a 8 sommets et 12 arêtes. Essayons ensuite de modéliser un déplacement. L'énoncé nous dit que la puce se déplace de sommet en sommet. Donc nous supposons qu'elle se trouve a un des sommets au commencement. Comme un sommet est connecté par trois arêtes elle a trois possibilités pour se rendre à un autre sommet. Droite (D),Gauche (G) ou Profondeur (P).

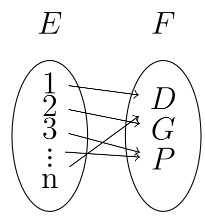
Donc si $n = 1$, trois déplacements possibles. Si $n = 2$, la puce à trois possibilités pour le premier déplacement et pour chacune de ces déplacement elle en a trois autres. Une représentation graphique de deux déplacements pourrait être la suivante:



A partir de là nous pouvons généraliser.

$$n = 1, \text{nombre de déplacements: } 3^1$$
$$n = 2, \text{nombre de déplacements: } 3^2$$
$$n = n, \text{nombre de déplacements: } 3^n$$

Nous pouvons aussi voir la puce comme une application qui associe un deplacment à une direction. $f(1) = D$ par exemple. A partir de là nous pouvons définir E comme l'ensemble des déplacments et F l'ensemble des directions possibles[1]

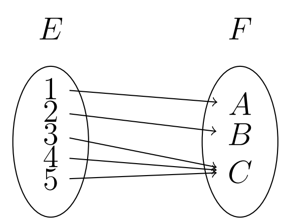


Ensuite nous pouvons utiliser le resultat du cour ref rappels. Le nombre d'applications possible est $card(F)^{card(E)} = 3^n$.[2]

3 Exercice 2

3.1 Question 1

Nous pouvons ranger tous les objets dans les boites, nous pouvons aussi ranger tous les objets and une boite. Enfin un objet ne peut pas être dans deux boites différentes en même temps. Donc ranger les objets est une application de l'ensemble d'objets vers l'ensemble de boîtes. $f(objet) = \text{boite}A$ par exemple. Voici une configuration possible.



$card(E) = 5 \quad card(F) = 3$

Donc le nombre (d'applications) de manières de ranger est $card(F)^{card(E)} = 3^5 = 243$.

3.2 Question 2

De la même manière, le nombre d'applications est n^p

[1]f est bien une application car à chaque déplacment nous avons une direction et celle-ci est unique.

[2]Remarque: C'est important que lq puce ne soit pas restreinte dans ses déplacements. Par exemple elle peut se déplacer à gauche pour tous ses n déplacements. Si cela n'avait pas été le cas on aurait moins de 3^n possibilités. Je vous réfère à votre cour pour plus de précision.

4 Exercice 3

Nous cherchons un mot avec le format C(Consonne) et V(Voyelle) suivant $\underline{C}$, $\underline{V}$, $\underline{C}$, $\underline{C}$, $\underline{V}$

Pour la première lettre nous avons 20 possibilités et pour chacune de ces 20 possibilités nous en avons 6 pour la deuxième, et pour chacune des 120 possibilités des deux premières lettres, nous avons encore 20 pour la troisième (répétitions autorisées), ... Donc le nombre de possibilités est

$$20 \times 6 \times 20 \times 20 \times 6 = 288000$$

Autre explication

Définissons E_v l'ensemble des voyelles et E_c l'ensemble des consonnes. Puisque les répétitions sont autorisées le mot en question est un éléments du produit cartésien

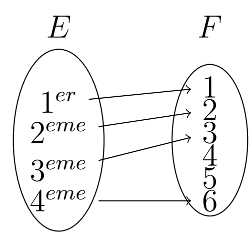
$(C, V, C, C, V) \in E_c \times E_v \times E_c \times E_c \times E_v$

Donc le nombre d'éléments dans $E_c \times E_v \times E_c \times E_c \times E_v = card(E_c) \times card(E_v) \times card(E_c) \times card(E_c) \times card(E_v) = 20^3 \times 6^2$

5 Exercice 4

5.1 Question 1

Nous devons former 4 chiffres distincts à partir de 6 chiffres. Nous pouvons voir qu'il s'agit d'un application avec les emplacement 1 à 4 dans l'ensemble de départ et les 6 chiffres dans l'ensemble d'arrivée. C'est même une application injective car les nombres sont formés à partir de chiffres distincts. Nous pouvons représenter une des ces applications de la manière suivante.



Le nombre d'applications injectives de E dans F est $A_{card(F)}^{card(E)} = A_6^4$

C'est à dire $\frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2!}{2!} = 360$

5.2 Question 2

Former un nombre de 6 chiffres est aussi d'une application injective. Donc $A_6^6 = 6! = 720$

5.3 Question 3

5.3.1 Modélisation

Tentons d'abord de prendre un modèle plus simple à manipuler pour avoir suffisamment de recule pour répondre à la question. Supposons que nous voulions dénombrer le nombre de manières de construire un nombre de 3 chiffres à partir de $\{1, 1', 2\}$. Ici nous avons forcé la distinction des 1 seulement pour voir comment ils se comportent. Si tous les éléments sont distincts nous avons vu à la question précédente qu'il s'agit de dénombrer le nombre d'applications injectives. Ici $A_3^3 = 3! = 6$. Listons toutes les possibilités:

1 1' 2	1 2 1'	2 1 1'
1' 1 2	1' 2 1	2 1' 1

Nous remarquons que la deuxième rangée a été générée uniquement en permutant les 1, 1' et le nombre de permutations de 1 1' est 2!. Donc si les 1 sont indiscernables, nous avons $\frac{3!}{2} = 3$ possibilités.

Nous pouvons aussi répéter l'exercice avec $1, 1', 1'', 2$ par exemple.

1 1' 1" 2	1 1' 2 1"	1 2 1' 1"	2 1 1' 1"
1 1" 1' 2	1 1" 2 1'	1 2 1" 1'	2 1 1" 1'
1' 1 1" 2	1' 1 2 1"	1' 2 1 1"	2 1' 1 1"
1' 1" 1 2	1' 1" 2 1	1' 2 1" 1	2 1' 1" 1
1" 1 1' 2	1" 1 2 1'	1" 2 1 1'	2 1" 1 1'
1" 1' 1 2	1" 1' 2 1	1" 2 1' 1	2 1" 1' 1

Ce qui nous donne. $\frac{4!}{3!} = 4$

Pour finir nous pouvons faire le même exercice avec $1, 1', 2, 2'$.

1 1' 2 2'	2' 1 1' 2	1 2 1' 2'	2 1 2' 1'	1' 2 2' 1	2 2' 1 1'
1 1' 2' 2	2 1 1' 2'	1 2' 1' 2	2' 1 2 1'	1' 2' 2 1	2' 2 1 1'
1' 1 2 2'	2' 1' 1 2	1' 2 1 2'	2 1' 2' 1	1 2 2' 1'	2 2' 1' 1
1' 1 2' 2	2 1' 1 2'	1' 2' 1 2	2' 1' 2 1	1 2' 2 1'	2' 2 1' 1

Et nous remarquons que pour chaqu'une des deux permutations de $1, 1'$ nous avons deux permutations de $2, 2'$ aussi. Donc le nombre de manières de former un nombre à 4 chiffres à partir de $1, 1', 2, 2'$ est $\frac{4!}{2!2!} = 6$

5.3.2 Solution

Maintenant que nous avons meilleures compréhension du problème, il est très facile de répondre à la question. Le nombre de manières de former un nombre de 6 chiffres avec $1, 1, 2, 2, 2, 3$ est $\frac{6!}{3!2!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!2} = 60$

6 Exercice 5

Combien peut-on former d'anagrammes distincts du mot $MATHEMATIQUES$?

- Le mot contient 12 lettres, donc, si toutes les lettres sont discernables nous avons,

$$A_{12}^{12} = 12! \tag{1}$$

- Nous avons 4 paires des lettres MM, AA, TT, EE.

Par exemple avec M, M'. Nous avons

$$M'M \text{ et } MM' \tag{2}$$

Donc nous avons 2! permutations possibles avec chacune de ces 2 lettres. Le nombre d'arrangements possible du mot en tenant compte des paires est

$$\frac{A_{12}^{12}}{(2!)^4} = \frac{12!}{2!2!2!2!} \iff \frac{12!}{16} \tag{3}$$

6.0.1 Explication détaillée

Pour être sûr de bien comprendre, prenons un exemple. Ainsi pour une disposition particulière des lettres par exemple "M A T H E M' A' T H I Q U E'", nous allons générer 2 fois la même disposition en permutant les M,

$$\underline{M}ATHE\underline{M'}A'THIQUE' \quad \underline{M'}ATHE\underline{M}A'THIQUE',$$

et pour chacun de ces cas nous allons doubler la disposition en permutant les A,

$$\begin{array}{cc} MATHEM'A'THIQUE' & M'ATHEMA'THIQUE' \\ MA'THEM'ATHIQUE' & M'A'THEMATHIQUE', \end{array}$$

Et par suite encore le double en permutant les E et encore le double en permutant les T.

6.0.2 Exercice pratique

- Pouvez vous trouver le nombre d'arrangements possibles avec votre Prénom?

7 Exercice 6

7.1 Préliminaires

Avant d'aborder l'exercice 6 voyons comment fonctionne une combinaison notée C_n^p. Commençons par arranger[3] 2 lettres parmi A, B, C. Nous savons qu'il existe A_3^2 possibilités. Listons les,

$$\begin{array}{lll} AB & AC & BC \end{array} \tag{4}$$
$$\begin{array}{lll} BA & CA & CB, \end{array} \text{ permutation de la ligne precedente} \tag{5}$$

Remarquez que pour chaque couple de lettres, nous avons généré le double des éléments en permutant les couples. Donc si on ne veut pas distinguer l'ordre des arrangement, AB est la même chose que BA, nous n'avons que 3 possibilités: un A et un B; un A et un C; un B et un C. Comment passer d'un arrangement ou l'ordre est important d'une combinaison ou l'ordre n'est pas important? Il suffit de diviser par le nombre de permutations possibles du nombre d'éléments dans un groupe. Nous avons deux élément dans chaque groupe, par suite. Le nombre de combinaisons de 2 lettres parmi 3 est

$$\frac{A_3^2}{2!} = \frac{\frac{3!}{(3-2)!}}{2!} == \frac{3!}{(3-2)!2!} = C_2^3$$

7.2 Exercice 6 (solution)

7.2.1 Question 1

Ici nous devons choisir 8 carte parmi 32. donc $C_{32}^8 = \frac{32!}{(32-8)!8!}$

7.2.2 Question 2

Nous avons 16 cartes rouges dans le jeu, donc $C_{16}^8 = \frac{16!}{(16-8)!8!}$

[3]Quand on parle d'arrangement, on veut dire le nombre de manières de choisir des lettres distinctes

7.2.3 Question 3

Nous avons 8 carrés et il faut choisir 2 carrés parmi c'est 8 carrés, donc $C_{2}^{2} = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8\times 7}{2} = 28$

8 Exercice 7

$$
\begin{aligned}
& C_{n}^{p-1} + C_{n}^{p} \\
& \qquad \Longleftrightarrow \frac{n!}{(n-(p-1))!(p-1)!} + \frac{n!}{(n-p)!p!} \\
& \qquad \Longleftrightarrow \frac{n!}{(n+1-p)!(p-1)!} + \frac{n!}{(n-p)!(p)!} \\
& \qquad \Longleftrightarrow \frac{(p)}{(p)}\frac{n!}{(n+1-p)!(p-1)!} + \frac{(n+1-p)}{(n+1-p)}\frac{n!}{(n-p)!(p)!} \\
& \qquad \Longleftrightarrow \frac{pn!}{(n+1-p)!(p)!} + \frac{n!(n+1-p)}{(n+1-p)!(p)!} \\
& \qquad \Longleftrightarrow \frac{pn! + n!(n+1-p)}{(n+1-p)!(p)!} \\
& \qquad \Longleftrightarrow \frac{n!(p+n+1-p)}{(n+1-p)!(p)!} \\
& \qquad \Longleftrightarrow \frac{n!(n+1)}{(n+1-p)!(p)!} \\
& \qquad \Longleftrightarrow \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!(p)!} \\
& \qquad \Longleftrightarrow C_{n+1}^{(p)}
\end{aligned}
$$

9 Exercice 8

9.1 Modélisation

Dans un premier temps revenons au premier exercice du TD1 où nous avons listé toutes les parties de $E = \{1, 2, 3\}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(E) = \{\{\emptyset\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \\
\{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \\
\{0,1,2\}\}
\end{aligned}
$$

Remarquons ensuite que $\{0, 1\}$ par exemple est un sous-ensemble de E donc $\{0, 1\}$ et $\{1, 0\}$ sont les mêmes ensembles car ils ont les mêmes éléments. De plus ici nous pouvons voir que nous avons un sous-ensemble avec 0 éléments, $\{\emptyset\}$, 3 sous-ensembles avec 1 éléments, $\{0\}, \{1\}, \{2\}$, 3 sous-ensembles avec 2 éléments, $\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$ et enfin 1 sous-ensemble avec 3 éléments $\{0, 1, 2\}$. Nous pouvons dire que \

le nombre de manières de choisir 0 élément dans E est $C_{3}^{0} = 1$
le nombre de manières de choisir 1 élément dans E est $C_{3}^{1} = 3$
le nombre de manières de choisir 2 éléments dans E est $C_{3}^{2} = 3$

le nombre de manières de choisir 3 éléments dans E est $C_3^3 = 1$ \

Donc $card(\mathcal{P}(E)) = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$. Or nous savons que $(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + ... + C_n^n a^n b^0$. Par suite nous pouvons dire que $(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$. Donc pour $card(E) = 3$ nous avons

$$card(\mathcal{P}(E)) = 2^3$$

Enfin pour si $card(E) = n$

$$card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

10 Exercice 9

10.1 Modélisation

Nous pouvons être tenté de modéliser avec notre bon vieux ensemble $E = \{1, 2, 3\}$, mais d'après l'énoncé cela nous amènera à lister 3^3=27 possibilités. Essayons un modèle moins coûteux avec $E = \{1, 2\}$. De plus l'énoncé nous parle d'un ensemble de couples (A, B) tel que $A \subset B$. Donc l'ensemble A va lui-même dépendre de l'ensemble B. Procédons par étape listons tous les couples (A,B) pour chaque sous-ensemble B.

Si $B = \{\emptyset\}$, $n_b = card(B) = 0$

$$A_1 = \{(\{\emptyset\}, \{\emptyset\})\}$$

Donc $card(A_1) = C_0^0 \iff \sum_{i=0}^{0} C_0^i$

Si $B = \{1\}$, $n_b = card(B) = 1$

$$\begin{aligned} A_2 = \{(\{\emptyset\}, \{1\})\,, \\ (\{1\}, \{1\})\} \end{aligned}$$

Donc $card(A_2) = C_1^0 + C_1^1 \iff \sum_{i=0}^{1} C_1^i$

Si $B = \{2\}$, $n_b = card(B) = 1$

$$\begin{aligned} A_3 = \{(\{\emptyset\}, \{2\})\,, \\ (\{2\}, \{2\})\} \end{aligned}$$

Donc $card(A_3) = C_1^0 + C_1^1 \iff \sum_{i=0}^{1} C_1^i$

Si $B = \{1, 2\}$, $n_b = card(B) = 2$

$$\begin{aligned} A_4 = \{(\{\emptyset\}, \{1, 2\}), \\ (\{1\}, \{1, 2\}), \\ (\{2\}, \{1, 2\}), \\ (\{1, 2\}, \{1, 2\})\} \end{aligned}$$

Donc $card(A_4) = C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 \iff \sum_{i=0}^{2} C_2^i$

10.2 Conclusion

Finalement, soit β le nombre de couple (A,B).

$$\begin{aligned}\beta =& card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) + card(A_4) \\ \iff& \sum_{i=0}^{0} C_0^i + \sum_{i=0}^{1} C_1^i + \sum_{i=0}^{1} C_1^i + \sum_{i=0}^{2} C_2^i\end{aligned}$$

Nous pouvons généraliser un peu plus en utilisant le resultat de l'exercice précédent (il s'agit d'une somme de binôme de Newton).

$$\beta = 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2$$

Revenons un instant à la partie modélisation. Nous voyons que lorsque $card(B) = 1$, nous avons 2 manières de choisir les couples (A B). De même si $E = \{1, 2, 3\}$ nous aurions eu 3 manières de choisir les couples (A,B). Donc le nombre de couple (A,B) depend aussi de $card(E) = n$ (ici n=2). Nous pouvons écrire,

$$\beta = C_2^0 2^0 + C_2^1 2^1 + C_2^1 2^2$$

Quand $n = 2$ avons:

$$\beta = \sum_{n_b=0}^{2} C_2^{n_b} 2^{n_b}$$

Ici nous reconnaissons à nouveau le binôme de Newton.

$$\sum_{n_b=0}^{2} C_2^{n_b} 2^{n_b} 1^{2-n_b} = (1+2)^2 \iff 3^2$$

Nous pouvons conclure que quand $n \in \mathbb{N}$, Le nombre de couple (A,B) est,

$$\sum_{n_b=0}^{n} C_2^{n_b} 2^{n_b} 1^{2-n_b} = (1+2)^n \iff 3^n$$